Fiche

Formes bilinéaires et formes quadratiques



Définition:

Etant donné un espace vectoriel E,

- une application linéaire $E \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée une **forme** linéaire ;
- L'ensemble des formes linéaires forment un espace vectoriel noté $\boldsymbol{E^*}$ et appelé l'espace **dual** de E.



Définition:

Etant donné un espace vectoriel E,

- une application linéaire $E \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée une **forme** linéaire ;
- L'ensemble des formes linéaires forment un espace vectoriel noté $\boldsymbol{E^*}$ et appelé l'espace **dual** de E.

Dans $E = \mathbb{R}^n$ muni d'une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$, une forme linéaire est un endomorphisme

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ et } \underset{\mathcal{E},\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & \cdots & f(\overrightarrow{e_n}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \end{array}$$



Définition:

Etant donné un espace vectoriel E,

- une application linéaire $E \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée une **forme** linéaire ;
- L'ensemble des formes linéaires forment un espace vectoriel noté $\boldsymbol{E^*}$ et appelé l'espace **dual** de E.

Dans $E = \mathbb{R}^n$ muni d'une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$, une forme linéaire est un endomorphisme

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ et } \underset{\mathcal{E},\mathbb{R}}{\text{mat}}(f) = \begin{matrix} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & \cdots & f(\overrightarrow{e_n}) \end{matrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Les matrices des formes linéaires sont des matrices lignes.

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$		$\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$		$\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$		$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$
$i(x,y) = 3x$		$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$		$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$		$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$		$\begin{pmatrix} & & & \end{pmatrix}$
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$		$\begin{pmatrix} & & & \end{pmatrix}$
$n(x,y,z) = 0$		$\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$
$o(x,y,z) = -4$		$\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		$\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$		$\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$		$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$
$i(x,y) = 3x$		$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$		$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$		$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$		$\begin{pmatrix} & & & \end{pmatrix}$
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$		$\begin{pmatrix} & & & \end{pmatrix}$
$n(x,y,z) = 0$		$\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$
$o(x,y,z) = -4$		$\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		$\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$i(x,y) = 3x$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$n(x,y,z) = 0$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$o(x,y,z) = -4$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$		$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$
$i(x,y) = 3x$		$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$		$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$		$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$		$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$		$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$
$n(x,y,z) = 0$		$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$
$o(x,y,z) = -4$		$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$i(x,y) = 3x$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$n(x,y,z) = 0$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$o(x,y,z) = -4$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$	Non	$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$i(x,y) = 3x$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$n(x,y,z) = 0$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$o(x,y,z) = -4$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$	Non	(pas de matrice)
$i(x,y) = 3x$		( )
$j(x,y) = 3x + y$		( )
$k(x,y) = 3x + 1$		( )
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$		( )
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$		( )
$n(x,y,z) = 0$		( )
$o(x,y,z) = -4$		( )
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		( )

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$	Non	(pas de matrice)
$i(x,y) = 3x$	Oui	$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$n(x,y,z) = 0$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$o(x,y,z) = -4$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$	Non	$\begin{pmatrix} \text{pas de matrice} \end{pmatrix}$
$i(x,y) = 3x$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$n(x,y,z) = 0$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$o(x,y,z) = -4$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$	Non	(pas de matrice)
$i(x,y) = 3x$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$	Oui	( )
$k(x,y) = 3x + 1$		( )
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$		( )
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$		( )
$n(x,y,z) = 0$		( )
$o(x,y,z) = -4$		( )
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		( )

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$	Non	(pas de matrice)
$i(x,y) = 3x$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$		( )
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$		( )
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$		( )
$n(x,y,z) = 0$		( )
$o(x,y,z) = -4$		( )
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		( )

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$	Non	(pas de matrice)
$i(x,y) = 3x$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$	Non	( )
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$		( )
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$		( )
$n(x,y,z) = 0$		( )
$o(x,y,z) = -4$		( )
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		( )

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$	Non	(pas de matrice)
$i(x,y) = 3x$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$	Non	(pas de matrice)
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$		( )
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$		( )
$n(x,y,z) = 0$		( )
$o(x,y,z) = -4$		( )
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		( )

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$	Non	(pas de matrice)
$i(x,y) = 3x$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$	Non	(pas de matrice)
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$	Oui	( )
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$		( )
$n(x,y,z) = 0$		( )
$o(x,y,z) = -4$		( )
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		( )

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$i(x,y) = 3x$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$n(x,y,z) = 0$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$o(x,y,z) = -4$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$i(x,y) = 3x$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$	Non	$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$n(x,y,z) = 0$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$o(x,y,z) = -4$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$i(x,y) = 3x$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$n(x,y,z) = 0$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$o(x,y,z) = -4$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$i(x,y) = 3x$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$n(x,y,z) = 0$	Oui	$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$o(x,y,z) = -4$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$i(x,y) = 3x$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$n(x,y,z) = 0$	Oui	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$o(x,y,z) = -4$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$i(x,y) = 3x$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$n(x,y,z) = 0$	Oui	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$o(x,y,z) = -4$	Non	$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$	Non	(pas de matrice)
$i(x,y) = 3x$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$	Non	(pas de matrice)
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$	Non	(pas de matrice)
$n(x,y,z) = 0$	Oui	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$o(x,y,z) = -4$	Non	(pas de matrice)
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$		( )

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$i(x,y) = 3x$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$n(x,y,z) = 0$	Oui	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$o(x,y,z) = -4$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$	Oui	$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 :

Applications	Formes linéaires	Matrice associées
$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4z$	Oui	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$g(x,y,z) = x + 3y - z$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$h(x,y) = x^2 - y$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$i(x,y) = 3x$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$
$j(x,y) = 3x + y$	Oui	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$
$k(x,y) = 3x + 1$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$\ell(a,b,c,d) = a - c + 2d - 3b$	Oui	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
$m(a,b,c,d) = a + b - c + cd$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$n(x,y,z) = 0$	Oui	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$o(x,y,z) = -4$	Non	$\begin{pmatrix}$ pas de matrice $\end{pmatrix}$
$p(\blacktriangle,\blacklozenge,\bullet,\blacksquare) = \blacklozenge - \blacksquare$	Oui	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$



Théorème

Etant donné un espace vectoriel E est de dimension finie, et une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$, la famille des formes linéaires $\mathcal{E} = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ où chaque forme linéaire e^i est définie par $e^i(\overrightarrow{e_j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une base de l'espace dual de E.



Théorème

Etant donné un espace vectoriel E est de dimension finie, et une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$, la famille des formes linéaires $\mathcal{E} = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ où chaque forme linéaire e^i est définie par $e^i(\overrightarrow{e_j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une base de l'espace dual de E.

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a, b, c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\left(\quad \right)$.



Théorème

Etant donné un espace vectoriel E est de dimension finie, et une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$, la famille des formes linéaires $\mathcal{E} = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ où chaque forme linéaire e^i est définie par $e^i(\overrightarrow{e_j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une base de l'espace dual de E.

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a, b, c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & & \end{pmatrix}$.



Théorème

Etant donné un espace vectoriel E est de dimension finie, et une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$, la famille des formes linéaires $\mathcal{E} = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ où chaque forme linéaire e^i est définie par $e^i(\overrightarrow{e_j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une base de l'espace dual de E.

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a, b, c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & \end{pmatrix}$.



Théorème

Etant donné un espace vectoriel E est de dimension finie, et une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$, la famille des formes linéaires $\mathcal{E} = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ où chaque forme linéaire e^i est définie par $e^i(\overrightarrow{e_j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une base de l'espace dual de E.

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a, b, c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.



Théorème

Etant donné un espace vectoriel E est de dimension finie, et une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$, la famille des formes linéaires $\mathcal{E} = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ où chaque forme linéaire e^i est définie par $e^i(\overrightarrow{e_j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une base de l'espace dual de E.

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a, b, c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4, 5, 6) = f(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})$$



Théorème

Etant donné un espace vectoriel E est de dimension finie, et une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$, la famille des formes linéaires $\mathcal{E} = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ où chaque forme linéaire e^i est définie par $e^i(\overrightarrow{e_j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une base de l'espace dual de E.

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a, b, c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4, 5, 6) = f\left(4\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}\right)$$



Théorème

Etant donné un espace vectoriel E est de dimension finie, et une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$, la famille des formes linéaires $\mathcal{E} = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ où chaque forme linéaire e^i est définie par $e^i(\overrightarrow{e_j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une base de l'espace dual de E.

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a, b, c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4, 5, 6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}\right)$$



Théorème

Etant donné un espace vectoriel E est de dimension finie, et une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$, la famille des formes linéaires $\mathcal{E} = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ où chaque forme linéaire e^i est définie par $e^i(\overrightarrow{e_j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une base de l'espace dual de E.

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a, b, c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4, 5, 6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right)$$



Théorème

Etant donné un espace vectoriel E est de dimension finie, et une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$, la famille des formes linéaires $\mathcal{E} = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ où chaque forme linéaire e^i est définie par $e^i(\overrightarrow{e_j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une base de l'espace dual de E.

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a, b, c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4, 5, 6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$



Théorème

Etant donné un espace vectoriel E est de dimension finie, et une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$, la famille des formes linéaires $\mathcal{E} = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ où chaque forme linéaire e^i est définie par $e^i(\overrightarrow{e_j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une base de l'espace dual de E.

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a, b, c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4, 5, 6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$



Théorème

Etant donné un espace vectoriel E est de dimension finie, et une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$, la famille des formes linéaires $\mathcal{E} = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ où chaque forme linéaire e^i est définie par $e^i(\overrightarrow{e_j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une base de l'espace dual de E.

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a, b, c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4, 5, 6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$



Théorème

Etant donné un espace vectoriel E est de dimension finie, et une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$, la famille des formes linéaires $\mathcal{E} = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ où chaque forme linéaire e^i est définie par $e^i(\overrightarrow{e_j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une base de l'espace dual de E.

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a, b, c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4, 5, 6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} =$$



Théorème

Etant donné un espace vectoriel E est de dimension finie, et une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$, la famille des formes linéaires $\mathcal{E} = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ où chaque forme linéaire e^i est définie par $e^i(\overrightarrow{e_j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une base de l'espace dual de E.

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a, b, c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4, 5, 6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 -$$



Théorème

Etant donné un espace vectoriel E est de dimension finie, et une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$, la famille des formes linéaires $\mathcal{E} = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ où chaque forme linéaire e^i est définie par $e^i(\overrightarrow{e_j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une base de l'espace dual de E.

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a, b, c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4,5,6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 - 5 +$$



Théorème

Etant donné un espace vectoriel E est de dimension finie, et une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$, la famille des formes linéaires $\mathcal{E} = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ où chaque forme linéaire e^i est définie par $e^i(\overrightarrow{e_j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une base de l'espace dual de E.

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a, b, c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4,5,6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 - 5 + 6 =$$



Théorème

Etant donné un espace vectoriel E est de dimension finie, et une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$, la famille des formes linéaires $\mathcal{E} = (e^1, e^2, \ldots, e^n)$ où chaque forme linéaire e^i est définie par $e^i(\overrightarrow{e_j}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une base de l'espace dual de E.

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a, b, c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4, 5, 6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 - 5 + 6 = 9.$$

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a,b,c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4,5,6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 - 5 + 6 = 9.$$

Dans la base duale de $\mathcal{E}$, la forme linéaire f s'écrit $f = \mathbf{2}e^1 + \mathbf{(-1)}e^2 + \mathbf{1}e^3$ car :

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a,b,c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4,5,6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 - 5 + 6 = 9.$$

Dans la base duale de $\mathcal{E}$, la forme linéaire f s'écrit $f = \mathbf{2}e^1 + \mathbf{(-1)}e^2 + \mathbf{1}e^3$ car :

$$\left.\begin{array}{l} e^1\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=} + b\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=} + c\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=} = a \\ e^2\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=} + b\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=} + c\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=} = b \\ e^3\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=} + b\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=} + c\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=} = c \end{array}\right\} \text{donc } f\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right)$$

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a,b,c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4,5,6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 - 5 + 6 = 9.$$

Dans la base duale de $\mathcal{E}$, la forme linéaire f s'écrit $f = \mathbf{2}e^1 + \mathbf{(-1)}e^2 + \mathbf{1}e^3$ car :

$$\left.\begin{array}{l} e^1\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{1}} + b\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=} + c\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=} = a \\ e^2\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=} + b\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=} + c\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=} = b \\ e^3\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=} + b\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=} + c\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=} = c \end{array}\right\} \text{donc } f\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right)$$

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a,b,c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4,5,6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 - 5 + 6 = 9.$$

Dans la base duale de $\mathcal{E}$, la forme linéaire f s'écrit $f = \mathbf{2}e^1 + \mathbf{(-1)}e^2 + \mathbf{1}e^3$ car :

$$\left.\begin{array}{l} e^1\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{1}} + b\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{0}} + c\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=} = a \\ e^2\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=} + b\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=} + c\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=} = b \\ e^3\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=} + b\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=} + c\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=} = c \end{array}\right\} \text{donc } f\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right)$$

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a,b,c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4,5,6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 - 5 + 6 = 9.$$

Dans la base duale de $\mathcal{E}$, la forme linéaire f s'écrit $f = \mathbf{2}e^1 + \mathbf{(-1)}e^2 + \mathbf{1}e^3$ car :

$$\left.\begin{array}{l} e^1\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{1}} + b\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{0}} + c\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{0}} = a \\ e^2\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=} + b\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=} + c\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=} = b \\ e^3\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=} + b\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=} + c\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=} = c \end{array}\right\} \text{donc } f\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right)$$

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a,b,c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4,5,6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 - 5 + 6 = 9.$$

Dans la base duale de $\mathcal{E}$, la forme linéaire f s'écrit $f = \mathbf{2}e^1 + \mathbf{(-1)}e^2 + \mathbf{1}e^3$ car :

$$\left.\begin{array}{l} e^1\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{1}} + b\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{0}} + c\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{0}} = a \\ e^2\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{0}} + b\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=} + c\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=} = b \\ e^3\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=} + b\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=} + c\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=} = c \end{array}\right\} \text{donc } f\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right)$$

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a,b,c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4,5,6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 - 5 + 6 = 9.$$

Dans la base duale de $\mathcal{E}$, la forme linéaire f s'écrit $f = \mathbf{2}e^1 + \mathbf{(-1)}e^2 + \mathbf{1}e^3$ car :

$$\left.\begin{array}{l} e^1\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{1}} + b\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{0}} + c\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{0}} = a \\ e^2\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{0}} + b\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{1}} + c\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=} = b \\ e^3\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=} + b\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=} + c\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=} = c \end{array}\right\} \text{donc } f\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right)$$

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a,b,c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4,5,6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 - 5 + 6 = 9.$$

Dans la base duale de $\mathcal{E}$, la forme linéaire f s'écrit $f = \mathbf{2}e^1 + \mathbf{(-1)}e^2 + \mathbf{1}e^3$ car :

$$\left.\begin{array}{l} e^1\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{1}} + b\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{0}} + c\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{0}} = a \\ e^2\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{0}} + b\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{1}} + c\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{0}} = b \\ e^3\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=} + b\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=} + c\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=} = c \end{array}\right\} \text{donc } f\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right)$$

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a,b,c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4,5,6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 - 5 + 6 = 9.$$

Dans la base duale de $\mathcal{E}$, la forme linéaire f s'écrit $f = \mathbf{2}e^1 + \mathbf{(-1)}e^2 + \mathbf{1}e^3$ car :

$$\left.\begin{array}{l} e^1\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{1}} + b\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{0}} + c\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{0}} = a \\ e^2\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{0}} + b\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{1}} + c\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{0}} = b \\ e^3\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{0}} + b\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=} + c\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=} = c \end{array}\right\} \text{donc } f\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right)$$

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a,b,c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4,5,6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 - 5 + 6 = 9.$$

Dans la base duale de $\mathcal{E}$, la forme linéaire f s'écrit $f = \mathbf{2}e^1 + \mathbf{(-1)}e^2 + \mathbf{1}e^3$ car :

$$\left.\begin{array}{l} e^1\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{1}} + b\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{0}} + c\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{0}} = a \\ e^2\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{0}} + b\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{1}} + c\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{0}} = b \\ e^3\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{0}} + b\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{0}} + c\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=} = c \end{array}\right\} \text{donc } f\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right)$$

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a,b,c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4,5,6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 - 5 + 6 = 9.$$

Dans la base duale de $\mathcal{E}$, la forme linéaire f s'écrit $f = \mathbf{2}e^1 + \mathbf{(-1)}e^2 + \mathbf{1}e^3$ car :

$$\left.\begin{array}{l} e^1\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{1}} + b\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{0}} + c\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{0}} = a \\ e^2\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{0}} + b\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{1}} + c\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{0}} = b \\ e^3\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{0}} + b\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{0}} + c\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{1}} = c \end{array}\right\} \text{donc } f\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right)$$

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a,b,c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4,5,6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 - 5 + 6 = 9.$$

Dans la base duale de $\mathcal{E}$, la forme linéaire f s'écrit $f = \mathbf{2}e^1 + \mathbf{(-1)}e^2 + \mathbf{1}e^3$ car :

$$\left.\begin{array}{l} e^1\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{1}} + b\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{0}} + c\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{0}} = a \\ e^2\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{0}} + b\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{1}} + c\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{0}} = b \\ e^3\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{0}} + b\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{0}} + c\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{1}} = c \end{array}\right\} \text{donc } f\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = \mathbf{2}\ldots + \mathbf{(-1)}\ldots + \mathbf{1}\ldots$$

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a,b,c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4,5,6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 - 5 + 6 = 9.$$

Dans la base duale de $\mathcal{E}$, la forme linéaire f s'écrit $f = \mathbf{2}e^1 + \mathbf{(-1)}e^2 + \mathbf{1}e^3$ car :

$$\left.\begin{array}{l} e^1\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{1}} + b\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{0}} + c\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{0}} = a \\ e^2\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{0}} + b\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{1}} + c\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{0}} = b \\ e^3\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{0}} + b\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{0}} + c\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{1}} = c \end{array}\right\} \text{donc } f\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = \mathbf{2}a + \mathbf{(-1)}\ldots + \mathbf{1}\ldots$$

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a,b,c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4,5,6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 - 5 + 6 = 9.$$

Dans la base duale de $\mathcal{E}$, la forme linéaire f s'écrit $f = \mathbf{2}e^1 + \mathbf{(-1)}e^2 + \mathbf{1}e^3$ car :

$$\left.\begin{array}{l} e^1\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{1}} + b\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{0}} + c\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{0}} = a \\ e^2\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{0}} + b\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{1}} + c\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{0}} = b \\ e^3\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{0}} + b\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{0}} + c\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{1}} = c \end{array}\right\} \text{donc } f\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = \mathbf{2}a + \mathbf{(-1)}b + \mathbf{1}\ldots$$

Exemple n° 2 : Considérons dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$,

la forme linéaire $f(a,b,c) = 2a - b + c$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(4,5,6) = f\left(\mathbf{4}\overrightarrow{e_1} + \mathbf{5}\overrightarrow{e_2} + \mathbf{6}\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 - 5 + 6 = 9.$$

Dans la base duale de $\mathcal{E}$, la forme linéaire f s'écrit $f = \mathbf{2}e^1 + \mathbf{(-1)}e^2 + \mathbf{1}e^3$ car :

$$\left.\begin{array}{l} e^1\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{1}} + b\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{0}} + c\underbrace{e^1\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{0}} = a \\ e^2\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{0}} + b\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{1}} + c\underbrace{e^2\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{0}} = b \\ e^3\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = a\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_1}\right)}_{=\mathbf{0}} + b\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_2}\right)}_{=\mathbf{0}} + c\underbrace{e^3\left(\overrightarrow{e_3}\right)}_{=\mathbf{1}} = c \end{array}\right\} \text{donc } f\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}\right) = \mathbf{2}a + \mathbf{(-1)}b + \mathbf{1}c$$

Exemple n° 3 : Les différentielle sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme linéaire :

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$$

Exemple n° 3 : Les différentielle sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme linéaire :

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$$

Ainsi, pour $f(x,y) = x^3y^2$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$

Exemple n° 3 : Les différentielle sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme linéaire :

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$$

Ainsi, pour $f(x,y) = x^3y^2$ on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{3x^2y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$

Exemple n° 3 : Les différentielle sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme linéaire :

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$$

Ainsi, pour $f(x,y) = x^3y^2$ on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{3x^2y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{2x^3y}$

Exemple n° 3 : Les différentielle sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme linéaire :

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$$

Ainsi, pour $f(x,y) = x^3y^2$ on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \boldsymbol{3x^2y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \boldsymbol{2x^3y}$

et $\mathrm{d}f(x,y) = \ldots\ldots\, \boldsymbol{\mathrm{d}x} + \ldots\ldots\, \boldsymbol{\mathrm{d}y} = \ldots\ldots \boldsymbol{e^1} + \ldots\ldots \boldsymbol{e^2}$

Exemple n° 3 : Les différentielle sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme linéaire :

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$$

Ainsi, pour $f(x,y) = x^3y^2$ on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{3x^2y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{2x^3y}$

et $\mathrm{d}f(x,y) = \mathbf{3x^2y^2}\,\mathbf{dx} + \ldots\ldots\,\mathbf{dy} = \ldots\ldots\boldsymbol{e^1} + \ldots\ldots\boldsymbol{e^2}$

Exemple n° 3 : Les différentielle sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme linéaire :

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$$

Ainsi, pour $f(x,y) = x^3y^2$ on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{3x^2y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{2x^3y}$

et $\mathrm{d}f(x,y) = \mathbf{3x^2y^2}\,\mathbf{dx} + \mathbf{2x^3y}\,\mathbf{dy} = \ldots\ldots\boldsymbol{e^1} + \ldots\ldots\boldsymbol{e^2}$

Exemple n° 3 : Les différentielle sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme linéaire :

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$$

Ainsi, pour $f(x,y) = x^3y^2$ on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{3x^2y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{2x^3y}$

et $\mathrm{d}f(x,y) = \mathbf{3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy = 3x^2y^2e^1 + \ldots\ldots e^2}$

Exemple n° 3 : Les différentielle sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme linéaire :

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$$

Ainsi, pour $f(x,y) = x^3y^2$ on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{3x^2y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{2x^3y}$

et $\mathrm{d}f(x,y) = \mathbf{3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy = 3x^2y^2e^1 + 2x^3ye^2}$

Exemple n° 3 : Les différentielle sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme linéaire :

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$$

Ainsi, pour $f(x,y) = x^3y^2$ on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{3x^2y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{2x^3y}$

et $\mathrm{d}f(x,y) = \mathbf{3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy = 3x^2y^2e^1 + 2x^3ye^2}$

Ainsi, la différentielle de f au point $(1,2)$ est la forme linéaire : $\mathrm{d}f(1,2) =$

Exemple n° 3 : Les différentielle sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme linéaire :

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$$

Ainsi, pour $f(x,y) = x^3y^2$ on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{3x^2y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{2x^3y}$

et $\mathrm{d}f(x,y) = \mathbf{3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy = 3x^2y^2e^1 + 2x^3ye^2}$

Ainsi, la différentielle de f au point $(1,2)$ est la forme linéaire : $\mathrm{d}f(1,2) = \mathbf{12e^1 + 4e^2}$,

et $\mathrm{d}f(1,2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$

Exemple n° 3 : Les différentielle sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme linéaire :

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$$

Ainsi, pour $f(x,y) = x^3y^2$ on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{3x^2y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{2x^3y}$

et $\mathrm{d}f(x,y) = \mathbf{3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy = 3x^2y^2e^1 + 2x^3ye^2}$

Ainsi, la différentielle de f au point $(1,2)$ est la forme linéaire : $\mathrm{d}f(1,2) = \mathbf{12e^1 + 4e^2}$,

et $\mathrm{d}f(1,2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{12a + 4b}$.

II. Formes bilinéaires.

En algèbre, les formes sont des applications à valeurs numériques, pour nous, réelles.



Définition:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Une forme **bilinéaire** sur E est une application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait :

II. Formes bilinéaires.

En algèbre, les formes sont des applications à valeurs numériques, pour nous, réelles.



Définition:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Une forme **bilinéaire** sur E est une application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait :

- $f(a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{af(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}) + bf(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v})}$

En algèbre, les formes sont des applications à valeurs numériques, pour nous, réelles.



Définition:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Une forme **bilinéaire** sur E est une application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait :

- $f(a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{af(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}) + bf(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v})}$
- $f(\overrightarrow{u}, a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2}) = \boldsymbol{af(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}) + bf(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2})}$

En algèbre, les formes sont des applications à valeurs numériques, pour nous, réelles.



Définition:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Une forme **bilinéaire** sur E est une application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait :

- $f(a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{af(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}) + bf(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v})}$
- $f(\overrightarrow{u}, a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2}) = \boldsymbol{af(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}) + bf(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2})}$

Autrement dit, les fonctions $f_1 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{array}$ et $f_2 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{v} & \longmapsto & f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{array}$ sont **linéaires.**

En algèbre, les formes sont des applications à valeurs numériques, pour nous, réelles.



Définition:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Une forme **bilinéaire** sur E est une application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait :

- $f(a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{af(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}) + bf(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v})}$
- $f(\overrightarrow{u}, a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2}) = \boldsymbol{af(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}) + bf(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2})}$

Autrement dit, les fonctions $f_1 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{array}$ et $f_2 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{v} & \longmapsto & f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{array}$ sont **linéaires.**

Exemple n° 4 : le produit scalaire $f : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \longmapsto & \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \end{array}$ est une application bilinéaire :

En algèbre, les formes sont des applications à valeurs numériques, pour nous, réelles.



Définition:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Une forme **bilinéaire** sur E est une application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait :

- $f(a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{af(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}) + bf(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v})}$
- $f(\overrightarrow{u}, a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2}) = \boldsymbol{af(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}) + bf(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2})}$

Autrement dit, les fonctions $f_1 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{array}$ et $f_2 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{v} & \longmapsto & f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{array}$ sont **linéaires.**

Exemple n° 4 : le produit scalaire $f : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \longmapsto & \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \end{array}$ est une application bilinéaire :

- $f(a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) = (a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}) \cdot \overrightarrow{v} =$

En algèbre, les formes sont des applications à valeurs numériques, pour nous, réelles.



Définition:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Une forme **bilinéaire** sur E est une application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait :

- $f(a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{af(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}) + bf(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v})}$
- $f(\overrightarrow{u}, a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2}) = \boldsymbol{af(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}) + bf(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2})}$

Autrement dit, les fonctions $f_1 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{array}$ et $f_2 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{v} & \longmapsto & f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{array}$ sont **linéaires.**

Exemple n° 4 : le produit scalaire $f : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \longmapsto & \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \end{array}$ est une application bilinéaire :

- $f(a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) = (a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}) \cdot \overrightarrow{v} = \boldsymbol{a\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v} + b\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{v}}$

En algèbre, les formes sont des applications à valeurs numériques, pour nous, réelles.



Définition:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Une forme **bilinéaire** sur E est une application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait :

- $f(a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{af(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}) + bf(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v})}$
- $f(\overrightarrow{u}, a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2}) = \boldsymbol{af(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}) + bf(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2})}$

Autrement dit, les fonctions $f_1 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{array}$ et $f_2 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{v} & \longmapsto & f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{array}$ sont **linéaires.**

Exemple n° 4 : le produit scalaire $f : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \longmapsto & \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \end{array}$ est une application bilinéaire :

- $f(a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) = (a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}) \cdot \overrightarrow{v} = \boldsymbol{a\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v} + b\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{v}}$
  $= \boldsymbol{af(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}) + bf(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v})}$
- $f(\overrightarrow{u}, a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2}) =$

En algèbre, les formes sont des applications à valeurs numériques, pour nous, réelles.



Définition:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Une forme **bilinéaire** sur E est une application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait :

- $f(a\vec{u_1} + b\vec{u_2}, \vec{v}) = \boldsymbol{af(\vec{u_1}, \vec{v}) + bf(\vec{u_2}, \vec{v})}$
- $f(\vec{u}, a\vec{v_1} + b\vec{v_2}) = \boldsymbol{af(\vec{u}, \vec{v_1}) + bf(\vec{u}, \vec{v_2})}$

Autrement dit, les fonctions $f_1 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{u} & \longmapsto & f(\vec{u}, \vec{v}) \end{array}$ et $f_2 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{v} & \longmapsto & f(\vec{u}, \vec{v}) \end{array}$ sont **linéaires.**

Exemple n° 4 : le produit scalaire $f : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \longmapsto & \vec{u} \cdot \vec{v} \end{array}$ est une application bilinéaire :

- $f(a\vec{u_1} + b\vec{u_2}, \vec{v}) = (a\vec{u_1} + b\vec{u_2}) \cdot \vec{v} = \boldsymbol{a\vec{u_1} \cdot \vec{v} + b\vec{u_2} \cdot \vec{v}}$
  $= \boldsymbol{af(\vec{u_1}, \vec{v}) + bf(\vec{u_2}, \vec{v})}$
- $f(\vec{u}, a\vec{v_1} + b\vec{v_2}) = \boldsymbol{\vec{u} \cdot (a\vec{v_1} + b\vec{v_2})} =$

En algèbre, les formes sont des applications à valeurs numériques, pour nous, réelles.



Définition:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Une forme **bilinéaire** sur E est une application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait :

- $f(a\vec{u_1} + b\vec{u_2}, \vec{v}) = \boldsymbol{af(\vec{u_1}, \vec{v}) + bf(\vec{u_2}, \vec{v})}$
- $f(\vec{u}, a\vec{v_1} + b\vec{v_2}) = \boldsymbol{af(\vec{u}, \vec{v_1}) + bf(\vec{u}, \vec{v_2})}$

Autrement dit, les fonctions $f_1 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{u} & \longmapsto & f(\vec{u}, \vec{v}) \end{array}$ et $f_2 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{v} & \longmapsto & f(\vec{u}, \vec{v}) \end{array}$ sont **linéaires.**

Exemple n° 4 : le produit scalaire $f : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \longmapsto & \vec{u} \cdot \vec{v} \end{array}$ est une application bilinéaire :

- $f(a\vec{u_1} + b\vec{u_2}, \vec{v}) = (a\vec{u_1} + b\vec{u_2}) \cdot \vec{v} = \boldsymbol{a\vec{u_1} \cdot \vec{v} + b\vec{u_2} \cdot \vec{v}}$
  $= \boldsymbol{af(\vec{u_1}, \vec{v}) + bf(\vec{u_2}, \vec{v})}$
- $f(\vec{u}, a\vec{v_1} + b\vec{v_2}) = \boldsymbol{\vec{u} \cdot (a\vec{v_1} + b\vec{v_2}) = a\,\vec{u} \cdot \vec{v_1} + b\,\vec{u} \cdot \vec{v_2}}$
  $=$

En algèbre, les formes sont des applications à valeurs numériques, pour nous, réelles.



Définition:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Une forme **bilinéaire** sur E est une application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait :

- $f(a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{af(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}) + bf(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v})}$
- $f(\overrightarrow{u}, a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2}) = \boldsymbol{af(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}) + bf(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2})}$

Autrement dit, les fonctions $f_1 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{array}$ et $f_2 : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{v} & \longmapsto & f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{array}$ sont **linéaires.**

Exemple n° 4 : le produit scalaire $f : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \longmapsto & \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \end{array}$ est une application bilinéaire :

- $f(a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}) = (a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}) \cdot \overrightarrow{v} = \boldsymbol{a\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{v} + b\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{v}}$
  $= \boldsymbol{af(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}) + bf(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v})}$
- $f(\overrightarrow{u}, a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2}) = \boldsymbol{\overrightarrow{u} \cdot (a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2}) = a\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v_2}}$
  $= \boldsymbol{af(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}) + bf(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2})}$

Etant donné un espace vectoriel E de dimension n, muni d'une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$, considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{u} = a_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{e_n}$ et $+\overrightarrow{v} = b_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + b_n\overrightarrow{e_n}$, alors :

Etant donné un espace vectoriel E de dimension n, muni d'une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$, considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{u} = a_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{e_n}$ et $+\overrightarrow{v} = b_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + b_n\overrightarrow{e_n}$, alors :

$$f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = f\left(a_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{e_n}\,,\, b_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + b_n\overrightarrow{e_n}\right)$$

Etant donné un espace vectoriel E de dimension n, muni d'une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$, considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{u} = a_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{e_n}$ et $+\overrightarrow{v} = b_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + b_n\overrightarrow{e_n}$, alors :

$$f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = f\left(a_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{e_n}, b_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + b_n\overrightarrow{e_n}\right)$$

$$= \boldsymbol{a_1 b_1 f(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) + a_1 b_2 f(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) + \ldots + a_n b_n f(\overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_n})}$$

Etant donné un espace vectoriel E de dimension n, muni d'une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$, considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{u} = a_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{e_n}$ et $+\overrightarrow{v} = b_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + b_n\overrightarrow{e_n}$, alors :

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) &= f\left(a_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{e_n}\,,\, b_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + b_n\overrightarrow{e_n}\right) \\ &= \boldsymbol{a_1b_1f(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) + a_1b_2f(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) + \ldots + a_nb_nf(\overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_n})} \\ &= \boldsymbol{\sum_{i,j=1}^{n} a_ib_jf(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j})} \end{aligned}$$

Etant donné un espace vectoriel E de dimension n, muni d'une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$, considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{u} = a_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{e_n}$ et $+\overrightarrow{v} = b_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + b_n\overrightarrow{e_n}$, alors :

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) &= f\left(a_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{e_n}, b_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + b_n\overrightarrow{e_n}\right) \\ &= \boldsymbol{a_1b_1f(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) + a_1b_2f(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) + \ldots + a_nb_nf(\overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_n})} \\ &= \boldsymbol{\sum_{i,j=1}^{n} a_ib_jf(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j})} \end{aligned}$$

Ainsi, f est entièrement déterminée par la donnée des n^2 valeurs $(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j})$ d'où le théorème :



Théorème

Si b une forme bilinéaire définie sur un espace vectoriel E de dimension n muni d'une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_i})_{i=1,\ldots,n}$, et B la matrice $\left(b(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j})\right)_{i,j=1,\ldots,n}$, alors : $f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} B [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}$

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit

scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit

scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit

scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit

scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit

scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

$$b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} B [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} =$$

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

$$b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} B [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} =$$

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

$$b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} B [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} =$$

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

$$b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} B [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{xx' + yy'}$$

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit

scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

  $b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} B [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{xx' + yy'}$

- Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$:

  $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ car

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit

scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

  $b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} B [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{xx' + yy'}$

- Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$:

  $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} =$

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit

scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

  $b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} B [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{xx' + yy'}$

- Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$:

  $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3} \neq \mathbf{0}$.

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit

scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

  $b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} B [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{xx' + yy'}$

- Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$:

  $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3} \neq \mathbf{0}$.

  La matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$ est $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$.

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

  $b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} B [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{xx' + yy'}$

- Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$:

  $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3} \neq \mathbf{0}$.

  La matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$ est $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} & [\overrightarrow{f_1}]_{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \\ & \\ & \end{pmatrix}$.

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

  $b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} B [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{xx' + yy'}$

- Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$:

  $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3} \neq \mathbf{0}$.

  La matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$ est $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & \\ \mathbf{2} & \\ & \end{pmatrix}$.

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

  $b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} B [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{xx' + yy'}$

- Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$:

  $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3} \neq \mathbf{0}$.

  La matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$ est $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & \\ \mathbf{2} & \\ \mathbf{-1} & \end{pmatrix}$.

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

  $b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} B [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{xx' + yy'}$

- Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$:

  $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3} \neq \mathbf{0}$.

  La matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$ est $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \\ \mathbf{-1} & \end{pmatrix}$.

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

  $b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} B [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{xx' + yy'}$

- Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$:

  $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3} \neq \mathbf{0}$.

  La matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$ est $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \end{pmatrix}$.

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

  $b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} B [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{xx' + yy'}$

- Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$:

  $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3} \neq \mathbf{0}$.

  La matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$ est $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit

scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$:

  $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3} \neq \mathbf{0}$.

  La matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$ est $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit

scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$:

  $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3} \neq \mathbf{0}$.

  La matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$ est $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$:

  $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3} \neq \mathbf{0}$.

  La matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$ est $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(\ldots[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(\ldots[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{\ldots \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \ldots}\, [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$:

  $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3} \neq \mathbf{0}$.

  La matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$ est $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(\boldsymbol{P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(\ldots [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{\ldots \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \ldots}_{} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$:

  $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3} \neq \mathbf{0}$.

  La matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$ est $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(\boldsymbol{P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(\boldsymbol{P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{\ldots \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \ldots}_{} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$:

  $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3} \neq \mathbf{0}$.

  La matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$ est $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(\boldsymbol{P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(\boldsymbol{P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{\ldots \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \ldots}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$:

  $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3} \neq \mathbf{0}$.

  La matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$ est $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(\boldsymbol{P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(\boldsymbol{P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t\boldsymbol{(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}})} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \ldots}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Exemple n° 5 : Considérons une base orthonormée $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et notons b le produit scalaire. La matrice de la forme bilinéaire b est $B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$:

  $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ car $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3} \neq \mathbf{0}$.

  La matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$ est $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(\boldsymbol{P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(\boldsymbol{P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}})} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \boldsymbol{P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \\ -1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \\ -1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \\ & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminons l'expression du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}} \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times \underbrace{\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}\right)}_{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculs

On se place dans la base $\mathcal{E}$ car elle est orthonormale :
on a :

$$\underbrace{[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}}_{} \qquad \underbrace{[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}}_{}$$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculs

On se place dans la base $\mathcal{E}$ car elle est orthonormale :
on a : $\overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_1} =$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

$[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}$ $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculs

On se place dans la base $\mathcal{E}$ car elle est orthonormale :
on a : $\overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_1} = 2 \times 2 + (-1) \times (-1) =$

$[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}$ $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculs

On se place dans la base $\mathcal{E}$ car elle est orthonormale :
on a : $\overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_1} = 2 \times 2 + (-1) \times (-1) = 5$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

$[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}$ $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \\ & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculs

On se place dans la base $\mathcal{E}$ car elle est orthonormale :
on a : $\overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} =$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

$[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}$ $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \\ & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculs

On se place dans la base $\mathcal{E}$ car elle est orthonormale :
on a : $\overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} = 2 \times 1 + (-1) \times 1 =$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

$[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}$ $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \\ & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculs

On se place dans la base $\mathcal{E}$ car elle est orthonormale :
on a : $\overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} = 2 \times 1 + (-1) \times 1 = 1$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

$[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}$ $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculs

On se place dans la base $\mathcal{E}$ car elle est orthonormale :
on a : $\overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_1} =$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

$[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}$ $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}$

$$\text{Donc, } \underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vérifions : } \underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ & \end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculs

On se place dans la base $\mathcal{E}$ car elle est orthonormale :
on a : $\overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_1} = 1 \times 2 + 1 \times (-1) =$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

$[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}$ $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

Calculs

On se place dans la base $\mathcal{E}$ car elle est orthonormale :
on a : $\overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_1} = 1 \times 2 + 1 \times (-1) = 1$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

$[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}$ $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}$

$$\text{Donc, } \underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vérifions : } \underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculs

On se place dans la base $\mathcal{E}$ car elle est orthonormale :
on a : $\overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_2} =$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} \underbrace{{}^t(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculs

On se place dans la base $\mathcal{E}$ car elle est orthonormale :
on a : $\overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_2} = 1 \times 1 + 1 \times 1 =$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

$[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}$ $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculs

On se place dans la base $\mathcal{E}$ car elle est orthonormale :
on a : $\overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_2} = 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$

$$= {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \underbrace{{}^t(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}) \times \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}}_{\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b)} [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$$

$[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}}$ $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}}$

Donc, $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.
- Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.
- Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Expression analytique du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.
- Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Expression analytique du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

Donc, si $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} =$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.
- Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Expression analytique du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

Donc, si $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \times \underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.
- Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Expression analytique du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

Donc, si $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \times \underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$=$$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.
- Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Expression analytique du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

Donc, si $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \times \underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$$

$$=$$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.
- Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Expression analytique du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

Donc, si $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \times \underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{5x' + y'} \\ \end{pmatrix}$$

$$=$$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.
- Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Expression analytique du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

Donc, si $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \times \underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{5x'+y'} \\ \mathbf{x'+2y'} \end{pmatrix}$$

$$=$$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.
- Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Expression analytique du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

Donc, si $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \times \underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{5x'+y'} \\ \mathbf{x'+2y'} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{5xx'} +$$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{[f_1]}_{\mathcal{E}} & \overrightarrow{[f_2]}_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.
- Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Expression analytique du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

Donc, si $\left[\overrightarrow{u}\right]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\left[\overrightarrow{v}\right]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = {}^t\left[\overrightarrow{u}\right]_{\mathcal{F}} \times \underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) \times \left[\overrightarrow{v}\right]_{\mathcal{F}}$

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{5x'+y'} \\ \mathbf{x'+2y'} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{5xx' + xy' +}$$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{[f_1]}_{\mathcal{E}} & \overrightarrow{[f_2]}_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.
- Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Expression analytique du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

Donc, si $\left[\overrightarrow{u}\right]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\left[\overrightarrow{v}\right]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = {}^t\left[\overrightarrow{u}\right]_{\mathcal{F}} \times \underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) \times \left[\overrightarrow{v}\right]_{\mathcal{F}}$

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{5x'+y'} \\ \mathbf{x'+2y'} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{5xx' + xy' + yx' +}$$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{[f_1]}_{\mathcal{E}} & \overrightarrow{[f_2]}_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.
- Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Expression analytique du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

Donc, si $\left[\overrightarrow{u}\right]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\left[\overrightarrow{v}\right]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = {}^t\left[\overrightarrow{u}\right]_{\mathcal{F}} \times \underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) \times \left[\overrightarrow{v}\right]_{\mathcal{F}}$

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{5x'+y'} \\ \mathbf{x'+2y'} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{5xx'+xy'+yx'+2yy'}$$

Exemple n° 5 :

- $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_{\mathcal{E}} & [\overrightarrow{f_2}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.
- Vérifions : $\underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_1}\cdot\overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2}\cdot\overrightarrow{f_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

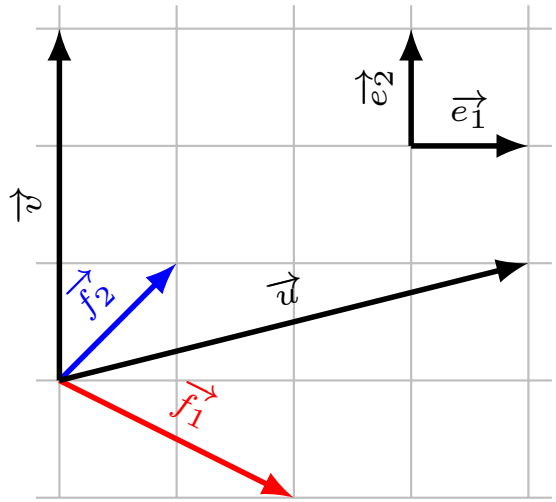
Expression analytique du produit scalaire dans la base $\mathcal{F}$:

Donc, si $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = {}^t[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{F}} \times \underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) \times [\overrightarrow{v}]_{\mathcal{F}}$

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = (x \quad y) \times \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x \quad y) \times \begin{pmatrix} \mathbf{5x'+y'} \\ \mathbf{x'+2y'} \end{pmatrix}$$
$$= \mathbf{5xx'+xy'+yx'+2yy'}$$

Evidemment, lorsque la base n'est pas orthonormée, on calcule le produit scalaire par la voie matricielle.

- Application numérique :



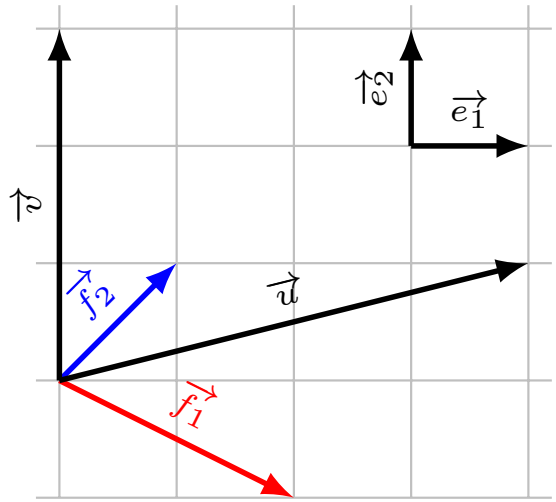
Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}, [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = (\quad) \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$= (\quad) \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} =$$

- Application numérique :



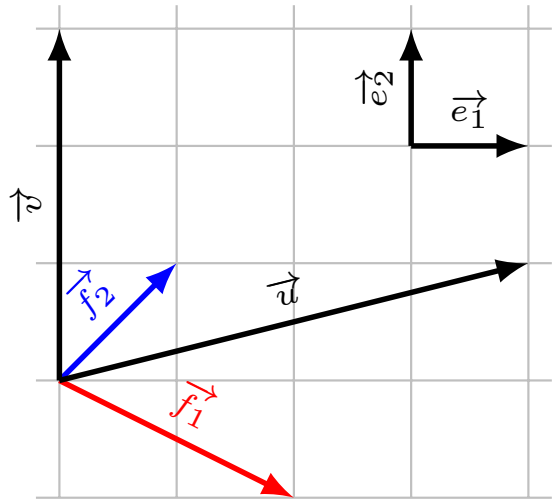
Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = (\quad\quad) \begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix}$$

$$= (\quad\quad) \begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix} =$$

- Application numérique :



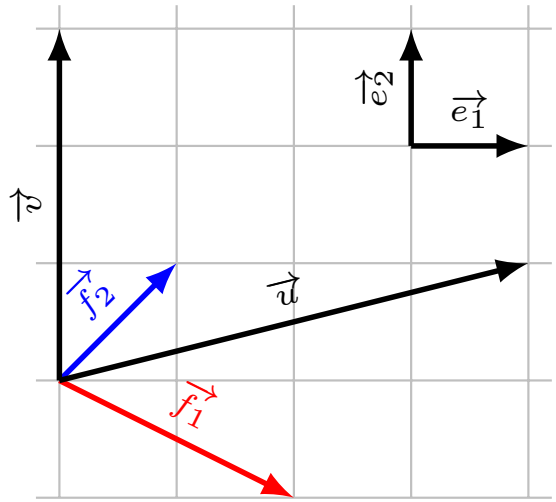
Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = (\quad\quad) \begin{pmatrix} \quad\quad \\ \quad\quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

$$= (\quad\quad) \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} =$$

- Application numérique :



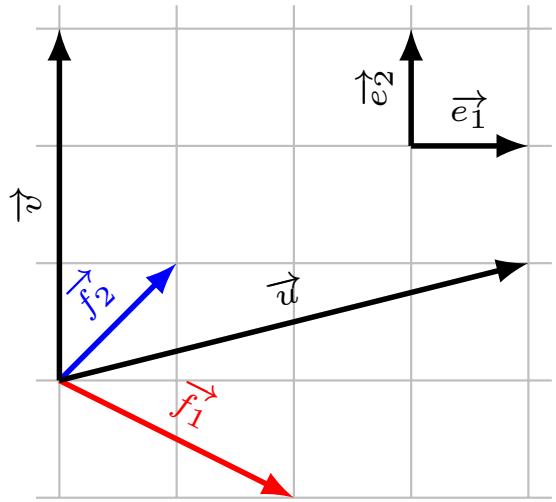
Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} =$$

- Application numérique :



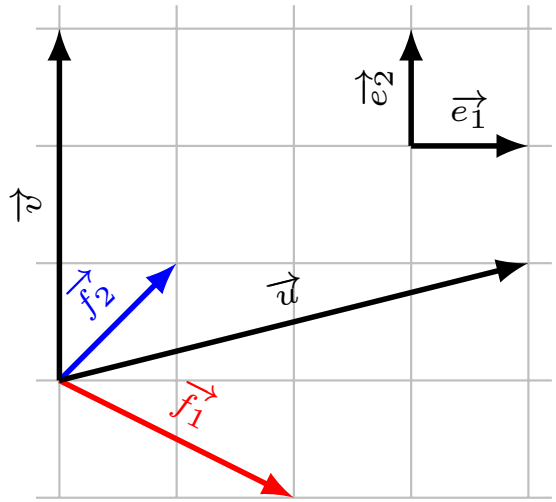
Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \ & \ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix} =$$

- Application numérique :



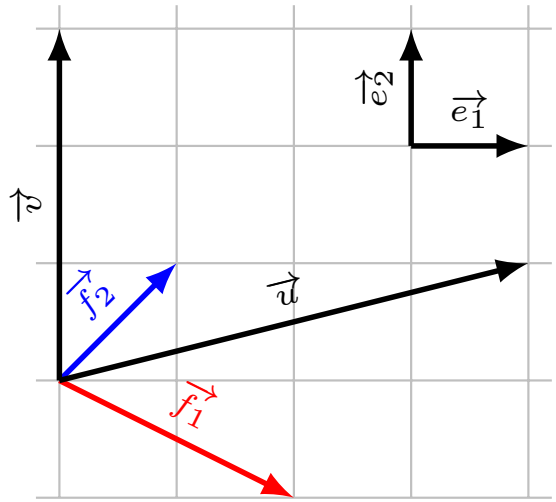
Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} =$$

- Application numérique :



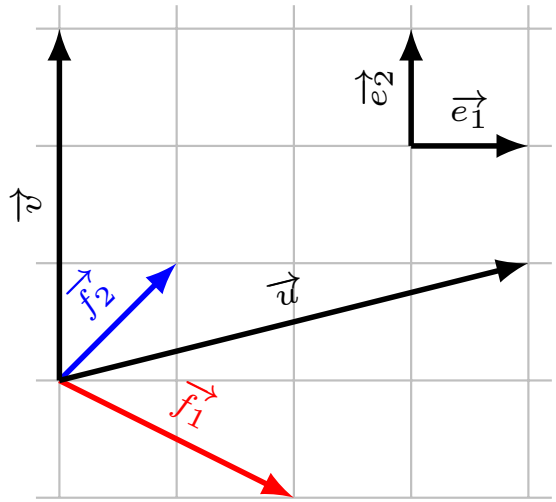
Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

- Application numérique :



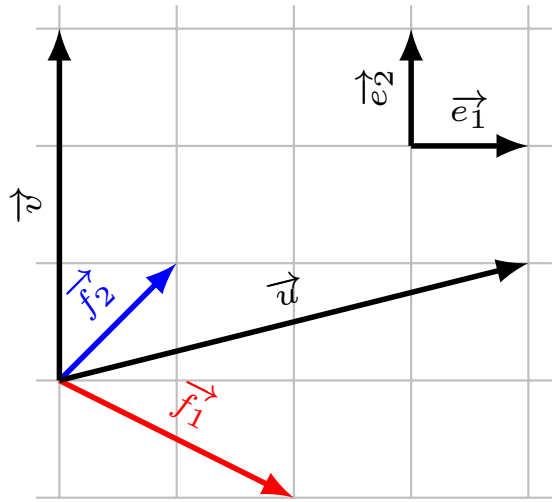
Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 0 + 3 \times 1 = 3$$

- Application numérique :



Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

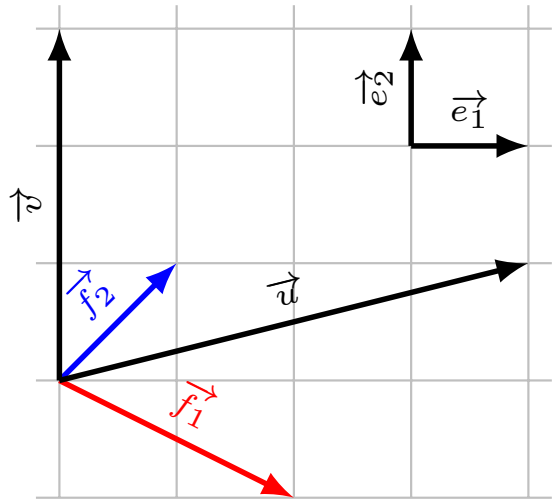
$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 0 + 3 \times 1 = 3$$

Dans la base $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$:

- Application numérique :



Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 0 + 3 \times 1 = 3$$

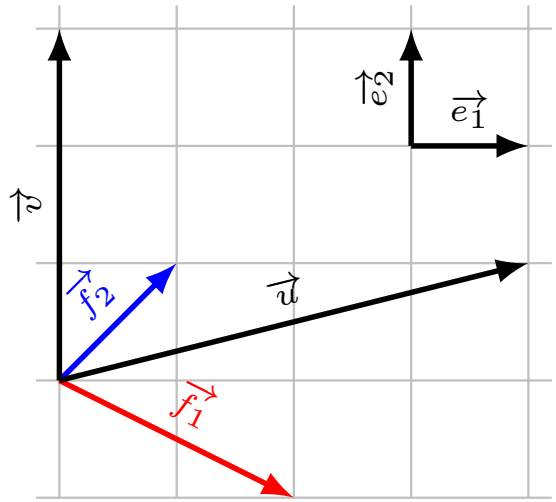
Dans la base $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$:

Sans matrice de passage, on voit que : $[\vec{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$, $[\vec{v}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

$$=$$

- Application numérique :



Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 0 + 3 \times 1 = 3$$

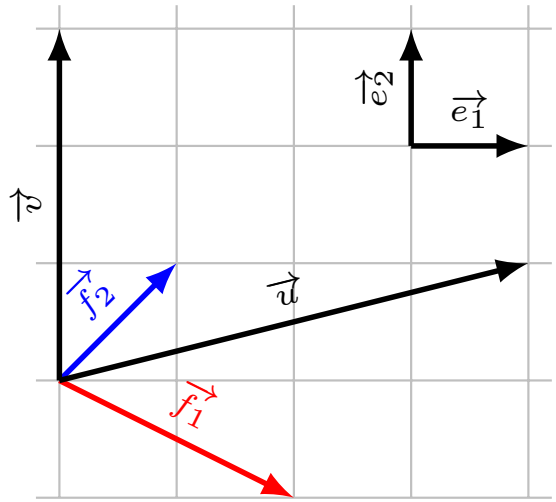
Dans la base $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$:

Sans matrice de passage, on voit que : $[\vec{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $[\vec{v}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

$$=$$

- Application numérique :



Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 0 + 3 \times 1 = 3$$

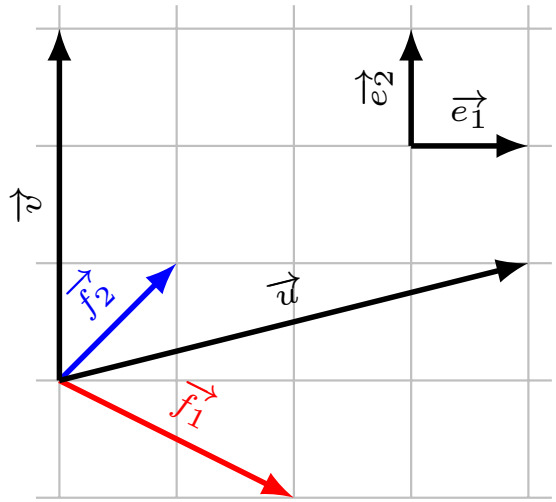
Dans la base $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$:

Sans matrice de passage, on voit que : $[\vec{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $[\vec{v}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$=$$

- Application numérique :



Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 0 + 3 \times 1 = 3$$

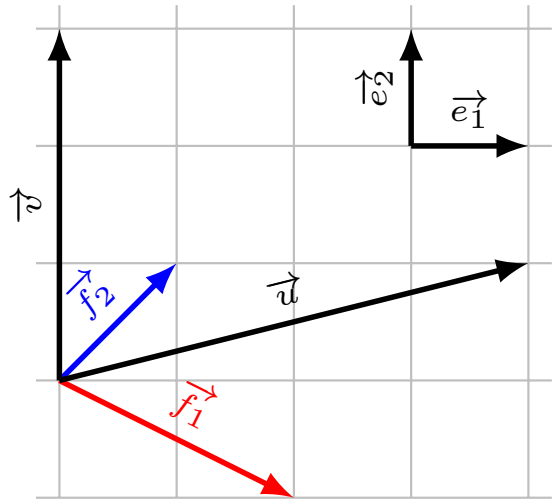
Dans la base $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$:

Sans matrice de passage, on voit que : $[\vec{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ [\vec{v}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -1 \\ \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = (\quad) \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = (\quad) \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

$$=$$

- Application numérique :



Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 0 + 3 \times 1 = 3$$

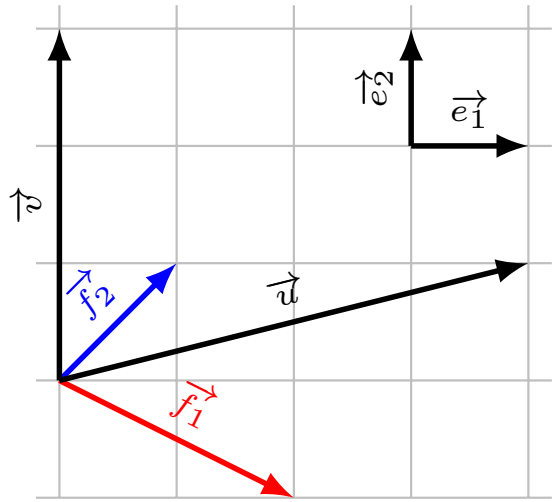
Dans la base $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$:

Sans matrice de passage, on voit que : $[\vec{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [\vec{v}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

$$=$$

- Application numérique :



Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 0 + 3 \times 1 = 3$$

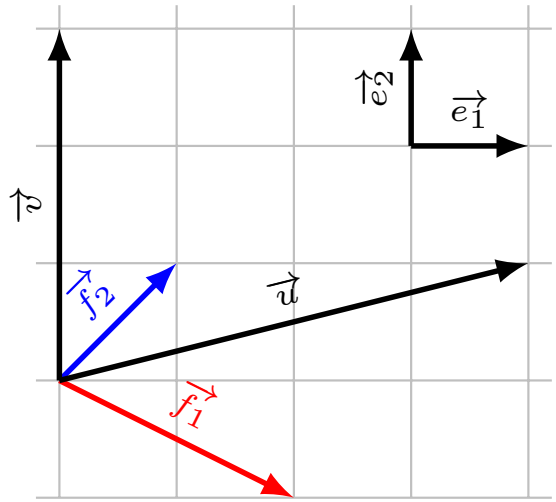
Dans la base $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$:

Sans matrice de passage, on voit que : $[\vec{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $[\vec{v}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

$$=$$

- Application numérique :



Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 0 + 3 \times 1 = 3$$

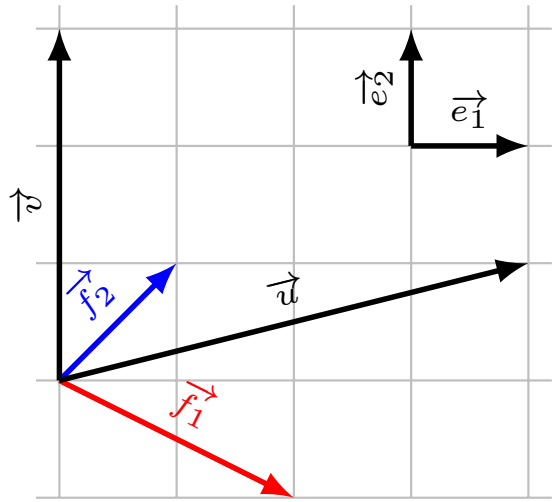
Dans la base $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$:

Sans matrice de passage, on voit que : $[\vec{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [\vec{v}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

$$=$$

- Application numérique :



Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 0 + 3 \times 1 = 3$$

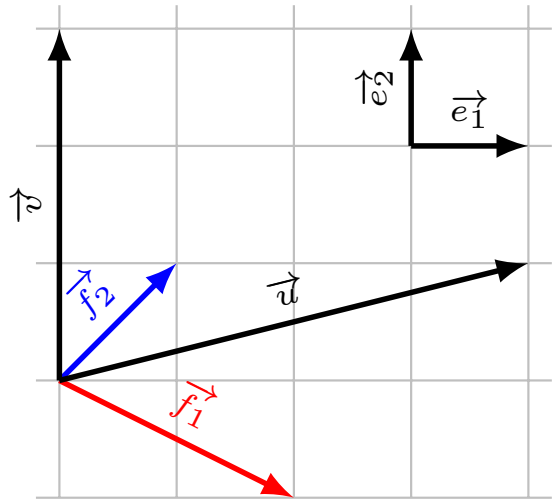
Dans la base $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$:

Sans matrice de passage, on voit que : $[\vec{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [\vec{v}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

$$=$$

- Application numérique :



Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 0 + 3 \times 1 = 3$$

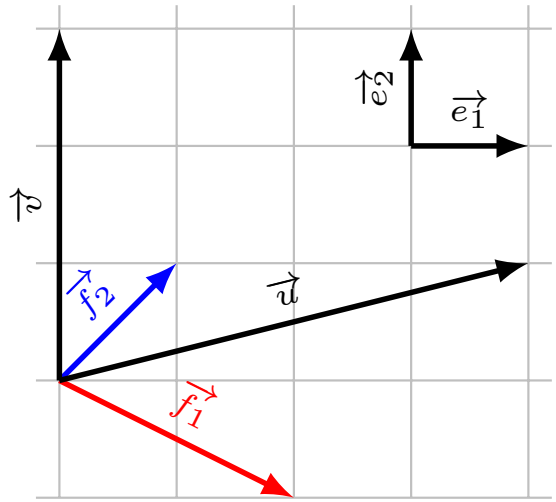
Dans la base $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$:

Sans matrice de passage, on voit que : $[\vec{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [\vec{v}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

- Application numérique :



Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 0 + 3 \times 1 = 3$$

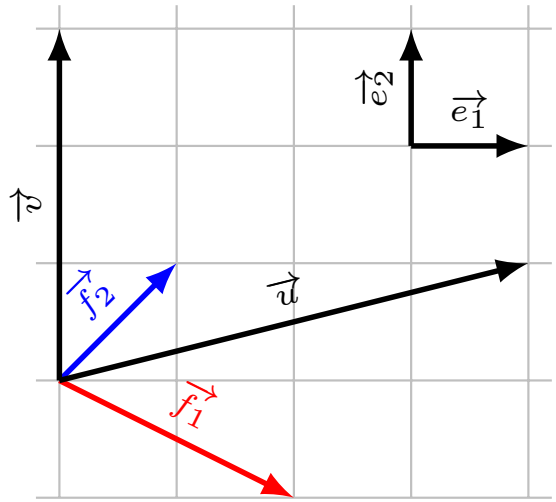
Dans la base $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$:

Sans matrice de passage, on voit que : $[\vec{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [\vec{v}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

- Application numérique :



Dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 0 + 3 \times 1 = 3$$

Dans la base $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$:

Sans matrice de passage, on voit que : $[\vec{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [\vec{v}]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = b(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \times (-3) + 2 \times 3 = 3$$



Théorème

Etant donnés un espace vectoriel E de dimension fini, muni de deux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, et une forme bilinéaire b :

$$\underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(b) = {}^{t}\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b)\ P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$$



Théorème

Etant donnés un espace vectoriel E de dimension fini, muni de deux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, et une forme bilinéaire b :

$$\underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) = {}^{t}\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) \underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b)\ P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$$



Remarque

Il n'est pas nécessaire d'inverser la matrice de passage.



Théorème

Etant donnés un espace vectoriel E de dimension fini, muni de deux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, et une forme bilinéaire b :

$$\underset{\mathcal{F}}{\text{mat}}(b) = {}^{t}\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right) \underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b)\ P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$$



Remarque

Il n'est pas nécessaire d'inverser la matrice de passage.



Définition:

Etant donnés un espace vectoriel E, on dit qu'une forme linéaire est symétrique si et seulement si pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace vectoriel E, on a $b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = b(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$

En dimension finie, cela revient à dire que la matrice de b dans n'importe qu'elle base est **symétrique**.

Considérons une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, et notons (e^1, e^2) sa base duale :

$$\begin{cases} e^1(\overrightarrow{e_1}) = 1 \\ e^1(\overrightarrow{e_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^2(\overrightarrow{e_1}) = 0 \\ e^2(\overrightarrow{e_2}) = 1 \end{cases}.$$

Considérons une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, et notons (e^1, e^2) sa base duale :

$$\begin{cases} e^1(\overrightarrow{e_1}) = 1 \\ e^1(\overrightarrow{e_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^2(\overrightarrow{e_1}) = 0 \\ e^2(\overrightarrow{e_2}) = 1 \end{cases}.$$

Etant donné $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a les formes bilinéaires suivantes :

- $(e^1 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \ldots\ldots$
- $(e^2 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \ldots\ldots$
- $(e^1 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \ldots\ldots$
- $(e^2 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \ldots\ldots$

Considérons une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, et notons (e^1, e^2) sa base duale :

$$\begin{cases} e^1(\overrightarrow{e_1}) = 1 \\ e^1(\overrightarrow{e_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^2(\overrightarrow{e_1}) = 0 \\ e^2(\overrightarrow{e_2}) = 1 \end{cases}.$$

Etant donné $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a les formes bilinéaires suivantes :

- $(e^1 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times x'}$
- $(e^2 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \ldots\ldots$

- $(e^1 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \ldots\ldots$
- $(e^2 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \ldots\ldots$

Considérons une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, et notons (e^1, e^2) sa base duale :

$$\begin{cases} e^1(\overrightarrow{e_1}) = 1 \\ e^1(\overrightarrow{e_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^2(\overrightarrow{e_1}) = 0 \\ e^2(\overrightarrow{e_2}) = 1 \end{cases}.$$

Etant donné $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a les formes bilinéaires suivantes :

- $(e^1 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times x'}$
- $(e^2 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times x'}$

- $(e^1 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \ldots\ldots$
- $(e^2 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \ldots\ldots$

Considérons une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, et notons (e^1, e^2) sa base duale :

$$\begin{cases} e^1(\overrightarrow{e_1}) = 1 \\ e^1(\overrightarrow{e_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^2(\overrightarrow{e_1}) = 0 \\ e^2(\overrightarrow{e_2}) = 1 \end{cases}.$$

Etant donné $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a les formes bilinéaires suivantes :

- $(e^1 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times x'}$
- $(e^2 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times x'}$

- $(e^1 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times y'}$
- $(e^2 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \ldots\ldots$

Considérons une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, et notons (e^1, e^2) sa base duale :

$$\begin{cases} e^1(\overrightarrow{e_1}) = 1 \\ e^1(\overrightarrow{e_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^2(\overrightarrow{e_1}) = 0 \\ e^2(\overrightarrow{e_2}) = 1 \end{cases}.$$

Etant donné $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a les formes bilinéaires suivantes :

- $(e^1 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times x'}$
- $(e^2 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times x'}$
- $(e^1 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times y'}$
- $(e^2 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times y'}$

Considérons une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, et notons (e^1, e^2) sa base duale :

$$\begin{cases} e^1(\overrightarrow{e_1}) = 1 \\ e^1(\overrightarrow{e_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^2(\overrightarrow{e_1}) = 0 \\ e^2(\overrightarrow{e_2}) = 1 \end{cases}.$$

Etant donné $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a les formes bilinéaires suivantes :

- $(e^1 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times x'}$
- $(e^2 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times x'}$
- $(e^1 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times y'}$
- $(e^2 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times y'}$

Ainsi, si la base $\mathcal{E}$ est orthonormée, la forme bilinéaire produit scalaire s'écrit :

Considérons une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, et notons (e^1, e^2) sa base duale :

$$\begin{cases} e^1(\overrightarrow{e_1}) = 1 \\ e^1(\overrightarrow{e_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^2(\overrightarrow{e_1}) = 0 \\ e^2(\overrightarrow{e_2}) = 1 \end{cases}.$$

Etant donné $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a les formes bilinéaires suivantes :

- $(e^1 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times x'}$
- $(e^2 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times x'}$
- $(e^1 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times y'}$
- $(e^2 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times y'}$

Ainsi, si la base $\mathcal{E}$ est orthonormée, la forme bilinéaire produit scalaire s'écrit : $\boldsymbol{e^1 \otimes e^1 +}$

Considérons une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, et notons (e^1, e^2) sa base duale :

$$\begin{cases} e^1(\overrightarrow{e_1}) = 1 \\ e^1(\overrightarrow{e_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^2(\overrightarrow{e_1}) = 0 \\ e^2(\overrightarrow{e_2}) = 1 \end{cases}.$$

Etant donné $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a les formes bilinéaires suivantes :

- $(e^1 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times x'}$
- $(e^2 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times x'}$
- $(e^1 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times y'}$
- $(e^2 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times y'}$

Ainsi, si la base $\mathcal{E}$ est orthonormée, la forme bilinéaire produit scalaire s'écrit : $\boldsymbol{e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2}$.

Considérons une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, et notons (e^1, e^2) sa base duale :

$$\begin{cases} e^1(\overrightarrow{e_1}) = 1 \\ e^1(\overrightarrow{e_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^2(\overrightarrow{e_1}) = 0 \\ e^2(\overrightarrow{e_2}) = 1 \end{cases}.$$

Etant donné $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a les formes bilinéaires suivantes :

- $(e^1 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times x'}$
- $(e^2 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times x'}$
- $(e^1 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times y'}$
- $(e^2 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times y'}$

Ainsi, si la base $\mathcal{E}$ est orthonormée, la forme bilinéaire produit scalaire s'écrit : $\boldsymbol{e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2}$.

Pour une forme bilinéaire b dont la matrice est $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a :

Considérons une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, et notons (e^1, e^2) sa base duale :

$$\begin{cases} e^1(\overrightarrow{e_1}) = 1 \\ e^1(\overrightarrow{e_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^2(\overrightarrow{e_1}) = 0 \\ e^2(\overrightarrow{e_2}) = 1 \end{cases}.$$

Etant donné $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a les formes bilinéaires suivantes :

- $(e^1 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times x'}$
- $(e^2 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times x'}$
- $(e^1 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times y'}$
- $(e^2 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times y'}$

Ainsi, si la base $\mathcal{E}$ est orthonormée, la forme bilinéaire produit scalaire s'écrit : $\boldsymbol{e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2}$.

Pour une forme bilinéaire b dont la matrice est $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a :

$$b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} =$$

Considérons une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, et notons (e^1, e^2) sa base duale :

$$\begin{cases} e^1(\overrightarrow{e_1}) = 1 \\ e^1(\overrightarrow{e_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^2(\overrightarrow{e_1}) = 0 \\ e^2(\overrightarrow{e_2}) = 1 \end{cases}.$$

Etant donné $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a les formes bilinéaires suivantes :

- $(e^1 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times x'}$
- $(e^2 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times x'}$
- $(e^1 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times y'}$
- $(e^2 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times y'}$

Ainsi, si la base $\mathcal{E}$ est orthonormée, la forme bilinéaire produit scalaire s'écrit : $\boldsymbol{e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2}$.

Pour une forme bilinéaire b dont la matrice est $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a :

$$b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{ax' + by'} \\ \end{pmatrix} =$$

Considérons une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, et notons (e^1, e^2) sa base duale :

$$\begin{cases} e^1(\overrightarrow{e_1}) = 1 \\ e^1(\overrightarrow{e_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^2(\overrightarrow{e_1}) = 0 \\ e^2(\overrightarrow{e_2}) = 1 \end{cases}.$$

Etant donné $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a les formes bilinéaires suivantes :

- $(e^1 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times x'}$
- $(e^2 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times x'}$
- $(e^1 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times y'}$
- $(e^2 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times y'}$

Ainsi, si la base $\mathcal{E}$ est orthonormée, la forme bilinéaire produit scalaire s'écrit : $\boldsymbol{e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2}$.

Pour une forme bilinéaire b dont la matrice est $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a :

$$b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{ax' + by'} \\ \boldsymbol{cx' + dy'} \end{pmatrix} =$$

Considérons une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, et notons (e^1, e^2) sa base duale :

$$\begin{cases} e^1(\overrightarrow{e_1}) = 1 \\ e^1(\overrightarrow{e_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^2(\overrightarrow{e_1}) = 0 \\ e^2(\overrightarrow{e_2}) = 1 \end{cases}.$$

Etant donné $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a les formes bilinéaires suivantes :

- $(e^1 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times x'}$
- $(e^2 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times x'}$
- $(e^1 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times y'}$
- $(e^2 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times y'}$

Ainsi, si la base $\mathcal{E}$ est orthonormée, la forme bilinéaire produit scalaire s'écrit : $\boldsymbol{e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2}$.

Pour une forme bilinéaire b dont la matrice est $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a :

$$b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{ax' + by'} \\ \boldsymbol{cx' + dy'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{axx' + bxy' + cyx' + dyy'}$$

Considérons une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, et notons (e^1, e^2) sa base duale :

$$\begin{cases} e^1(\overrightarrow{e_1}) = 1 \\ e^1(\overrightarrow{e_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^2(\overrightarrow{e_1}) = 0 \\ e^2(\overrightarrow{e_2}) = 1 \end{cases}.$$

Etant donné $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a les formes bilinéaires suivantes :

- $(e^1 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times x'}$
- $(e^2 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times x'}$
- $(e^1 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times y'}$
- $(e^2 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times y'}$

Ainsi, si la base $\mathcal{E}$ est orthonormée, la forme bilinéaire produit scalaire s'écrit : $\boldsymbol{e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2}$.

Pour une forme bilinéaire b dont la matrice est $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a :

$$b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{ax' + by'} \\ \boldsymbol{cx' + dy'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{axx' + bxy' + cyx' + dyy'}$$

On a donc $b =$

Considérons une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, et notons (e^1, e^2) sa base duale :

$$\begin{cases} e^1(\overrightarrow{e_1}) = 1 \\ e^1(\overrightarrow{e_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^2(\overrightarrow{e_1}) = 0 \\ e^2(\overrightarrow{e_2}) = 1 \end{cases}.$$

Etant donné $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a les formes bilinéaires suivantes :

- $(e^1 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times x'}$
- $(e^2 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times x'}$
- $(e^1 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times y'}$
- $(e^2 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times y'}$

Ainsi, si la base $\mathcal{E}$ est orthonormée, la forme bilinéaire produit scalaire s'écrit : $\boldsymbol{e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2}$.

Pour une forme bilinéaire b dont la matrice est $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a :

$$b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{ax' + by'} \\ \boldsymbol{cx' + dy'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{axx' + bxy' + cyx' + dyy'}$$

On a donc $b = \boldsymbol{a\,(e^1 \otimes e^1)} +$

Considérons une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, et notons (e^1, e^2) sa base duale :

$$\begin{cases} e^1(\overrightarrow{e_1}) = 1 \\ e^1(\overrightarrow{e_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^2(\overrightarrow{e_1}) = 0 \\ e^2(\overrightarrow{e_2}) = 1 \end{cases}.$$

Etant donné $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a les formes bilinéaires suivantes :

- $(e^1 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times x'}$
- $(e^2 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times x'}$
- $(e^1 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times y'}$
- $(e^2 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times y'}$

Ainsi, si la base $\mathcal{E}$ est orthonormée, la forme bilinéaire produit scalaire s'écrit : $\boldsymbol{e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2}$.

Pour une forme bilinéaire b dont la matrice est $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a :

$$b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{ax' + by'} \\ \boldsymbol{cx' + dy'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{axx' + bxy' + cyx' + dyy'}$$

On a donc $b = \boldsymbol{a\,(e^1 \otimes e^1) + b\,(e^1 \otimes e^2) +}$

Considérons une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, et notons (e^1, e^2) sa base duale :

$$\begin{cases} e^1(\overrightarrow{e_1}) = 1 \\ e^1(\overrightarrow{e_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^2(\overrightarrow{e_1}) = 0 \\ e^2(\overrightarrow{e_2}) = 1 \end{cases}.$$

Etant donné $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a les formes bilinéaires suivantes :

- $(e^1 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times x'}$
- $(e^2 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times x'}$
- $(e^1 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times y'}$
- $(e^2 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times y'}$

Ainsi, si la base $\mathcal{E}$ est orthonormée, la forme bilinéaire produit scalaire s'écrit : $\boldsymbol{e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2}$.

Pour une forme bilinéaire b dont la matrice est $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a :

$$b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{ax' + by'} \\ \boldsymbol{cx' + dy'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{axx' + bxy' + cyx' + dyy'}$$

On a donc $b = \boldsymbol{a\,(e^1 \otimes e^1) + b\,(e^1 \otimes e^2) + c\,(e^2 \otimes e^1) +}$

Considérons une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, et notons (e^1, e^2) sa base duale :

$$\begin{cases} e^1(\overrightarrow{e_1}) = 1 \\ e^1(\overrightarrow{e_2}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e^2(\overrightarrow{e_1}) = 0 \\ e^2(\overrightarrow{e_2}) = 1 \end{cases}.$$

Etant donné $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $[\overrightarrow{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a les formes bilinéaires suivantes :

- $(e^1 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times x'}$
- $(e^2 \otimes e^1)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times x'}$
- $(e^1 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{x \times y'}$
- $(e^2 \otimes e^2)(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \boldsymbol{y \times y'}$

Ainsi, si la base $\mathcal{E}$ est orthonormée, la forme bilinéaire produit scalaire s'écrit : $\boldsymbol{e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2}$.

Pour une forme bilinéaire b dont la matrice est $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a :

$$b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{ax' + by'} \\ \boldsymbol{cx' + dy'} \end{pmatrix} = \boldsymbol{axx' + bxy' + cyx' + dyy'}$$

On a donc $b = \boldsymbol{a\,(e^1 \otimes e^1) + b\,(e^1 \otimes e^2) + c\,(e^2 \otimes e^1) + d\,(e^2 \otimes e^2)}$

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2 y + y^3$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2 y + y^3$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2y + y^3$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2y + y^3$ on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

et $\mathbf{d^2 f}(x,y) = \ldots\ \mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \ldots\ \mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \ldots\ \mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \ldots\ \mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2y + y^3$ on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

et $\mathbf{d^2 f}(x,y) = \mathbf{2y}\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \ldots\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \ldots\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \ldots\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2y + y^3$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

et $\mathbf{d^2 f}(x,y) = \mathbf{2y\,dx\otimes dx + 2x\,dx\otimes dy} + \ldots\ \mathbf{dy\otimes dx} + \ldots\ \mathbf{dy\otimes dy}$

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2y + y^3$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

et $\mathbf{d^2 f}(x,y) = \mathbf{2y\,dx\otimes dx + 2x\,dx\otimes dy + 2x\,dy\otimes dx + \ldots\, dy\otimes dy}$

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2y + y^3$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

et $\mathbf{d^2 f}(x,y) = \mathbf{2y\,dx\otimes dx + 2x\,dx\otimes dy + 2x\,dy\otimes dx + 6y\,dy\otimes dy}$

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2y + y^3$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

et $\mathbf{d^2 f}(x,y) = \mathbf{2y\,dx\otimes dx + 2x\,dx\otimes dy + 2x\,dy\otimes dx + 6y\,dy\otimes dy}$

$$= \mathbf{2y\,e^1\otimes e^1 + 2x\,e^1\otimes e^2 + 2x\,e^2\otimes e^1 + 6y\,e^2\otimes e^2}$$

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2y + y^3$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

et $\mathbf{d^2 f}(x,y) = \mathbf{2y\,dx\otimes dx + 2x\,dx\otimes dy + 2x\,dy\otimes dx + 6y\,dy\otimes dy}$

$$= \mathbf{2y\,e^1\otimes e^1 + 2x\,e^1\otimes e^2 + 2x\,e^2\otimes e^1 + 6y\,e^2\otimes e^2}$$

Ainsi, $\mathbf{d^2 f}(1,3) = \ldots\,\mathbf{e^1\otimes e^1} + \ldots\,\mathbf{e^1\otimes e^2} + \ldots\,\mathbf{e^2\otimes e^1} + \ldots\,\mathbf{e^2\otimes e^2}$ est une forme bilinéaire,

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2y + y^3$ on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

et $\mathbf{d^2 f}(x,y) = \mathbf{2y\,dx\otimes dx + 2x\,dx\otimes dy + 2x\,dy\otimes dx + 6y\,dy\otimes dy}$

$$= \mathbf{2y\,e^1\otimes e^1 + 2x\,e^1\otimes e^2 + 2x\,e^2\otimes e^1 + 6y\,e^2\otimes e^2}$$

Ainsi, $\mathbf{d^2 f}(1,3) = \mathbf{6\,e^1\otimes e^1 + \ldots\, e^1\otimes e^2 + \ldots\, e^2\otimes e^1 + \ldots\, e^2\otimes e^2}$ est une forme bilinéaire,

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2y + y^3$ on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

et $\mathbf{d^2 f}(x,y) = \mathbf{2y\,dx\otimes dx + 2x\,dx\otimes dy + 2x\,dy\otimes dx + 6y\,dy\otimes dy}$

$$= \mathbf{2y\,e^1\otimes e^1 + 2x\,e^1\otimes e^2 + 2x\,e^2\otimes e^1 + 6y\,e^2\otimes e^2}$$

Ainsi, $\mathbf{d^2 f}(1,3) = \mathbf{6\,e^1\otimes e^1 + 2\,e^1\otimes e^2 + \ldots\ e^2\otimes e^1 + \ldots\ e^2\otimes e^2}$ est une forme bilinéaire,

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2 y + y^3$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

et $\mathbf{d^2 f}(x,y) = \mathbf{2y\,dx\otimes dx + 2x\,dx\otimes dy + 2x\,dy\otimes dx + 6y\,dy\otimes dy}$

$$= \mathbf{2y\,e^1\otimes e^1 + 2x\,e^1\otimes e^2 + 2x\,e^2\otimes e^1 + 6y\,e^2\otimes e^2}$$

Ainsi, $\mathbf{d^2 f}(1,3) = \mathbf{6\,e^1\otimes e^1 + 2\,e^1\otimes e^2 + 2\,e^2\otimes e^1 + \ldots\ e^2\otimes e^2}$ est une forme bilinéaire,

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2y + y^3$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

et $\mathbf{d^2 f}(x,y) = \mathbf{2y\,dx\otimes dx + 2x\,dx\otimes dy + 2x\,dy\otimes dx + 6y\,dy\otimes dy}$

$$= \mathbf{2y\,e^1\otimes e^1 + 2x\,e^1\otimes e^2 + 2x\,e^2\otimes e^1 + 6y\,e^2\otimes e^2}$$

Ainsi, $\mathbf{d^2 f}(1,3) = \mathbf{6\,e^1\otimes e^1 + 2\,e^1\otimes e^2 + 2\,e^2\otimes e^1 + 18\,e^2\otimes e^2}$ est une forme bilinéaire,

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2 y + y^3$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

et $\mathbf{d^2 f}(x,y) = \mathbf{2y\,dx\otimes dx + 2x\,dx\otimes dy + 2x\,dy\otimes dx + 6y\,dy\otimes dy}$

$$= \mathbf{2y\,e^1\otimes e^1 + 2x\,e^1\otimes e^2 + 2x\,e^2\otimes e^1 + 6y\,e^2\otimes e^2}$$

Ainsi, $\mathbf{d^2 f}(1,3) = \mathbf{6\,e^1\otimes e^1 + 2\,e^1\otimes e^2 + 2\,e^2\otimes e^1 + 18\,e^2\otimes e^2}$ est une forme bilinéaire,

et $\mathbf{d^2 f}(1,3)\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{h}\\ \boldsymbol{k}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\boldsymbol{h}\\ \boldsymbol{k}\end{pmatrix}\right] = \mathbf{6\ldots + 2\ldots + 2\ldots + 18\ldots}$

$=$

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2 y + y^3$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

et $\mathbf{d^2 f}(x,y) = \mathbf{2y\,dx\otimes dx + 2x\,dx\otimes dy + 2x\,dy\otimes dx + 6y\,dy\otimes dy}$

$$= \mathbf{2y\,e^1\otimes e^1 + 2x\,e^1\otimes e^2 + 2x\,e^2\otimes e^1 + 6y\,e^2\otimes e^2}$$

Ainsi, $\mathbf{d^2 f}(1,3) = \mathbf{6\,e^1\otimes e^1 + 2\,e^1\otimes e^2 + 2\,e^2\otimes e^1 + 18\,e^2\otimes e^2}$ est une forme bilinéaire,

et $\mathbf{d^2 f}(1,3)\left[\begin{pmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}\right] = \mathbf{6\,h^2 + 2\ldots + 2\ldots + 18\ldots}$

$=$

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2 y + y^3$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

et $\mathbf{d^2 f}(x,y) = \mathbf{2y\,dx\otimes dx + 2x\,dx\otimes dy + 2x\,dy\otimes dx + 6y\,dy\otimes dy}$

$$= \mathbf{2y\,e^1\otimes e^1 + 2x\,e^1\otimes e^2 + 2x\,e^2\otimes e^1 + 6y\,e^2\otimes e^2}$$

Ainsi, $\mathbf{d^2 f}(1,3) = \mathbf{6\,e^1\otimes e^1 + 2\,e^1\otimes e^2 + 2\,e^2\otimes e^1 + 18\,e^2\otimes e^2}$ est une forme bilinéaire,

et $\mathbf{d^2 f}(1,3)\left[\begin{pmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}\right] = \mathbf{6\,h^2 + 2\,hk + 2\,\ldots + 18\,\ldots}$

$=$

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2 y + y^3$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

et $\mathbf{d^2 f}(x,y) = \mathbf{2y\,dx\otimes dx + 2x\,dx\otimes dy + 2x\,dy\otimes dx + 6y\,dy\otimes dy}$

$$= \mathbf{2y\,e^1\otimes e^1 + 2x\,e^1\otimes e^2 + 2x\,e^2\otimes e^1 + 6y\,e^2\otimes e^2}$$

Ainsi, $\mathbf{d^2 f}(1,3) = \mathbf{6\,e^1\otimes e^1 + 2\,e^1\otimes e^2 + 2\,e^2\otimes e^1 + 18\,e^2\otimes e^2}$ est une forme bilinéaire,

et $\mathbf{d^2 f}(1,3)\left[\begin{pmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}\right] = \mathbf{6\,h^2 + 2\,hk + 2\,kh + 18\ldots}$

$=$

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2 y + y^3$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

et $\mathbf{d^2 f}(x,y) = \mathbf{2y\,dx\otimes dx + 2x\,dx\otimes dy + 2x\,dy\otimes dx + 6y\,dy\otimes dy}$

$$= \mathbf{2y\,e^1\otimes e^1 + 2x\,e^1\otimes e^2 + 2x\,e^2\otimes e^1 + 6y\,e^2\otimes e^2}$$

Ainsi, $\mathbf{d^2 f}(1,3) = \mathbf{6\,e^1\otimes e^1 + 2\,e^1\otimes e^2 + 2\,e^2\otimes e^1 + 18\,e^2\otimes e^2}$ est une forme bilinéaire,

et $\mathbf{d^2 f}(1,3)\left[\begin{pmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}\right] = \mathbf{6\,h^2 + 2\,hk + 2\,kh + 18\,k^2}$

$=$

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2 y + y^3$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

et $\mathbf{d^2 f}(x,y) = \mathbf{2y\,dx\otimes dx + 2x\,dx\otimes dy + 2x\,dy\otimes dx + 6y\,dy\otimes dy}$

$$= \mathbf{2y\,e^1\otimes e^1 + 2x\,e^1\otimes e^2 + 2x\,e^2\otimes e^1 + 6y\,e^2\otimes e^2}$$

Ainsi, $\mathbf{d^2 f}(1,3) = \mathbf{6\,e^1\otimes e^1 + 2\,e^1\otimes e^2 + 2\,e^2\otimes e^1 + 18\,e^2\otimes e^2}$ est une forme bilinéaire,

et $\mathbf{d^2 f}(1,3)\left[\begin{pmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}\right] = \mathbf{6\,h^2 + 2\,hk + 2\,kh + 18\,k^2}$

$$= \mathbf{6h^2 + \ldots hk + 18k^2}$$

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2 y + y^3$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

et $\mathbf{d^2 f}(x,y) = \mathbf{2y\,dx\otimes dx + 2x\,dx\otimes dy + 2x\,dy\otimes dx + 6y\,dy\otimes dy}$

$$= \mathbf{2y\,e^1\otimes e^1 + 2x\,e^1\otimes e^2 + 2x\,e^2\otimes e^1 + 6y\,e^2\otimes e^2}$$

Ainsi, $\mathbf{d^2 f}(1,3) = \mathbf{6\,e^1\otimes e^1 + 2\,e^1\otimes e^2 + 2\,e^2\otimes e^1 + 18\,e^2\otimes e^2}$ est une forme bilinéaire,

et $\mathbf{d^2 f}(1,3)\left[\begin{pmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}\right] = \mathbf{6\,h^2 + 2\,hk + 2\,kh + 18\,k^2}$

$$= \mathbf{6h^2 + 4hk + 18k^2}$$

Exemple n° 6 : Les différentielles d'ordre 2 sont des applications qui à chaque point de l'espace associe une forme bilinéaire :

$$\mathbf{d^2 f}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,\mathbf{dx}\otimes\mathbf{dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,\mathbf{dy}\otimes\mathbf{dy}$$

Ainsi pour $f(x,y) = x^2 y + y^3$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathbf{2xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathbf{x^2 + 3y^2}$

et $\mathbf{d^2 f}(x,y) = \mathbf{2y\,dx\otimes dx + 2x\,dx\otimes dy + 2x\,dy\otimes dx + 6y\,dy\otimes dy}$

$$= \mathbf{2y\,e^1\otimes e^1 + 2x\,e^1\otimes e^2 + 2x\,e^2\otimes e^1 + 6y\,e^2\otimes e^2}$$

Ainsi, $\mathbf{d^2 f}(1,3) = \mathbf{6\,e^1\otimes e^1 + 2\,e^1\otimes e^2 + 2\,e^2\otimes e^1 + 18\,e^2\otimes e^2}$ est une forme bilinéaire,

et $\mathbf{d^2 f}(1,3)\left[\begin{pmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix}\right] = \mathbf{6\,h^2 + 2\,hk + 2\,kh + 18\,k^2}$

$= \mathbf{6h^2 + 4hk + 18k^2}$ qui est une forme quadratique.



Pour info

Dans une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'un endomorphisme s'écrit :

$$a\left(\overrightarrow{e_1} \otimes e^1\right) + b\left(\overrightarrow{e_1} \otimes e^2\right) + c\left(\overrightarrow{e_2} \otimes e^1\right) + d\left(\overrightarrow{e_2} \otimes e^2\right)$$



Pour info

Dans une base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'un endomorphisme s'écrit :

$$a\left(\overrightarrow{e_1} \otimes e^1\right) + b\left(\overrightarrow{e_1} \otimes e^2\right) + c\left(\overrightarrow{e_2} \otimes e^1\right) + d\left(\overrightarrow{e_2} \otimes e^2\right)$$

Dans $\mathbb{R}^2$, les endomorphismes sont des tenseurs de type $(1,1)$, et les formes bilinéaires sont des tenseurs de type $(0,2)$.



Définition:

Une forme **quadratique** est un polynôme homogène de degré 2 avec un nombre quelconque de variables. Autrement dit, une forme quadratique est un polynôme en plusieurs indéterminées dont tous les monômes non nuls sont de même degré total égal à 2.



Définition:

Une forme **quadratique** est un polynôme homogène de degré 2 avec un nombre quelconque de variables. Autrement dit, une forme quadratique est un polynôme en plusieurs indéterminées dont tous les monômes non nuls sont de même degré total égal à 2.

Exemple n° 7 :

Polynôme	Forme quadratique
$P(x) = x^2$	
$P(x) = x^2 - 3x$	
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy$	
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy - 8$	
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5xy - yz$	
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5x - yz$	



Définition:

Une forme **quadratique** est un polynôme homogène de degré 2 avec un nombre quelconque de variables. Autrement dit, une forme quadratique est un polynôme en plusieurs indéterminées dont tous les monômes non nuls sont de même degré total égal à 2.

Exemple n° 7 :

Polynôme	Forme quadratique
$P(x) = x^2$	*Oui*
$P(x) = x^2 - 3x$	
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy$	
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy - 8$	
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5xy - yz$	
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5x - yz$	



Définition:

Une forme **quadratique** est un polynôme homogène de degré 2 avec un nombre quelconque de variables. Autrement dit, une forme quadratique est un polynôme en plusieurs indéterminées dont tous les monômes non nuls sont de même degré total égal à 2.

Exemple n° 7 :

Polynôme	Forme quadratique
$P(x) = x^2$	*Oui*
$P(x) = x^2 - 3x$	*Non*
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy$	
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy - 8$	
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5xy - yz$	
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5x - yz$	



Définition:

Une forme **quadratique** est un polynôme homogène de degré 2 avec un nombre quelconque de variables. Autrement dit, une forme quadratique est un polynôme en plusieurs indéterminées dont tous les monômes non nuls sont de même degré total égal à 2.

Exemple n° 7 :

Polynôme	Forme quadratique
$P(x) = x^2$	*Oui*
$P(x) = x^2 - 3x$	*Non*
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy$	*Oui*
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy - 8$	
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5xy - yz$	
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5x - yz$	



Définition:

Une forme **quadratique** est un polynôme homogène de degré 2 avec un nombre quelconque de variables. Autrement dit, une forme quadratique est un polynôme en plusieurs indéterminées dont tous les monômes non nuls sont de même degré total égal à 2.

Exemple n° 7 :

Polynôme	Forme quadratique
$P(x) = x^2$	*Oui*
$P(x) = x^2 - 3x$	*Non*
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy$	*Oui*
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy - 8$	*Non*
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5xy - yz$	
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5x - yz$	



Définition:

Une forme **quadratique** est un polynôme homogène de degré 2 avec un nombre quelconque de variables. Autrement dit, une forme quadratique est un polynôme en plusieurs indéterminées dont tous les monômes non nuls sont de même degré total égal à 2.

Exemple n° 7 :

Polynôme	Forme quadratique
$P(x) = x^2$	*Oui*
$P(x) = x^2 - 3x$	*Non*
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy$	*Oui*
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy - 8$	*Non*
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5xy - yz$	*Oui*
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5x - yz$	



Définition:

Une forme **quadratique** est un polynôme homogène de degré 2 avec un nombre quelconque de variables. Autrement dit, une forme quadratique est un polynôme en plusieurs indéterminées dont tous les monômes non nuls sont de même degré total égal à 2.

Exemple n° 7 :

Polynôme	Forme quadratique
$P(x) = x^2$	*Oui*
$P(x) = x^2 - 3x$	*Non*
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy$	*Oui*
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy - 8$	*Non*
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5xy - yz$	*Oui*
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5x - yz$	*Non*

Polynôme	Forme quadratique
$P(x) = x^2$	*Oui*
$P(x) = x^2 - 3x$	*Non*
$P(x, y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy$	*Oui*
$P(x, y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy - 8$	*Non*
$P(x, y, z) = x^2 - y^2 + 5xy - yz$	*Oui*
$P(x, y, z) = x^2 - y^2 + 5x - yz$	*Non*

Polynôme	Forme quadratique
$P(x) = x^2$	Oui
$P(x) = x^2 - 3x$	Non
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy$	Oui
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy - 8$	Non
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5xy - yz$	Oui
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5x - yz$	Non

La forme générale d'une forme quadratique :

Polynôme	Forme quadratique
$P(x) = x^2$	Oui
$P(x) = x^2 - 3x$	Non
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy$	Oui
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy - 8$	Non
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5xy - yz$	Oui
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5x - yz$	Non

La forme générale d'une forme quadratique :

- à une indéterminée s'écrit : $P(x) =$

Polynôme	Forme quadratique
$P(x) = x^2$	Oui
$P(x) = x^2 - 3x$	Non
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy$	Oui
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy - 8$	Non
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5xy - yz$	Oui
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5x - yz$	Non

La forme générale d'une forme quadratique :

- à une indéterminée s'écrit : $P(x) = \boldsymbol{ax^2}$
- à deux indéterminées s'écrit :

$$Q(x,y) =$$

Polynôme	Forme quadratique
$P(x) = x^2$	Oui
$P(x) = x^2 - 3x$	Non
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy$	Oui
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy - 8$	Non
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5xy - yz$	Oui
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5x - yz$	Non

La forme générale d'une forme quadratique :

- à une indéterminée s'écrit : $P(x) = \boldsymbol{ax^2}$
- à deux indéterminées s'écrit :

  $Q(x,y) = \boldsymbol{ax^2 + by^2 + cxy}$
- à trois indéterminées s'écrit :

  $R(x,y,z) =$

Polynôme	Forme quadratique
$P(x) = x^2$	Oui
$P(x) = x^2 - 3x$	Non
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy$	Oui
$P(x,y) = 3x^2 - 7y^2 + 5xy - 8$	Non
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5xy - yz$	Oui
$P(x,y,z) = x^2 - y^2 + 5x - yz$	Non

La forme générale d'une forme quadratique :

- à une indéterminée s'écrit : $P(x) = \boldsymbol{ax^2}$
- à deux indéterminées s'écrit :

$$Q(x,y) = \boldsymbol{ax^2 + by^2 + cxy}$$

- à trois indéterminées s'écrit :

$$R(x,y,z) = \boldsymbol{ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz}$$

1. Forme quadratique associée à une forme bilinéaire.

1. Forme quadratique associée à une forme bilinéaire.



Théorème

Etant donné une forme bilinéaire b définie sur un espace vectoriel E de dimension finie muni d'une base $\mathcal{E}$, la forme $q(\overrightarrow{u}) = b(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})$ est une forme quadratique sur E.

q est appelée la **forme quadratique associée** à la forme bilinéaire b.

1. Forme quadratique associée à une forme bilinéaire.



Théorème

Etant donné une forme bilinéaire b définie sur un espace vectoriel E de dimension finie muni d'une base $\mathcal{E}$, la forme $q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u})$ est une forme quadratique sur E.

q est appelée la **forme quadratique associée** à la forme bilinéaire b.

Exemple n° 8 :

1. $E = \mathbb{R}^2$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Forme quadratique associée à une forme bilinéaire.



Théorème

Etant donné une forme bilinéaire b définie sur un espace vectoriel E de dimension finie muni d'une base $\mathcal{E}$, la forme $q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u})$ est une forme quadratique sur E.

q est appelée la **forme quadratique associée** à la forme bilinéaire b.

Exemple n° 8 :

1. $E = \mathbb{R}^2$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

1. Forme quadratique associée à une forme bilinéaire.



Théorème

Etant donné une forme bilinéaire b définie sur un espace vectoriel E de dimension finie muni d'une base $\mathcal{E}$, la forme $q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u})$ est une forme quadratique sur E.

q est appelée la **forme quadratique associée** à la forme bilinéaire b.

Exemple n° 8 :

1. $E = \mathbb{R}^2$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x + 5y \\ \end{pmatrix}$$

1. Forme quadratique associée à une forme bilinéaire.



Théorème

Etant donné une forme bilinéaire b définie sur un espace vectoriel E de dimension finie muni d'une base $\mathcal{E}$, la forme $q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u})$ est une forme quadratique sur E.

q est appelée la **forme quadratique associée** à la forme bilinéaire b.

Exemple n° 8 :

1. $E = \mathbb{R}^2$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = (x \quad y) \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \quad y) \begin{pmatrix} -2x + 5y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

1. Forme quadratique associée à une forme bilinéaire.

Théorème

Etant donné une forme bilinéaire b définie sur un espace vectoriel E de dimension finie muni d'une base $\mathcal{E}$, la forme $q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u})$ est une forme quadratique sur E.

q est appelée la **forme quadratique associée** à la forme bilinéaire b.

Exemple n° 8 :

1. $E = \mathbb{R}^2$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x + 5y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{-2x^2 + 5xy + 3yx + 4y^2} =$$

1. Forme quadratique associée à une forme bilinéaire.

Théorème

Etant donné une forme bilinéaire b définie sur un espace vectoriel E de dimension finie muni d'une base $\mathcal{E}$, la forme $q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u})$ est une forme quadratique sur E.

q est appelée la **forme quadratique associée** à la forme bilinéaire b.

Exemple n° 8 :

1. $E = \mathbb{R}^2$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x + 5y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

$$= -2x^2 + 5xy + 3yx + 4y^2 = -2\,x^2 + 8\,xy + 4\,y^2$$

1. $E = \mathbb{R}^2$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x + 5y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{-2x^2 + 5xy + 3yx + 4y^2} = \mathbf{-2}\, x^2 + \mathbf{8}\, xy + \mathbf{4}\, y^2$$

1. $E = \mathbb{R}^2$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x + 5y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{-2x^2 + 5xy + 3yx + 4y^2} = \mathbf{-2}\, x^2 + \mathbf{8}\, xy + \mathbf{4}\, y^2$$

2. $E = \mathbb{R}^3$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x + 5y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{-2x^2 + 5xy + 3yx + 4y^2} = \mathbf{-2}\, x^2 + \mathbf{8}\, xy + \mathbf{4}\, y^2$$

2. $E = \mathbb{R}^3$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. $E = \mathbb{R}^2$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x + 5y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

$$= -2x^2 + 5xy + 3yx + 4y^2 = -2\,x^2 + 8\,xy + 4\,y^2$$

2. $E = \mathbb{R}^3$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

1. $E = \mathbb{R}^2$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x + 5y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

$$= -2x^2 + 5xy + 3yx + 4y^2 = \boxed{-2}\, x^2 + \boxed{8}\, xy + \boxed{4}\, y^2$$

2. $E = \mathbb{R}^3$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ \\ \end{pmatrix}$$

1. $E = \mathbb{R}^2$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x + 5y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

$$= -2x^2 + 5xy + 3yx + 4y^2 = \boxed{-2}\, x^2 + \boxed{8}\, xy + \boxed{4}\, y^2$$

2. $E = \mathbb{R}^3$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ -x + 5y + 7z \\ \end{pmatrix}$$

1. $E = \mathbb{R}^2$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x + 5y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{-2x^2 + 5xy + 3yx + 4y^2} = \mathbf{-2}\, x^2 + \mathbf{8}\, xy + \mathbf{4}\, y^2$$

2. $E = \mathbb{R}^3$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ -x + 5y + 7z \\ 4x - 2y - 6z \end{pmatrix}$$

1. $E = \mathbb{R}^2$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x + 5y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{-2x^2 + 5xy + 3yx + 4y^2} = \mathbf{-2}\, x^2 + \mathbf{8}\, xy + \mathbf{4}\, y^2$$

2. $E = \mathbb{R}^3$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ -x + 5y + 7z \\ 4x - 2y - 6z \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{x^2 + 2xy +}$$

1. $E = \mathbb{R}^2$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x + 5y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{-2x^2 + 5xy + 3yx + 4y^2} = \mathbf{-2}\, x^2 + \mathbf{8}\, xy + \mathbf{4}\, y^2$$

2. $E = \mathbb{R}^3$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ -x + 5y + 7z \\ 4x - 2y - 6z \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{x^2 + 2xy + 3xz - yx + 5y^2 + 7yz +}$$

1. $E = \mathbb{R}^2$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x + 5y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{-2x^2 + 5xy + 3yx + 4y^2} = \mathbf{-2}\, x^2 + \mathbf{8}\, xy + \mathbf{4}\, y^2$$

2. $E = \mathbb{R}^3$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ -x + 5y + 7z \\ 4x - 2y - 6z \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{x^2 + 2xy + 3xz - yx + 5y^2 + 7yz + 4zx - 2zy - 6z^2}$$

1. $E = \mathbb{R}^2$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x + 5y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

$$= -2x^2 + 5xy + 3yx + 4y^2 = \boxed{-2}\, x^2 + \boxed{8}\, xy + \boxed{4}\, y^2$$

2. $E = \mathbb{R}^3$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

$$q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ -x + 5y + 7z \\ 4x - 2y - 6z \end{pmatrix}$$

$$= x^2 + 2xy + 3xz - yx + 5y^2 + 7yz + 4zx - 2zy - 6z^2$$

$$= \boxed{1}\, x^2 + \boxed{5}\, y^2 \boxed{-6}\, z^2 + \boxed{1}\, xy + \boxed{7}\, xz + \boxed{5}\, yz$$

2. $q(\vec{u}) = b(\vec{u}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ -x + 5y + 7z \\ 4x - 2y - 6z \end{pmatrix}$$

$$= x^2 + 2xy + 3xz - yx + 5y^2 + 7yz + 4zx - 2zy - 6z^2$$

$$= 1\,x^2 + 5\,y^2 - 6\,z^2 + 1\,xy + 7\,xz + 5\,yz$$

2. $q(\vec{u}) = b(\vec{u},\vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ -x+5y+7z \\ 4x-2y-6z \end{pmatrix}$$

$$= x^2 + 2xy + 3xz - yx + 5y^2 + 7yz + 4zx - 2zy - 6z^2$$

$$= 1\,x^2 + 5\,y^2 - 6\,z^2 + 1\,xy + 7\,xz + 5\,yz$$

3. $E = \mathbb{R}^4$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$.

$$q(a,b,c,d) = a^2 + b^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

2. $q(\vec{u}) = b(\vec{u},\vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ -x+5y+7z \\ 4x-2y-6z \end{pmatrix}$$

$$= x^2 + 2xy + 3xz - yx + 5y^2 + 7yz + 4zx - 2zy - 6z^2$$

$$= 1\,x^2 + 5\,y^2 - 6\,z^2 + 1\,xy + 7\,xz + 5\,yz$$

3. $E = \mathbb{R}^4$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$.

$$q(a,b,c,d) = 2\,a^2 + 3\,b^2 + 5\,d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

2. $q(\vec{u}) = b(\vec{u},\vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ -x+5y+7z \\ 4x-2y-6z \end{pmatrix}$$

$$= x^2 + 2xy + 3xz - yx + 5y^2 + 7yz + 4zx - 2zy - 6z^2$$

$$= 1\,x^2 + 5\,y^2 - 6\,z^2 + 1\,xy + 7\,xz + 5\,yz$$

3. $E = \mathbb{R}^4$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$.

$$q(a,b,c,d) = 2\,a^2 + 3\,b^2 + 5\,d^2 + 1\,ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

2. $q(\vec{u}) = b(\vec{u},\vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ -x+5y+7z \\ 4x-2y-6z \end{pmatrix}$$

$$= x^2 + 2xy + 3xz - yx + 5y^2 + 7yz + 4zx - 2zy - 6z^2$$

$$= 1\,x^2 + 5\,y^2 - 6\,z^2 + 1\,xy + 7\,xz + 5\,yz$$

3. $E = \mathbb{R}^4$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$.

$$q(a,b,c,d) = 2\,a^2 + 3\,b^2 + 5\,d^2 + 1\,ab + 2\,ac + ad + bc + bd + cd$$

2. $q(\vec{u}) = b(\vec{u},\vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ -x+5y+7z \\ 4x-2y-6z \end{pmatrix}$$

$$= x^2 + 2xy + 3xz - yx + 5y^2 + 7yz + 4zx - 2zy - 6z^2$$

$$= 1\,x^2 + 5\,y^2 - 6\,z^2 + 1\,xy + 7\,xz + 5\,yz$$

3. $E = \mathbb{R}^4$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$.

$$q(a,b,c,d) = 2\,a^2 + 3\,b^2 + 5\,d^2 + 1\,ab + 2\,ac + 6\,ad + bc + bd + cd$$

2. $q(\vec{u}) = b(\vec{u},\vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ -x+5y+7z \\ 4x-2y-6z \end{pmatrix}$$

$$= x^2 + 2xy + 3xz - yx + 5y^2 + 7yz + 4zx - 2zy - 6z^2$$

$$= 1\,x^2 + 5\,y^2 - 6\,z^2 + 1\,xy + 7\,xz + 5\,yz$$

3. $E = \mathbb{R}^4$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$.

$$q(a,b,c,d) = 2\,a^2 + 3\,b^2 + 5\,d^2 + 1\,ab + 2\,ac + 6\,ad + 5\,bc + bd + cd$$

2. $q(\vec{u}) = b(\vec{u},\vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ -x+5y+7z \\ 4x-2y-6z \end{pmatrix}$$

$$= x^2 + 2xy + 3xz - yx + 5y^2 + 7yz + 4zx - 2zy - 6z^2$$

$$= 1\,x^2 + 5\,y^2 - 6\,z^2 + 1\,xy + 7\,xz + 5\,yz$$

3. $E = \mathbb{R}^4$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$.

$$q(a,b,c,d) = 2\,a^2 + 3\,b^2 + 5\,d^2 + 1\,ab + 2\,ac + 6\,ad + 5\,bc + 7\,bd + cd$$

2. $q(\vec{u}) = b(\vec{u},\vec{u}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ -x+5y+7z \\ 4x-2y-6z \end{pmatrix}$$

$$= x^2 + 2xy + 3xz - yx + 5y^2 + 7yz + 4zx - 2zy - 6z^2$$

$$= 1\,x^2 + 5\,y^2 - 6\,z^2 + 1\,xy + 7\,xz + 5\,yz$$

3. $E = \mathbb{R}^4$, $[\vec{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, et $\underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$.

$$q(a,b,c,d) = 2\,a^2 + 3\,b^2 + 5\,d^2 + 1\,ab + 2\,ac + 6\,ad + 5\,bc + 7\,bd + 8cd$$

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ muni d'une base $\mathcal{E}$, on considère le vecteur $\overrightarrow{u}$ défini par $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et la forme quadratique q définie par $q(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ est associée à la forme bilinéaire dont la matrice est :

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ muni d'une base $\mathcal{E}$, on considère le vecteur $\overrightarrow{u}$ défini par $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et la forme quadratique q définie par $q(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ est associée à la forme bilinéaire dont la matrice est :

$$\underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \frac{1}{2}a_{13} & \cdots & \frac{1}{2}a_{1n} \\ \frac{1}{2}a_{21} & a_{22} & \frac{1}{2}a_{23} & \cdots & \frac{1}{2}a_{2n} \\ \frac{1}{2}a_{31} & \frac{1}{2}a_{32} & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2}a_{(n-1)n} \\ \frac{1}{2}a_{n1} & \cdots & \frac{1}{2}a_{n(n-1)} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ muni d'une base $\mathcal{E}$, on considère le vecteur $\overrightarrow{u}$ défini par $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et la forme quadratique q définie par $q(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ est associée à la forme bilinéaire dont la matrice est :

$$\underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \frac{1}{2}a_{13} & \cdots & \frac{1}{2}a_{1n} \\ \frac{1}{2}a_{21} & a_{22} & \frac{1}{2}a_{23} & \cdots & \frac{1}{2}a_{2n} \\ \frac{1}{2}a_{31} & \frac{1}{2}a_{32} & a_{33} & \ddots & \frac{1}{2}a_{(n-1)n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}a_{n1} & \cdots & \frac{1}{2}a_{n(n-1)} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$



Définition:

Cette forme bilinéaire est appelée la **forme polaire** associée à q.

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathcal{E}$, on considère la forme quadratique

$$q(x, y) = x^2 + 8xy - 3y^2.$$

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathcal{E}$, on considère la forme quadratique

$$q(x, y) = x^2 + 8xy - 3y^2.$$

Sa forme polaire est la forme bilinéaire symétrique définie par $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$



Propriété:

La forme polaire est une forme bilinéaire **symétrique.**

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathcal{E}$, on considère la forme quadratique

$$q(x, y) = x^2 + 8xy - 3y^2.$$

Sa forme polaire est la forme bilinéaire symétrique définie par $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -3 \end{pmatrix}$



Propriété:

La forme polaire est une forme bilinéaire **symétrique.**

Exemple n° 9 : Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathcal{E}$, on considère la forme quadratique

$$q(x, y) = x^2 + 8xy - 3y^2.$$

Sa forme polaire est la forme bilinéaire symétrique définie par $\underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$



Propriété:

La forme polaire est une forme bilinéaire **symétrique.**

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} -3 & \\ & 1 \end{pmatrix}$

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice associée à la forme quadratique $Q(x,y,z) = 4xy$ est

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice associée à la forme quadratique $Q(x,y,z) = 4xy$ est

$$\begin{pmatrix} & \mathbf{2} & \\ \mathbf{2} & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice associée à la forme quadratique $Q(x,y,z) = 4xy - 2xz$ est

$$\begin{pmatrix} & \mathbf{2} & \\ \mathbf{2} & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice associée à la forme quadratique $Q(x,y,z) = 4xy - 2xz$ est

$$\begin{pmatrix} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & & \\ \mathbf{-1} & & \end{pmatrix}$$

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice associée à la forme quadratique $Q(x,y,z) = 4xy - 2xz - 3y^2 +$ est

$$\begin{pmatrix} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & & \\ \mathbf{-1} & & \end{pmatrix}$$

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice associée à la forme quadratique $Q(x,y,z) = 4xy - 2xz - 3y^2 +$ est

$$\begin{pmatrix} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \\ \mathbf{-1} & & \end{pmatrix}$$

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice associée à la forme quadratique $Q(x,y,z) = 4xy - 2xz - 3y^2 + 16yz +$ est

$$\begin{pmatrix} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \\ \mathbf{-1} & & \end{pmatrix}$$

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice associée à la forme quadratique $Q(x,y,z) = 4xy - 2xz - 3y^2 + 16yz +$ est

$$\begin{pmatrix} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{8} & \end{pmatrix}$$

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice associée à la forme quadratique $Q(x,y,z) = 4xy - 2xz - 3y^2 + 16yz + 4z^2$ est

$$\begin{pmatrix} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{8} & \end{pmatrix}$$

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice associée à la forme quadratique $Q(x,y,z) = 4xy - 2xz - 3y^2 + 16yz + 4z^2$ est

$$\begin{pmatrix} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice associée à la forme quadratique $Q(x,y,z) = 4xy - 2xz - 3y^2 + 16yz + 4z^2$ est

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice associée à la forme quadratique $Q(x,y,z) = 4xy - 2xz - 3y^2 + 16yz + 4z^2$ est

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

- La forme quadratique associée à la matrice $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ est :

  $Q(a,b,c,d) =$

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice associée à la forme quadratique $Q(x,y,z) = 4xy - 2xz - 3y^2 + 16yz + 4z^2$ est

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

- La forme quadratique associée à la matrice $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ est :

  $Q(a,b,c,d) = \mathbf{7a^2}$

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice associée à la forme quadratique $Q(x,y,z) = 4xy - 2xz - 3y^2 + 16yz + 4z^2$ est

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

- La forme quadratique associée à la matrice $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ est :

  $Q(a,b,c,d) = \mathbf{7a^2 + 3b^2}$

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice associée à la forme quadratique $Q(x,y,z) = 4xy - 2xz - 3y^2 + 16yz + 4z^2$ est

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

- La forme quadratique associée à la matrice $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ est :

$Q(a,b,c,d) = \mathbf{7a^2 + 3b^2 + 2c^2}$

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice associée à la forme quadratique $Q(x,y,z) = 4xy - 2xz - 3y^2 + 16yz + 4z^2$ est

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

- La forme quadratique associée à la matrice $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ est :

$Q(a,b,c,d) = \mathbf{7a^2 + 3b^2 + 2c^2 - 5d^2}$

Exemple n° 10 :

- La matrice associée à la forme quadratique $q(x,y) = -3x^2 + y^2 + 4xy$ est donc $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice associée à la forme quadratique $Q(x,y,z) = 4xy - 2xz - 3y^2 + 16yz + 4z^2$ est

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

- La forme quadratique associée à la matrice $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ est :

$$Q(a,b,c,d) = \mathbf{7a^2 + 3b^2 + 2c^2 - 5d^2}$$



Pour info

Etant donnée une forme quadratique q sur un espace vectoriel E. La forme **polaire** associée à q est la forme bilinéaire b définie par la relation de **polarisation**

$$b(\vec{u},\vec{v}) = \frac{1}{2}\Big[q(\vec{u}+\vec{v}) - q(\vec{u}) - q(\vec{v})\Big].$$

2. Décomposition de Gauss

L'algèbre linéaire nous apprend alors qu'une matrice symétrique est diagonalisable, et que ses valeurs propres sont réelles.

2. Décomposition de Gauss

L'algèbre linéaire nous apprend alors qu'une matrice symétrique est diagonalisable, et que ses valeurs propres sont réelles.



Définition:

Etant donnée, une forme quadratique Q et sa matrice associée M. On appelle **signature** de la forme quadratique Q le couple (p, s) où p est le nombre de valeurs propres strictement positives de M et s de valeurs propres strictement négatives.

2. Décomposition de Gauss

L'algèbre linéaire nous apprend alors qu'une matrice symétrique est diagonalisable, et que ses valeurs propres sont réelles.



Définition:

Etant donnée, une forme quadratique Q et sa matrice associée M. On appelle **signature** de la forme quadratique Q le couple (p, s) où p est le nombre de valeurs propres strictement positives de M et s de valeurs propres strictement négatives.

La décomposition de Gauss permet de trouver une décomposition d'une forme quadratique Q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes f_i :

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{p+s} \lambda_i f_i(x_1, \ldots, x_n)^2$$

2. Décomposition de Gauss

L'algèbre linéaire nous apprend alors qu'une matrice symétrique est diagonalisable, et que ses valeurs propres sont réelles.



Définition:

Etant donnée, une forme quadratique Q et sa matrice associée M. On appelle **signature** de la forme quadratique Q le couple (p, s) où p est le nombre de valeurs propres strictement positives de M et s de valeurs propres strictement négatives.

La décomposition de Gauss permet de trouver une décomposition d'une forme quadratique Q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes f_i :

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{p+s} \lambda_i f_i(x_1, \ldots, x_n)^2$$

où (p, s) est la signature de Q, et $\begin{cases} \lambda_i > 0 \text{ si } 1 \leqslant i \leqslant p \\ \lambda_i < 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Algorithme de décomposition de Gauss.

Considérons la forme quadratique :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$$

- **Premier cas :** il existe un entier i tel que $a_{i,i}$ n'est pas nul.

Algorithme de décomposition de Gauss.

Considérons la forme quadratique :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$$

- **Premier cas :** il existe un entier i tel que $a_{i,i}$ n'est pas nul. On supposera pour fixer les idées qu'il s'agit de $a_{1,1}$ et nous noterons ce coefficient a. On peut alors écrire la forme Q sous la forme :

Algorithme de décomposition de Gauss.

Considérons la forme quadratique :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$$

- **Premier cas :** il existe un entier i tel que $a_{i,i}$ n'est pas nul. On supposera pour fixer les idées qu'il s'agit de $a_{1,1}$ et nous noterons ce coefficient a. On peut alors écrire la forme Q sous la forme :

$$Q(x) = a\Big[x_1^2 + x_1 B(x_2, \ldots, x_n)\Big] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

Algorithme de décomposition de Gauss.

Considérons la forme quadratique :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$$

- **Premier cas :** il existe un entier i tel que $a_{i,i}$ n'est pas nul. On supposera pour fixer les idées qu'il s'agit de $a_{1,1}$ et nous noterons ce coefficient a. On peut alors écrire la forme Q sous la forme :

  $$Q(x) = a\Big[x_1^2 + x_1 B(x_2, \ldots, x_n)\Big] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

  On fait une mise sous forme **canonique** :

Algorithme de décomposition de Gauss.

Considérons la forme quadratique :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$$

- **Premier cas :** il existe un entier i tel que $a_{i,i}$ n'est pas nul. On supposera pour fixer les idées qu'il s'agit de $a_{1,1}$ et nous noterons ce coefficient a. On peut alors écrire la forme Q sous la forme :

$$Q(x) = a\Big[x_1^2 + x_1 B(x_2, \ldots, x_n)\Big] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

On fait une mise sous forme **canonique** :

$$Q(x) = a\left[\left(x_1 + \frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2 - \qquad\qquad\qquad\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

Algorithme de décomposition de Gauss.

Considérons la forme quadratique :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$$

- **Premier cas :** il existe un entier i tel que $a_{i,i}$ n'est pas nul. On supposera pour fixer les idées qu'il s'agit de $a_{1,1}$ et nous noterons ce coefficient a. On peut alors écrire la forme Q sous la forme :

$$Q(x) = a\Big[x_1^2 + x_1 B(x_2, \ldots, x_n)\Big] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

On fait une mise sous forme **canonique** :

$$Q(x) = a\left[\left(x_1 + \frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2 - \left(\frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

Algorithme de décomposition de Gauss.

Considérons la forme quadratique :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$$

- **Premier cas :** il existe un entier i tel que $a_{i,i}$ n'est pas nul. On supposera pour fixer les idées qu'il s'agit de $a_{1,1}$ et nous noterons ce coefficient a. On peut alors écrire la forme Q sous la forme :

$$Q(x) = a\Big[x_1^2 + x_1 B(x_2, \ldots, x_n)\Big] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

On fait une mise sous forme **canonique** :

$$Q(x) = a\left[\left(x_1 + \frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2 - \left(\frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

$$Q(x) = a\left(x_1 + \frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2 + C(x_2, \ldots, x_n) - \frac{aB(x_2, \ldots, x_n)^2}{4}$$

Algorithme de décomposition de Gauss.

Considérons la forme quadratique :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$$

- **Premier cas :** il existe un entier i tel que $a_{i,i}$ n'est pas nul. On supposera pour fixer les idées qu'il s'agit de $a_{1,1}$ et nous noterons ce coefficient a. On peut alors écrire la forme Q sous la forme :

$$Q(x) = a\Big[x_1^2 + x_1 B(x_2, \ldots, x_n)\Big] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

On fait une mise sous forme **canonique** :

$$Q(x) = a\left[\left(x_1 + \frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2 - \left(\frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

$$Q(x) = a\left(x_1 + \frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2 + C(x_2, \ldots, x_n) - \frac{aB(x_2, \ldots, x_n)^2}{4}$$

Il suffit alors de réitérer la méthode de Gauss avec $C(x_2, \ldots, x_n) - \dfrac{aB(x_2, \ldots, x_n)^2}{4}$

Algorithme de décomposition de Gauss.

Considérons la forme quadratique : $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j}x_i x_j$

- **Second cas :** tous les $a_{i,i}$ sont nuls. Si Q est identiquement nulle, il n'y a bien sûr rien à faire.

Algorithme de décomposition de Gauss.

Considérons la forme quadratique : $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j}x_i x_j$

- **Second cas :** tous les $a_{i,i}$ sont nuls. Si Q est identiquement nulle, il n'y a bien sûr rien à faire. Sinon, un des $a_{i,j}$, disons $a = a_{1,2}$ est non nul, et on écrit Q sous la forme :

Algorithme de décomposition de Gauss.

Considérons la forme quadratique : $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j}x_i x_j$

- **Second cas :** tous les $a_{i,i}$ sont nuls. Si Q est identiquement nulle, il n'y a bien sûr rien à faire. Sinon, un des $a_{i,j}$, disons $a = a_{1,2}$ est non nul, et on écrit Q sous la forme :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3, \ldots, x_n) + x_2C(x_3, \ldots, x_n)\Big] + D(x_3, \ldots, x_n)$$

où B et C n'ont pas de x_1 ni de x_2.

Algorithme de décomposition de Gauss.

Considérons la forme quadratique : $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j}x_i x_j$

- **Second cas :** tous les $a_{i,i}$ sont nuls. Si Q est identiquement nulle, il n'y a bien sûr rien à faire. Sinon, un des $a_{i,j}$, disons $a = a_{1,2}$ est non nul, et on écrit Q sous la forme :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3, \ldots, x_n) + x_2C(x_3, \ldots, x_n)\Big] + D(x_3, \ldots, x_n)$$

où B et C n'ont pas de x_1 ni de x_2.

$$Q(x) = a\Big[(x_1 + C)(x_2 + B) - \qquad\Big] + D$$

Algorithme de décomposition de Gauss.

Considérons la forme quadratique : $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j}x_i x_j$

- **Second cas :** tous les $a_{i,i}$ sont nuls. Si Q est identiquement nulle, il n'y a bien sûr rien à faire. Sinon, un des $a_{i,j}$, disons $a = a_{1,2}$ est non nul, et on écrit Q sous la forme :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3, \ldots, x_n) + x_2C(x_3, \ldots, x_n)\Big] + D(x_3, \ldots, x_n)$$

où B et C n'ont pas de x_1 ni de x_2.

$$Q(x) = a\Big[(x_1 + C)(x_2 + B) - \boldsymbol{C \times B}\Big] + D$$

Algorithme de décomposition de Gauss.

Considérons la forme quadratique : $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j}x_i x_j$

- **Second cas :** tous les $a_{i,i}$ sont nuls. Si Q est identiquement nulle, il n'y a bien sûr rien à faire. Sinon, un des $a_{i,j}$, disons $a = a_{1,2}$ est non nul, et on écrit Q sous la forme :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3, \ldots, x_n) + x_2C(x_3, \ldots, x_n)\Big] + D(x_3, \ldots, x_n)$$

où B et C n'ont pas de x_1 ni de x_2.

$$Q(x) = a\Big[(x_1 + C)(x_2 + B) - \boldsymbol{C \times B}\Big] + D$$

$$Q(x) = a(x_1 + C)(x_2 + B) + D - aBC$$

Algorithme de décomposition de Gauss.

Considérons la forme quadratique : $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j}x_i x_j$

- **Second cas :** tous les $a_{i,i}$ sont nuls. Si Q est identiquement nulle, il n'y a bien sûr rien à faire. Sinon, un des $a_{i,j}$, disons $a = a_{1,2}$ est non nul, et on écrit Q sous la forme :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3, \ldots, x_n) + x_2C(x_3, \ldots, x_n)\Big] + D(x_3, \ldots, x_n)$$

où B et C n'ont pas de x_1 ni de x_2.

$$Q(x) = a\Big[(x_1 + C)(x_2 + B) - \boldsymbol{C \times B}\Big] + D$$

$$Q(x) = a(x_1 + C)(x_2 + B) + D - aBC$$

Puis, on utilise que $\frac{1}{4}\left[(u+v)^2 - (u-v)^2\right] =$

Algorithme de décomposition de Gauss.

Considérons la forme quadratique : $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{i,j}x_i x_j$

- **Second cas :** tous les $a_{i,i}$ sont nuls. Si Q est identiquement nulle, il n'y a bien sûr rien à faire. Sinon, un des $a_{i,j}$, disons $a = a_{1,2}$ est non nul, et on écrit Q sous la forme :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3, \ldots, x_n) + x_2C(x_3, \ldots, x_n)\Big] + D(x_3, \ldots, x_n)$$

où B et C n'ont pas de x_1 ni de x_2.

$$Q(x) = a\Big[(x_1 + C)(x_2 + B) - \boldsymbol{C \times B}\Big] + D$$

$$Q(x) = a(x_1 + C)(x_2 + B) + D - aBC$$

Puis, on utilise que $\frac{1}{4}\left[(u+v)^2 - (u-v)^2\right] = \boldsymbol{uv}$ pour obtenir :

Algorithme de décomposition de Gauss.

Considérons la forme quadratique : $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} a_{i,j}x_ix_j$

- **Second cas :** tous les $a_{i,i}$ sont nuls. Si Q est identiquement nulle, il n'y a bien sûr rien à faire. Sinon, un des $a_{i,j}$, disons $a = a_{1,2}$ est non nul, et on écrit Q sous la forme :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3,\dots,x_n) + x_2C(x_3,\dots,x_n)\Big] + D(x_3,\dots,x_n)$$

où B et C n'ont pas de x_1 ni de x_2.

$$Q(x) = a\Big[(x_1 + C)(x_2 + B) - \boldsymbol{C \times B}\Big] + D$$

$$Q(x) = a(x_1 + C)(x_2 + B) + D - aBC$$

Puis, on utilise que $\frac{1}{4}\left[(u+v)^2 - (u-v)^2\right] = \boldsymbol{uv}$ pour obtenir :

$$Q(x) = \frac{a}{4}\left[\Big[\underbrace{(x_1 + C)}_{u} + \underbrace{(x_2 + B)}_{v}\Big]^2 - \Big[\underbrace{(x_1 + C)}_{u} - \underbrace{(x_2 + B)}_{v}\Big]^2\right] + D - aBC$$

Algorithme de décomposition de Gauss.

Considérons la forme quadratique : $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} a_{i,j}x_ix_j$

- **Second cas :** tous les $a_{i,i}$ sont nuls. Si Q est identiquement nulle, il n'y a bien sûr rien à faire. Sinon, un des $a_{i,j}$, disons $a = a_{1,2}$ est non nul, et on écrit Q sous la forme :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3,\dots,x_n) + x_2C(x_3,\dots,x_n)\Big] + D(x_3,\dots,x_n)$$

où B et C n'ont pas de x_1 ni de x_2.

$$Q(x) = a\Big[(x_1+C)(x_2+B) - \boldsymbol{C\times B}\Big] + D$$

$$Q(x) = a(x_1+C)(x_2+B) + D - aBC$$

Puis, on utilise que $\frac{1}{4}\left[(u+v)^2-(u-v)^2\right] = \boldsymbol{uv}$ pour obtenir :

$$Q(x) = \frac{a}{4}\left[\Big[\underbrace{(x_1+C)}_{u} + \underbrace{(x_2+B)}_{v}\Big]^2 - \Big[\underbrace{(x_1+C)}_{u} - \underbrace{(x_2+B)}_{v}\Big]^2\right] + D - aBC$$

$$Q(x) = \frac{a}{4}\Big[x_1+x_2+B+C\Big]^2 - \frac{a}{4}\Big[x_1-x_2+C-B\Big]^2 + D - aBC$$

Algorithme de décomposition de Gauss.

Considérons la forme quadratique : $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} a_{i,j}x_ix_j$

- **Second cas :** tous les $a_{i,i}$ sont nuls. Si Q est identiquement nulle, il n'y a bien sûr rien à faire. Sinon, un des $a_{i,j}$, disons $a = a_{1,2}$ est non nul, et on écrit Q sous la forme :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3,\dots,x_n) + x_2C(x_3,\dots,x_n)\Big] + D(x_3,\dots,x_n)$$

où B et C n'ont pas de x_1 ni de x_2.

$$Q(x) = a\Big[(x_1+C)(x_2+B) - \boldsymbol{C\times B}\Big] + D$$

$$Q(x) = a(x_1+C)(x_2+B) + D - aBC$$

Puis, on utilise que $\frac{1}{4}\left[(u+v)^2-(u-v)^2\right] = \boldsymbol{uv}$ pour obtenir :

$$Q(x) = \frac{a}{4}\left[\Big[\underbrace{(x_1+C)}_{u} + \underbrace{(x_2+B)}_{v}\Big]^2 - \Big[\underbrace{(x_1+C)}_{u} - \underbrace{(x_2+B)}_{v}\Big]^2\right] + D - aBC$$

$$Q(x) = \frac{a}{4}\Big[x_1+x_2+B+C\Big]^2 - \frac{a}{4}\Big[x_1-x_2+C-B\Big]^2 + D - aBC$$

Il suffit alors d'itérer la méthode avec la forme quadratique $D - aBC$

Exemple n° 11 :

- Décomposons $A(x) = x^2 + 13y^2 - 8xy$.

Exemple n° 11 :

- Décomposons $A(x) = x^2 + 13y^2 - 8xy$. On est dans le **premier** cas **(mise sous forme canonique)** :

Exemple n° 11 :

- Décomposons $A(x) = x^2 + 13y^2 - 8xy$. On est dans le **premier** cas **(mise sous forme canonique)** :

$A(x) =$

Rappel : $Q(x) = a\left[x_1^2 + x_1 B(x_2, \ldots, x_n)\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$

On fait la mise sous forme **canonique** :

$$Q(x) = a\left[\left(x_1 + \frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2 - \left(\frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

Exemple n° 11 :

- Décomposons $A(x) = x^2 + 13y^2 - 8xy$. On est dans le **premier** cas **(mise sous forme canonique)** :

$$A(x) = \boldsymbol{x^2 + x\underbrace{(-8y)}_{B} + \underbrace{13y^2}_{C} =}$$

Rappel : $Q(x) = a\left[x_1^2 + x_1 B(x_2, \ldots, x_n)\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$

On fait la mise sous forme **canonique** :

$$Q(x) = a\left[\left(x_1 + \frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2 - \left(\frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

Exemple n° 11 :

- Décomposons $A(x) = x^2 + 13y^2 - 8xy$. On est dans le **premier** cas **(mise sous forme canonique)** :

$$A(x) = \boldsymbol{x^2 + x\underbrace{(-8y)}_{B} + \underbrace{13y^2}_{C} = \left[(x-4y)^2 - (4y)^2\right] + 13y^2 =}$$

Rappel : $Q(x) = a\left[x_1^2 + x_1 B(x_2, \ldots, x_n)\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$

On fait la mise sous forme **canonique** :

$$Q(x) = a\left[\left(x_1 + \frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2 - \left(\frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

Exemple n° 11 :

- Décomposons $A(x) = x^2 + 13y^2 - 8xy$. On est dans le **premier** cas **(mise sous forme canonique)** :

$$A(x) = \boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{x}\underbrace{\boldsymbol{(-8y)}}_{\boldsymbol{B}} + \underbrace{\boldsymbol{13y^2}}_{\boldsymbol{C}} = \left[\boldsymbol{(x-4y)^2} - \boldsymbol{(4y)^2}\right] + \boldsymbol{13y^2} = \boldsymbol{(x-4y)^2} - \boldsymbol{3y^2}$$

Rappel : $Q(x) = a\left[x_1^2 + x_1 B(x_2, \ldots, x_n)\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$

On fait la mise sous forme **canonique** :

$$Q(x) = a\left[\left(x_1 + \frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2 - \left(\frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

Exemple n° 11 :

- Décomposons $A(x) = x^2 + 13y^2 - 8xy$. On est dans le **premier** cas **(mise sous forme canonique)** :

$$A(x) = \boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{x}\underbrace{\boldsymbol{(-8y)}}_{\boldsymbol{B}} + \underbrace{\boldsymbol{13y^2}}_{\boldsymbol{C}} = \left[\boldsymbol{(x-4y)^2} - \boldsymbol{(4y)^2}\right] + \boldsymbol{13y^2} = \boldsymbol{(x-4y)^2} - \boldsymbol{3y^2}$$

Rappel : $Q(x) = a\left[x_1^2 + x_1 B(x_2, \ldots, x_n)\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$

On fait la mise sous forme **canonique** :

$$Q(x) = a\left[\left(x_1 + \frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2 - \left(\frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

- Décomposons $B(x) = 2x^2 + 12xy + 23y^2$.

Exemple n° 11 :

- Décomposons $A(x) = x^2 + 13y^2 - 8xy$. On est dans le **premier** cas **(mise sous forme canonique)** :

$$A(x) = \mathbf{x^2} + \mathbf{x}\underbrace{\mathbf{(-8y)}}_{\mathbf{B}} + \underbrace{\mathbf{13y^2}}_{\mathbf{C}} = \left[\mathbf{(x-4y)^2} - \mathbf{(4y)^2}\right] + \mathbf{13y^2} = \mathbf{(x-4y)^2} - \mathbf{3y^2}$$

Rappel : $Q(x) = a\left[x_1^2 + x_1 B(x_2, \ldots, x_n)\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$

On fait la mise sous forme **canonique** :

$$Q(x) = a\left[\left(x_1 + \frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2 - \left(\frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

- Décomposons $B(x) = 2x^2 + 12xy + 23y^2$. On est dans le **premier** cas :

Exemple n° 11 :

- Décomposons $A(x) = x^2 + 13y^2 - 8xy$. On est dans le **premier** cas **(mise sous forme canonique)** :

$$A(x) = \mathbf{x^2} + \mathbf{x}\underbrace{\mathbf{(-8y)}}_{\mathbf{B}} + \underbrace{\mathbf{13y^2}}_{\mathbf{C}} = \left[\mathbf{(x-4y)^2} - \mathbf{(4y)^2}\right] + \mathbf{13y^2} = \mathbf{(x-4y)^2} - \mathbf{3y^2}$$

Rappel : $Q(x) = a\left[x_1^2 + x_1 B(x_2, \ldots, x_n)\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$

On fait la mise sous forme **canonique** :

$$Q(x) = a\left[\left(x_1 + \frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2 - \left(\frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

- Décomposons $B(x) = 2x^2 + 12xy + 23y^2$. On est dans le **premier** cas :

$$B(x) = \mathbf{2x^2} + \mathbf{x}\underbrace{\mathbf{(12y)}}_{\mathbf{B}} + \underbrace{\mathbf{23y^2}}_{\mathbf{C}} =$$

Exemple n° 11 :

- Décomposons $A(x) = x^2 + 13y^2 - 8xy$. On est dans le **premier** cas **(mise sous forme canonique)** :

$$A(x) = \boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{x}\underbrace{\boldsymbol{(-8y)}}_{\boldsymbol{B}} + \underbrace{\boldsymbol{13y^2}}_{\boldsymbol{C}} = \Big[\boldsymbol{(x-4y)^2} - \boldsymbol{(4y)^2}\Big] + \boldsymbol{13y^2} = \boldsymbol{(x-4y)^2} - \boldsymbol{3y^2}$$

Rappel : $Q(x) = a\Big[x_1^2 + x_1 B(x_2, \ldots, x_n)\Big] + C(x_2, \ldots, x_n)$

On fait la mise sous forme **canonique** :

$$Q(x) = a\left[\left(x_1 + \frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2 - \left(\frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

- Décomposons $B(x) = 2x^2 + 12xy + 23y^2$. On est dans le **premier** cas :

$$B(x) = \boldsymbol{2x^2} + \boldsymbol{x}\underbrace{\boldsymbol{(12y)}}_{\boldsymbol{B}} + \underbrace{\boldsymbol{23y^2}}_{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{2}\Big[\boldsymbol{(x+3y)^2} - \boldsymbol{(3y)^2}\Big] + \boldsymbol{23y^2}$$

$$=$$

Exemple n° 11 :

- Décomposons $A(x) = x^2 + 13y^2 - 8xy$. On est dans le **premier** cas **(mise sous forme canonique)** :

$$A(x) = \mathbf{x^2} + \mathbf{x}\underbrace{\mathbf{(-8y)}}_{B} + \underbrace{\mathbf{13y^2}}_{C} = \Big[\mathbf{(x-4y)^2} - \mathbf{(4y)^2}\Big] + \mathbf{13y^2} = \mathbf{(x-4y)^2} - \mathbf{3y^2}$$

Rappel : $Q(x) = a\Big[x_1^2 + x_1 B(x_2, \ldots, x_n)\Big] + C(x_2, \ldots, x_n)$

On fait la mise sous forme **canonique** :

$$Q(x) = a\left[\left(x_1 + \frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2 - \left(\frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

- Décomposons $B(x) = 2x^2 + 12xy + 23y^2$. On est dans le **premier** cas :

$$B(x) = \mathbf{2x^2} + \mathbf{x}\underbrace{\mathbf{(12y)}}_{B} + \underbrace{\mathbf{23y^2}}_{C} = \mathbf{2}\Big[\mathbf{(x+3y)^2} - \mathbf{(3y)^2}\Big] + \mathbf{23y^2}$$

$$= \mathbf{2(x+3y)^2} - \mathbf{18y^2} + \mathbf{23y^2}$$

Exemple n° 11 :

- Décomposons $A(x) = x^2 + 13y^2 - 8xy$. On est dans le **premier** cas **(mise sous forme canonique)** :

$$A(x) = \boldsymbol{x^2 + x\underbrace{(-8y)}_{B} + \underbrace{13y^2}_{C} = \left[(x-4y)^2 - (4y)^2\right] + 13y^2 = (x-4y)^2 - 3y^2}$$

Rappel : $Q(x) = a\left[x_1^2 + x_1 B(x_2, \ldots, x_n)\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$

On fait la mise sous forme **canonique** :

$$Q(x) = a\left[\left(x_1 + \frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2 - \left(\frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2}\right)^2\right] + C(x_2, \ldots, x_n)$$

- Décomposons $B(x) = 2x^2 + 12xy + 23y^2$. On est dans le **premier** cas :

$$B(x) = \boldsymbol{2x^2 + x\underbrace{(12y)}_{B} + \underbrace{23y^2}_{C} = 2\left[(x+3y)^2 - (3y)^2\right] + 23y^2}$$

$$= \boldsymbol{2(x+3y)^2 - 18y^2 + 23y^2}$$

$$= \boldsymbol{2(x+3y)^2 + 5y^2}$$

- $C(x, y, z) = xy - 2xz + yz$.

- $C(x,y,z) = xy - 2xz + yz$.

On est dans le second cas :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3,\dots,x_n) + x_2C(x_3,\dots,x_n)\Big] + D(x_3,\dots,x_n)$$

$$Q(x) = a(x_1 + C)(x_2 + B) + D - aBC$$

Puis, on utilise que $\dfrac{1}{4}\left[(u+v)^2 - (u-v)^2\right] = \boldsymbol{uv}$

- $C(x,y,z) = xy - 2xz + yz$.

On est dans le second cas :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3,\dots,x_n) + x_2C(x_3,\dots,x_n)\Big] + D(x_3,\dots,x_n)$$

$$Q(x) = a(x_1 + C)(x_2 + B) + D - aBC$$

Puis, on utilise que $\frac{1}{4}\left[(u+v)^2 - (u-v)^2\right] = \boldsymbol{uv}$

$$C(x,y,z) = \boldsymbol{xy} + \boldsymbol{x}\underbrace{\boldsymbol{(-2z)}}_{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{y}\underbrace{\boldsymbol{(z)}}_{\boldsymbol{C}} + \underbrace{\boldsymbol{0}}_{\boldsymbol{D}}$$

- $C(x,y,z) = xy - 2xz + yz$.

On est dans le second cas :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3,\dots,x_n) + x_2C(x_3,\dots,x_n)\Big] + D(x_3,\dots,x_n)$$

$$Q(x) = a(x_1 + C)(x_2 + B) + D - aBC$$

Puis, on utilise que $\frac{1}{4}\left[(u+v)^2 - (u-v)^2\right] = \boldsymbol{uv}$

$$C(x,y,z) = \boldsymbol{xy + x\underbrace{(-2z)}_{B} + y\underbrace{(z)}_{C} + \underbrace{0}_{D}}$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{(x+z)}}_{\boldsymbol{u}}\underbrace{\boldsymbol{(y-2z)}}_{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{2z^2}$$

- $C(x,y,z) = xy - 2xz + yz$.

On est dans le second cas :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3,\dots,x_n) + x_2C(x_3,\dots,x_n)\Big] + D(x_3,\dots,x_n)$$

$$Q(x) = a(x_1 + C)(x_2 + B) + D - aBC$$

Puis, on utilise que $\frac{1}{4}\left[(u+v)^2 - (u-v)^2\right] = uv$

$$C(x,y,z) = xy + x\underbrace{(-2z)}_{B} + y\underbrace{(z)}_{C} + \underbrace{0}_{D}$$

$$= \underbrace{(x+z)}_{u}\underbrace{(y-2z)}_{v} + 2z^2$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\underbrace{\big[(x+z)+(y-2z)\big]^2}_{(u+v)^2} -$$

- $C(x,y,z) = xy - 2xz + yz$.

On est dans le second cas :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3,\dots,x_n) + x_2C(x_3,\dots,x_n)\Big] + D(x_3,\dots,x_n)$$

$$Q(x) = a(x_1 + C)(x_2 + B) + D - aBC$$

Puis, on utilise que $\frac{1}{4}\left[(u+v)^2 - (u-v)^2\right] = uv$

$$C(x,y,z) = xy + x\underbrace{(-2z)}_{B} + y\underbrace{(z)}_{C} + \underbrace{0}_{D}$$

$$= \underbrace{(x+z)}_{u}\underbrace{(y-2z)}_{v} + 2z^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[\underbrace{\big[(x+z)+(y-2z)\big]^2}_{(u+v)^2} - \underbrace{\big[(x+z)-(y-2z)\big]^2}_{(u-v)^2}\right] + 2z^2$$

$$=$$

- $C(x,y,z) = xy - 2xz + yz$.

On est dans le second cas :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3,\dots,x_n) + x_2C(x_3,\dots,x_n)\Big] + D(x_3,\dots,x_n)$$

$$Q(x) = a(x_1 + C)(x_2 + B) + D - aBC$$

Puis, on utilise que $\frac{1}{4}\left[(u+v)^2 - (u-v)^2\right] = \boldsymbol{uv}$

$$C(x,y,z) = \boldsymbol{xy + x\underbrace{(-2z)}_{B} + y\underbrace{(z)}_{C} + \underbrace{0}_{D}}$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{(x+z)}}_{\boldsymbol{u}}\underbrace{\boldsymbol{(y-2z)}}_{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{2z^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\underbrace{\boldsymbol{\left[(x+z)+(y-2z)\right]^2}}_{\boldsymbol{(u+v)^2}} - \underbrace{\boldsymbol{\left[(x+z)-(y-2z)\right]^2}}_{\boldsymbol{(u-v)^2}}\right] + \boldsymbol{2z^2}$$

$$= \frac{1}{4}\boldsymbol{\left[x+y-z\right]^2} -$$

- $C(x,y,z) = xy - 2xz + yz$.

On est dans le second cas :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3,\dots,x_n) + x_2C(x_3,\dots,x_n)\Big] + D(x_3,\dots,x_n)$$

$$Q(x) = a(x_1 + C)(x_2 + B) + D - aBC$$

Puis, on utilise que $\dfrac{1}{4}\left[(u+v)^2 - (u-v)^2\right] = \boldsymbol{uv}$

$$C(x,y,z) = \boldsymbol{xy + x\underbrace{(-2z)}_{B} + y\underbrace{(z)}_{C} + \underbrace{0}_{D}}$$

$$= \underbrace{(\boldsymbol{x+z})}_{\boldsymbol{u}}\underbrace{(\boldsymbol{y-2z})}_{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{2z^2}$$

$$= \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}\left[\underbrace{\big[(\boldsymbol{x+z}) + (\boldsymbol{y-2z})\big]^{\boldsymbol{2}}}_{\boldsymbol{(u+v)^2}} - \underbrace{\big[(\boldsymbol{x+z}) - (\boldsymbol{y-2z})\big]^{\boldsymbol{2}}}_{\boldsymbol{(u-v)^2}}\right] + \boldsymbol{2z^2}$$

$$= \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}\big[\boldsymbol{x+y-z}\big]^{\boldsymbol{2}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}\big[\boldsymbol{x-y+3z}\big]^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{2z^2}$$

- $D(x, y, z, t) = xy + xz + xt - 2yt$.

- $D(x,y,z,t) = xy + xz + xt - 2yt$.

On est dans le second cas :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3,\dots,x_n) + x_2C(x_3,\dots,x_n)\Big] + D(x_3,\dots,x_n)$$

$$Q(x) = a(x_1 + C)(x_2 + B) + D - aBC$$

Puis, on utilise que $\dfrac{1}{4}\left[(u+v)^2 - (u-v)^2\right] = \boldsymbol{uv}$

- $D(x,y,z,t) = xy + xz + xt - 2yt.$

On est dans le second cas :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3,\dots,x_n) + x_2C(x_3,\dots,x_n)\Big] + D(x_3,\dots,x_n)$$

$$Q(x) = a(x_1 + C)(x_2 + B) + D - aBC$$

Puis, on utilise que $\frac{1}{4}\left[(u+v)^2 - (u-v)^2\right] = \boldsymbol{uv}$

$$= \boldsymbol{xy + x\underbrace{(z+t)}_{B} + y\underbrace{(-2t)}_{C} =}$$

- $D(x,y,z,t) = xy + xz + xt - 2yt.$

On est dans le second cas :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3,\dots,x_n) + x_2C(x_3,\dots,x_n)\Big] + D(x_3,\dots,x_n)$$

$$Q(x) = a(x_1 + C)(x_2 + B) + D - aBC$$

Puis, on utilise que $\frac{1}{4}\left[(u+v)^2 - (u-v)^2\right] = \boldsymbol{uv}$

$$= \boldsymbol{xy + x\underbrace{(z+t)}_{B} + y\underbrace{(-2t)}_{C} = \underbrace{(x-2t)}_{u}\underbrace{\big(y+(z+t)\big)}_{v} + 2t(z+t)}$$

- $D(x,y,z,t) = xy + xz + xt - 2yt.$

On est dans le second cas :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3,\dots,x_n) + x_2C(x_3,\dots,x_n)\Big] + D(x_3,\dots,x_n)$$

$$Q(x) = a(x_1 + C)(x_2 + B) + D - aBC$$

Puis, on utilise que $\dfrac{1}{4}\left[(u+v)^2 - (u-v)^2\right] = \boldsymbol{uv}$

$$= \boldsymbol{xy + x\underbrace{(z+t)}_{B} + y\underbrace{(-2t)}_{C} = \underbrace{(x-2t)}_{u}\underbrace{\big(y+(z+t)\big)}_{v} + 2t(z+t)}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}\left[\Big[\underbrace{(x-2t)}_{u} + \underbrace{\big(y+(z+t)\big)}_{v}\Big]^2 - \Big[\underbrace{(x-2t)}_{u} - \underbrace{\big(y+(z+t)\big)}_{v}\Big]^2\right] + 2t(z+t)}$$

- $D(x,y,z,t) = xy + xz + xt - 2yt.$

On est dans le second cas :

$$Q(x) = a\Big[x_1x_2 + x_1B(x_3,\dots,x_n) + x_2C(x_3,\dots,x_n)\Big] + D(x_3,\dots,x_n)$$

$$Q(x) = a(x_1 + C)(x_2 + B) + D - aBC$$

Puis, on utilise que $\frac{1}{4}\left[(u+v)^2 - (u-v)^2\right] = \boldsymbol{uv}$

$$= \boldsymbol{xy + x\underbrace{(z+t)}_{B} + y\underbrace{(-2t)}_{C} = \underbrace{(x-2t)}_{u}\underbrace{\big(y+(z+t)\big)}_{v} + 2t(z+t)}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}\left[\Big[\underbrace{(x-2t)}_{u} + \underbrace{\big(y+(z+t)\big)}_{v}\Big]^2 - \Big[\underbrace{(x-2t)}_{u} - \underbrace{\big(y+(z+t)\big)}_{v}\Big]^2\right] + 2t(z+t)}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}(x - t + y + z)^2 - \frac{1}{4}(x - 3t - y - z)^2 + 2t^2 + 2tz}$$

- $D(x,y,z,t) = xy + xz + xt - 2yt.$

$$= xy + x\underbrace{(z+t)}_{B} + y\underbrace{(-2t)}_{C} = \underbrace{(x-2t)}_{u}\underbrace{\big(y+(z+t)\big)}_{v} + 2t(z+t)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\Big[\underbrace{(x-2t)}_{u} + \underbrace{\big(y+(z+t)\big)}_{v}\Big]^2 - \Big[\underbrace{(x-2t)}_{u} - \underbrace{\big(y+(z+t)\big)}_{v}\Big]^2\right] + 2t(z+t)$$

$$= \frac{1}{4}(x - t + y + z)^2 - \frac{1}{4}(x - 3t - y - z)^2 + 2t^2 + 2tz$$

- $D(x,y,z,t) = xy + xz + xt - 2yt.$

$$= xy + x\underbrace{(z+t)}_{B} + y\underbrace{(-2t)}_{C} = \underbrace{(x-2t)}_{u}\underbrace{\big(y+(z+t)\big)}_{v} + 2t(z+t)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\Big[\underbrace{(x-2t)}_{u} + \underbrace{\big(y+(z+t)\big)}_{v}\Big]^2 - \Big[\underbrace{(x-2t)}_{u} - \underbrace{\big(y+(z+t)\big)}_{v}\Big]^2\right] + 2t(z+t)$$

$$= \frac{1}{4}(x - t + y + z)^2 - \frac{1}{4}(x - 3t - y - z)^2 + 2t^2 + 2tz$$

On revient au **premier** cas pour décomposer $2t^2 + 2tz$:

$$2t^2 + 2tz = 2\big(t^2 + tz\big) =$$

- $D(x,y,z,t) = xy + xz + xt - 2yt.$

$$= xy + x\underbrace{(z+t)}_{B} + y\underbrace{(-2t)}_{C} = \underbrace{(x-2t)}_{u}\underbrace{\big(y+(z+t)\big)}_{v} + 2t(z+t)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\Big[\underbrace{(x-2t)}_{u} + \underbrace{\big(y+(z+t)\big)}_{v}\Big]^2 - \Big[\underbrace{(x-2t)}_{u} - \underbrace{\big(y+(z+t)\big)}_{v}\Big]^2\right] + 2t(z+t)$$

$$= \frac{1}{4}(x - t + y + z)^2 - \frac{1}{4}(x - 3t - y - z)^2 + 2t^2 + 2tz$$

On revient au **premier** cas pour décomposer $2t^2 + 2tz$:

$$2t^2 + 2tz = 2(t^2 + tz) = 2\left[\left(t + \tfrac{1}{2}z\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}z\right)^2\right]$$

- $D(x,y,z,t) = xy + xz + xt - 2yt.$

$$= xy + x\underbrace{(z+t)}_{B} + y\underbrace{(-2t)}_{C} = \underbrace{(x-2t)}_{u}\underbrace{\big(y+(z+t)\big)}_{v} + 2t(z+t)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\Big[\underbrace{(x-2t)}_{u} + \underbrace{\big(y+(z+t)\big)}_{v}\Big]^2 - \Big[\underbrace{(x-2t)}_{u} - \underbrace{\big(y+(z+t)\big)}_{v}\Big]^2\right] + 2t(z+t)$$

$$= \frac{1}{4}(x-t+y+z)^2 - \frac{1}{4}(x-3t-y-z)^2 + 2t^2 + 2tz$$

On revient au **premier** cas pour décomposer $2t^2 + 2tz$:

$$2t^2 + 2tz = 2(t^2 + tz) = 2\left[\left(t + \tfrac{1}{2}z\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}z\right)^2\right]$$

$$D(x,y,z,t) = \frac{1}{4}(x-t+y+z)^2 - \frac{1}{4}(x-3t-y-z)^2 + 2\left(t+\tfrac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{2}z^2$$



Définition:

Dans une base orthonormée, le produit scalaire est une forme bilinéaire dont la matrice est la matrice **identité.**



Définition:

Dans une base orthonormée, le produit scalaire est une forme bilinéaire dont la matrice est la matrice **identité.**



Propriété:

Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'une matrice symétrique réelle sont toujours orthogonaux.



Démonstration

Soit A une matrice réelle symétrique. Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) de A. Soient $\overrightarrow{v_1}$ un vecteur propre associé à λ_1 et $\overrightarrow{v_2}$ à λ_2.

Plaçons-nous dans un repère orthonormée : on a $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = {}^t\overrightarrow{a}\, I\, \overrightarrow{b} = {}^t\overrightarrow{a}\, \overrightarrow{b}$, et on rappelle que :

$$^t(CD) = {}^tD\,{}^tC$$

Donc, $\left(A\overrightarrow{v_1}\right) \cdot \overrightarrow{v_2} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = \lambda_1\left(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}\right)$

Comme A est symétrique $\left(A\overrightarrow{v_1}\right) \cdot \overrightarrow{v_2} = {}^t\left(A\overrightarrow{v_1}\right)\overrightarrow{v_2} = {}^t\overrightarrow{v_1}\,{}^tA\overrightarrow{v_2} \underset{A \text{ symétrique}}{=} {}^t\overrightarrow{v_1}A\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_1} \cdot \left(A\overrightarrow{v_1}\right)$

$$= \overrightarrow{v_1} \cdot \left(\lambda_2\overrightarrow{v_2}\right) = \lambda_2\left(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}\right)$$

Ainsi, $\left(A\overrightarrow{v_1}\right) \cdot \overrightarrow{v_2} = \lambda_1\left(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}\right) = \lambda_2\left(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}\right)$ donc $\lambda_1\left(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}\right) - \lambda_2\left(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}\right) = 0$

Soit $(\lambda_1 - \lambda_2)\left(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}\right) = 0$, comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$.



Propriété:

Etant donnée une forme bilinéaire réelle symétrique dont la matrice est B dans une base orthonormée. Il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres de B où la matrice de la forme bilinéaire est diagonale.



Propriété:

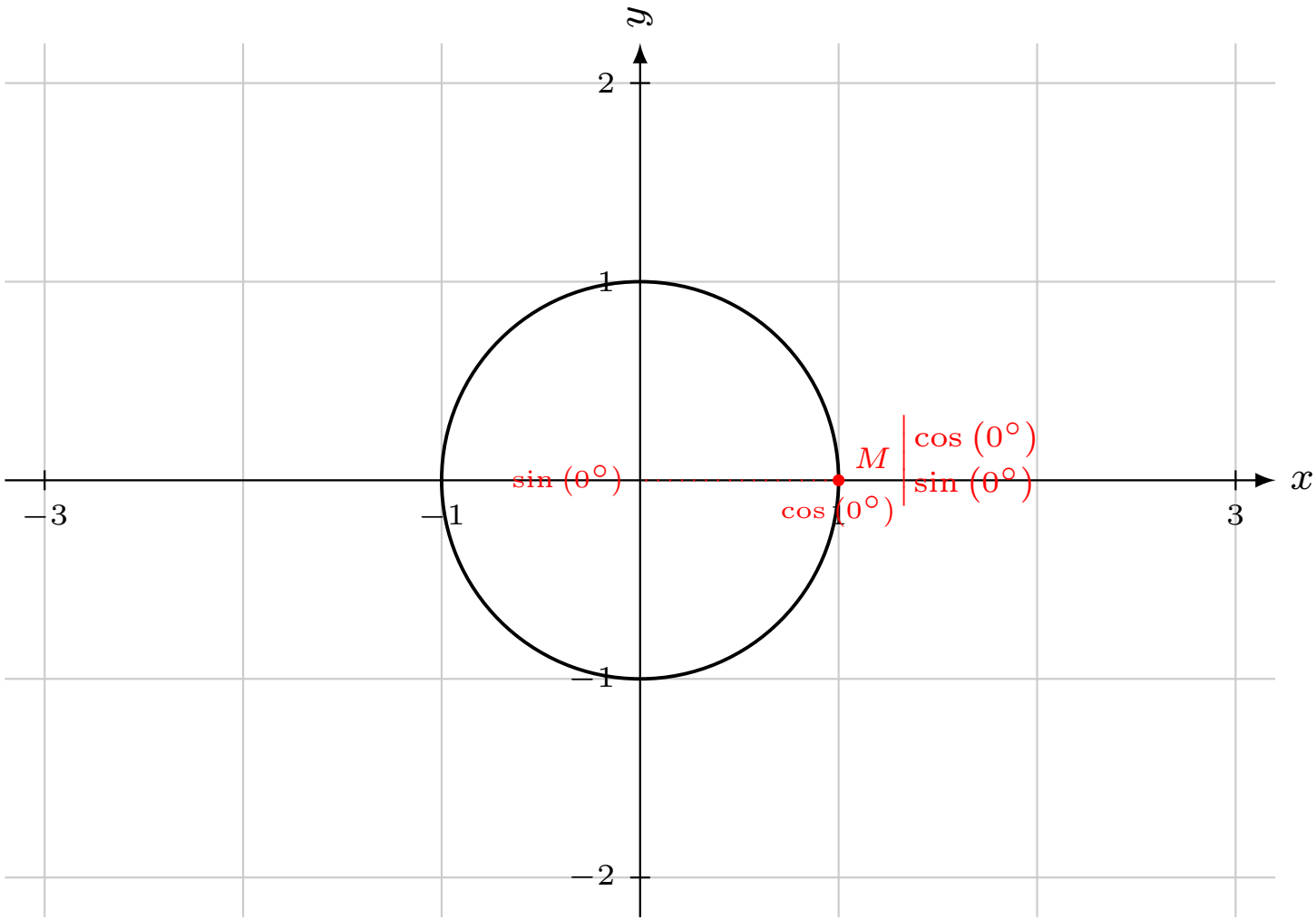
Etant donnée une forme bilinéaire réelle symétrique dont la matrice est B dans une base orthonormée. Il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres de B où la matrice de la forme bilinéaire est diagonale.



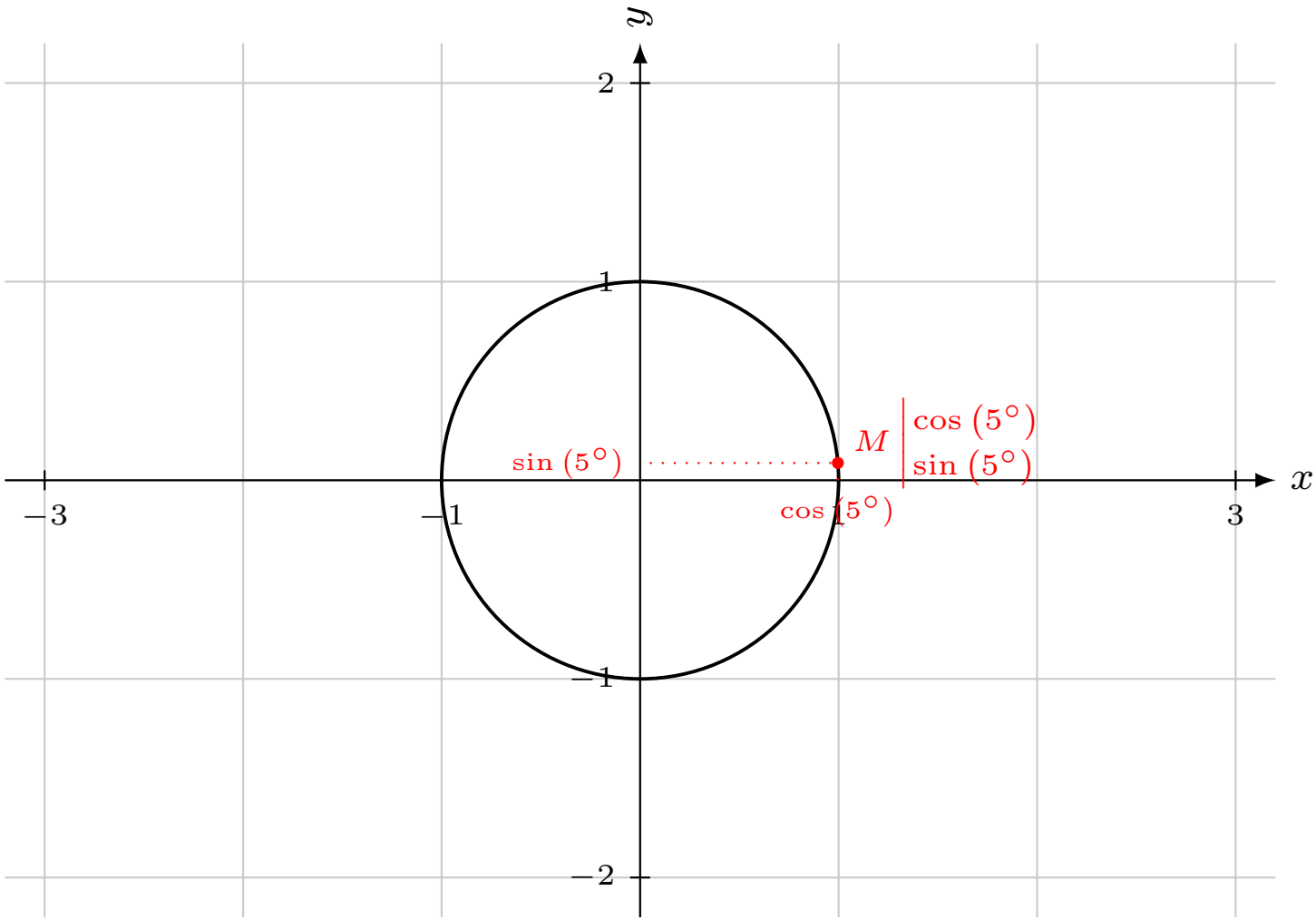
Remarque

- Cette méthode est en générale plus longue que la méthode de Gauss.

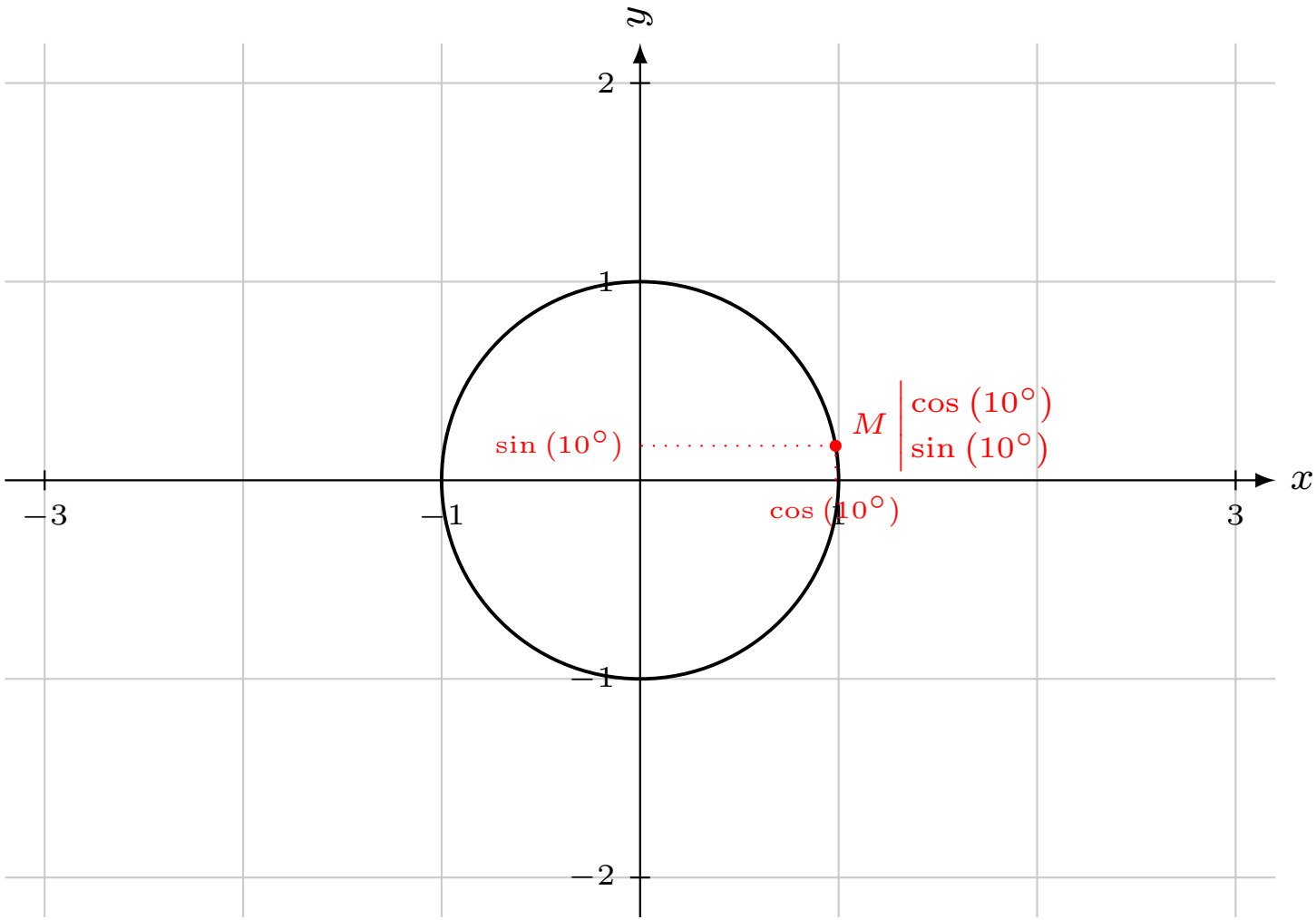
3. Représentation graphique d'une ellipse.



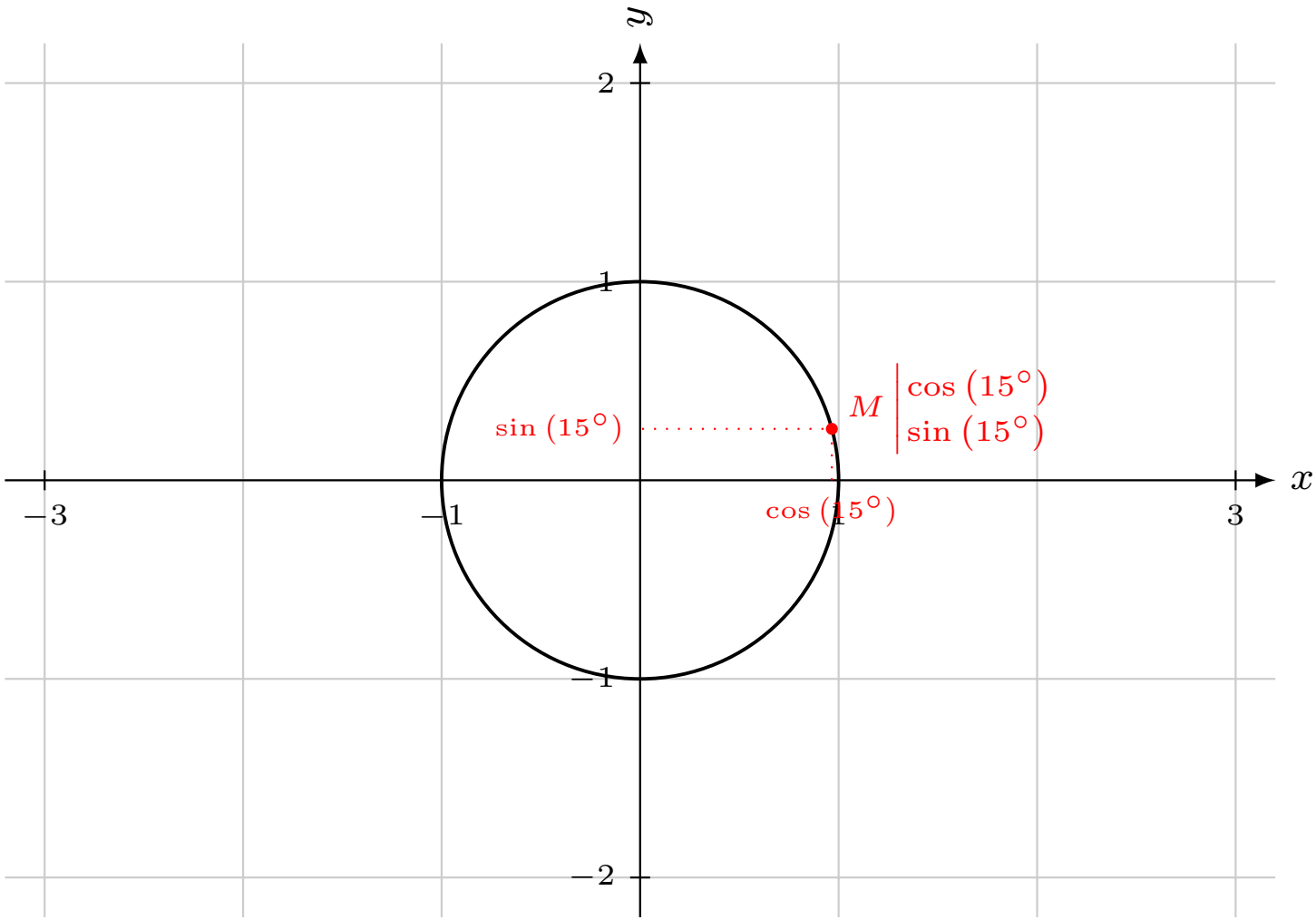
3. Représentation graphique d'une ellipse.



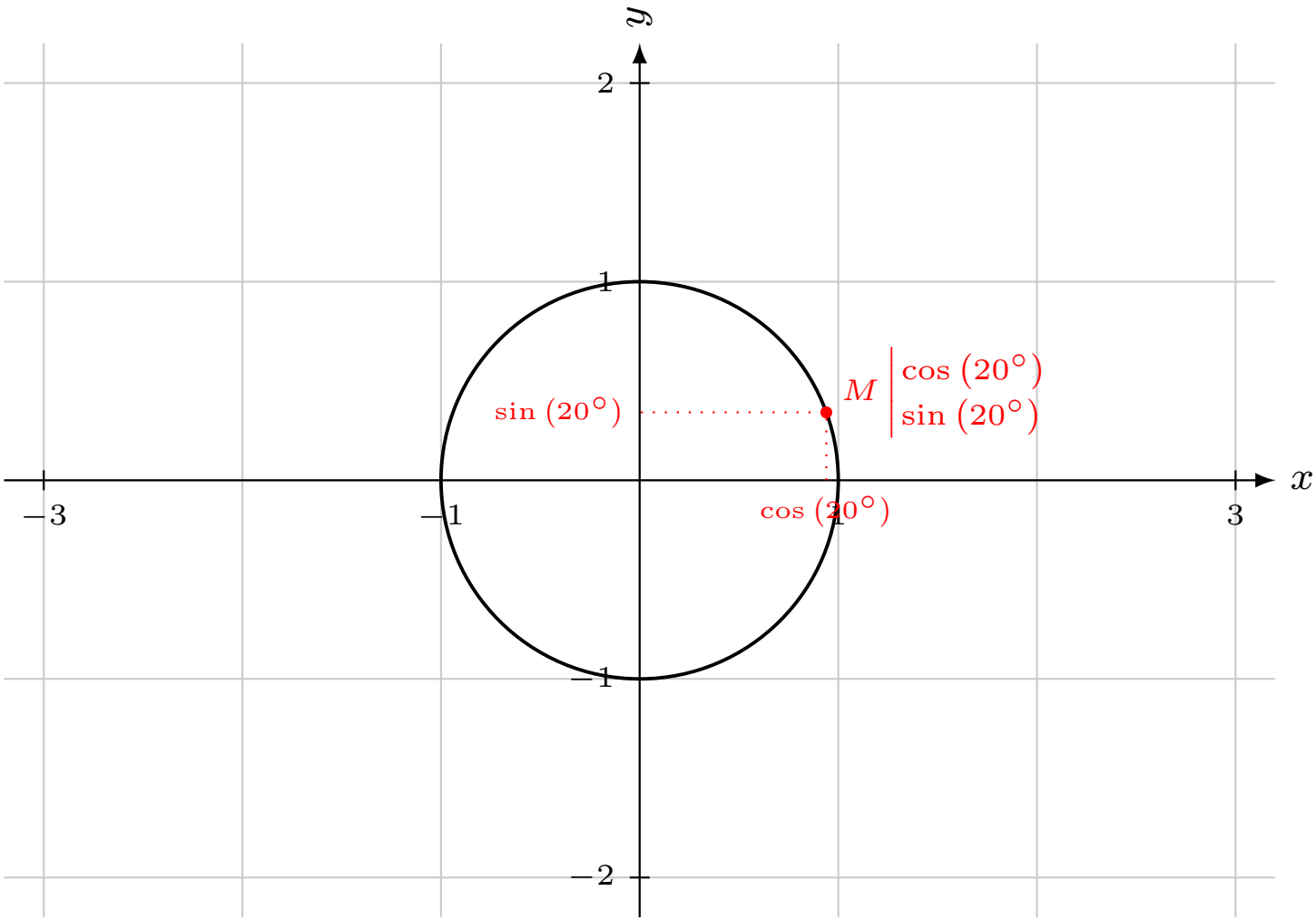
3. Représentation graphique d'une ellipse.



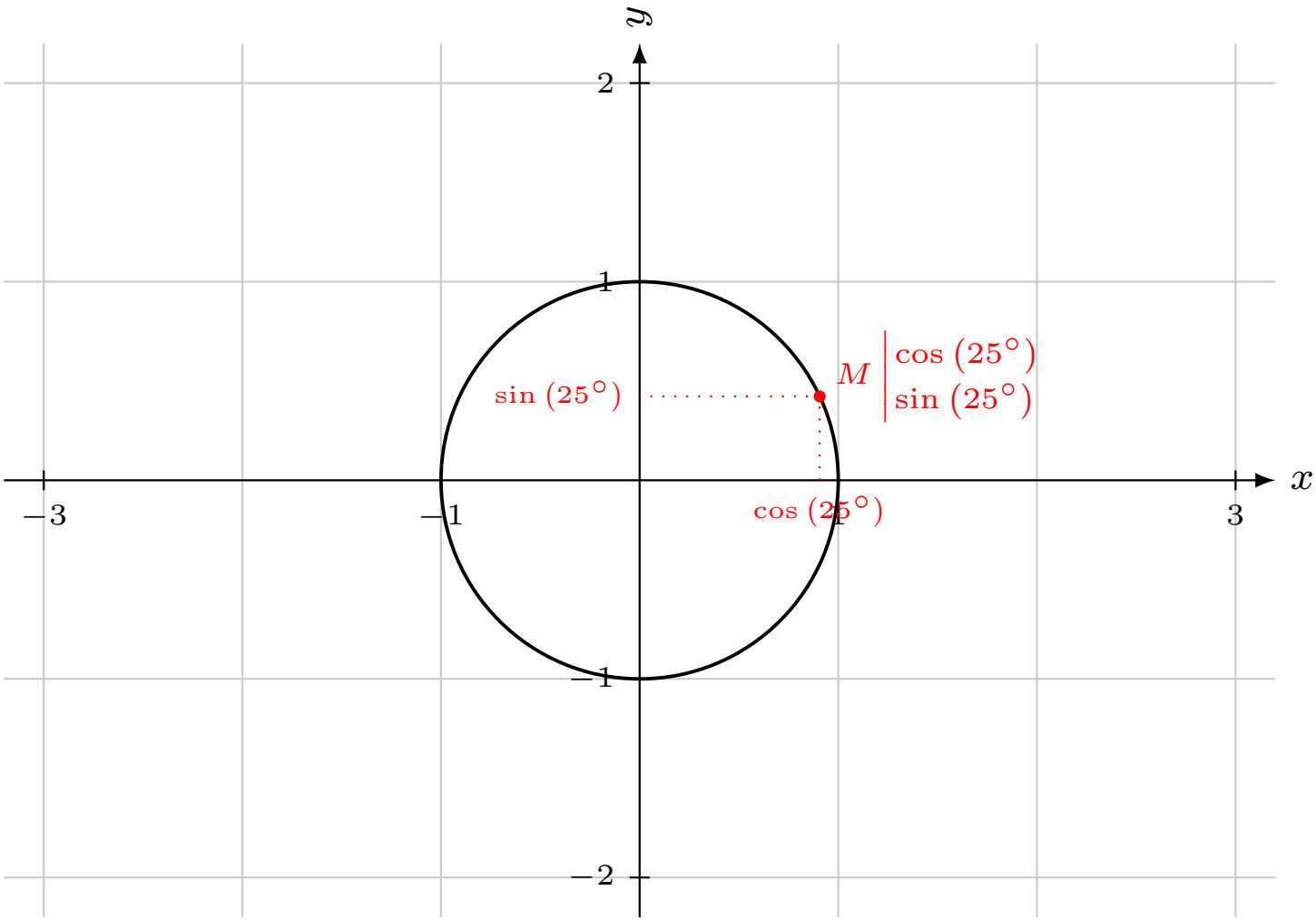
3. Représentation graphique d'une ellipse.



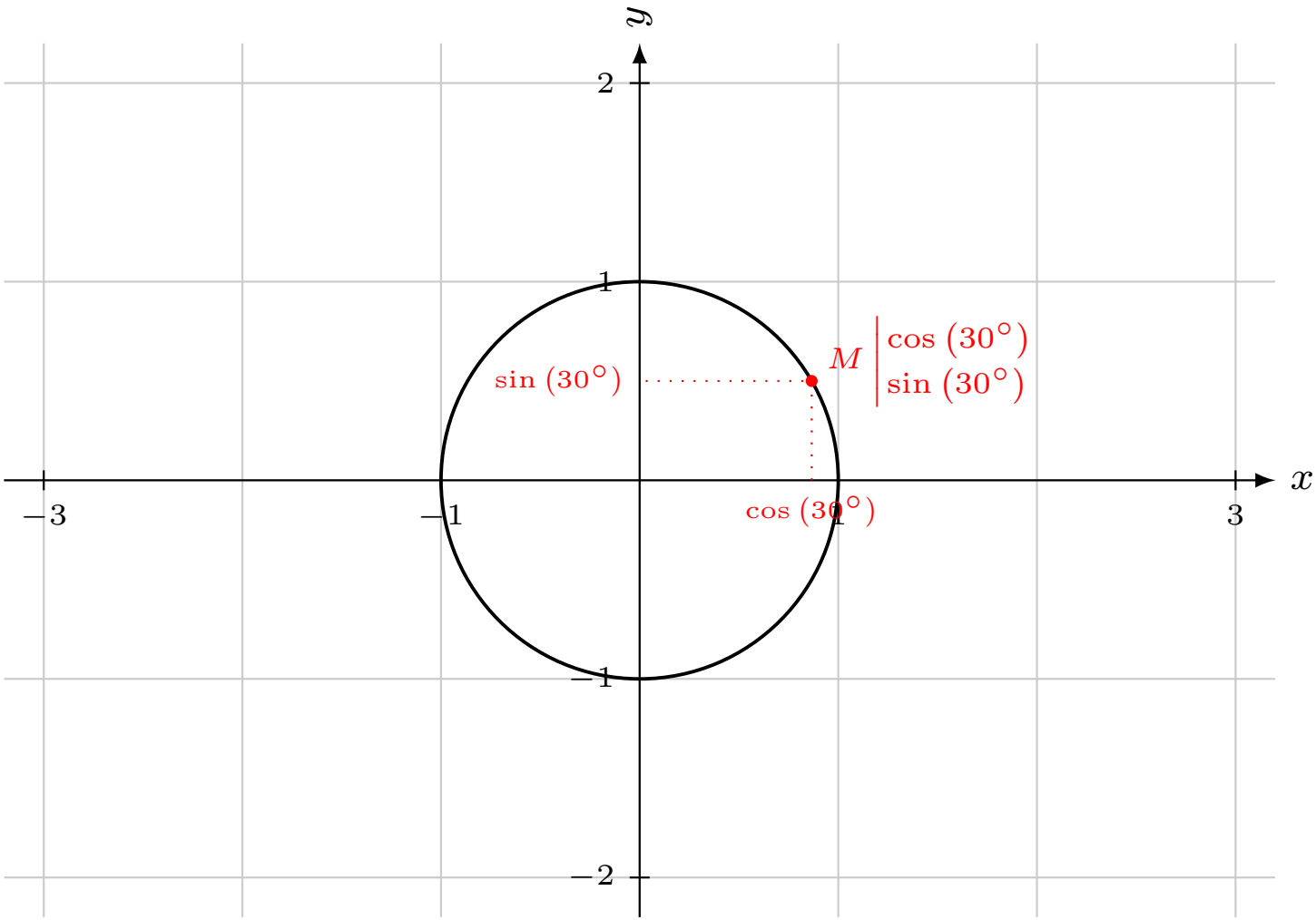
3. Représentation graphique d'une ellipse.



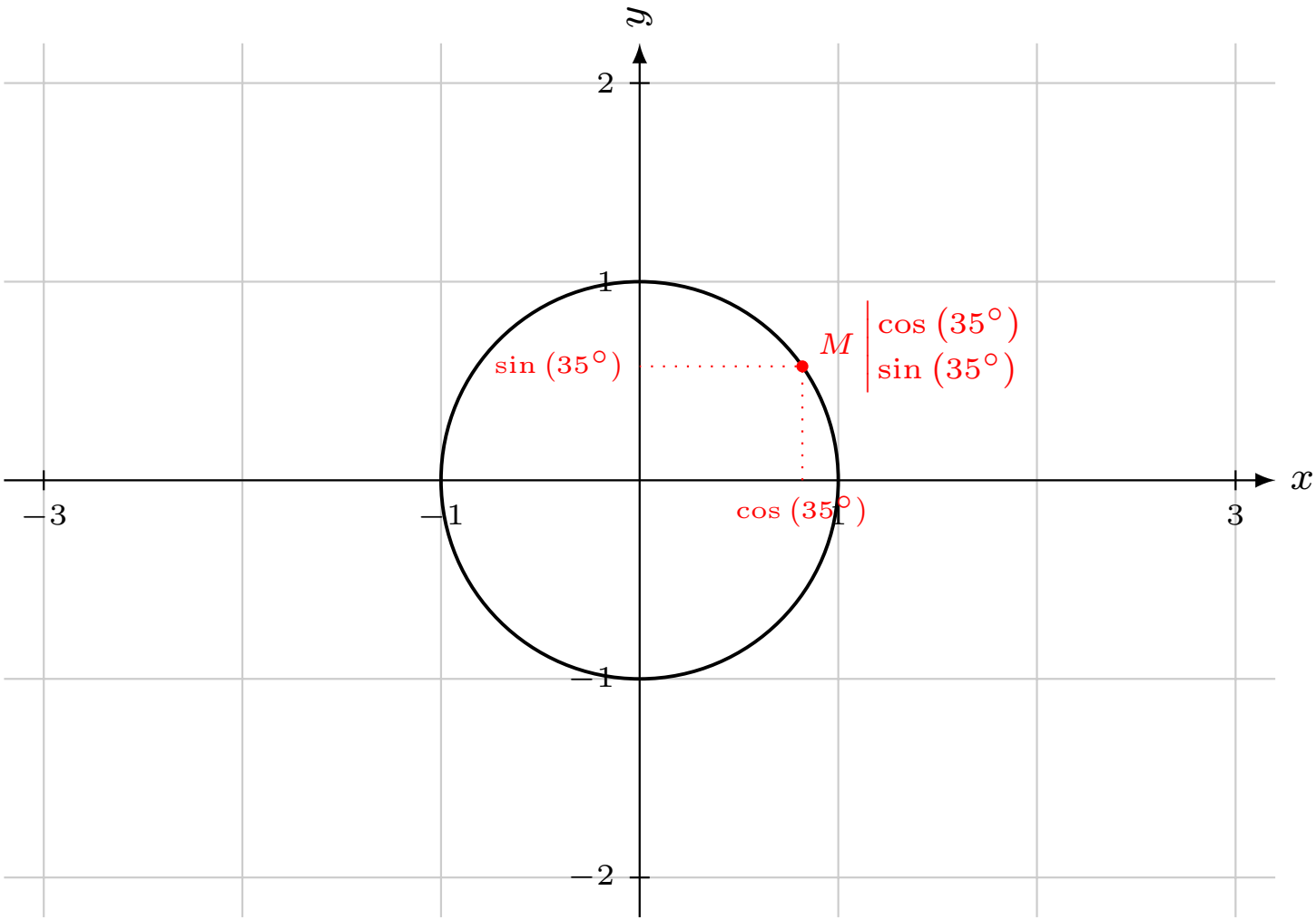
3. Représentation graphique d'une ellipse.



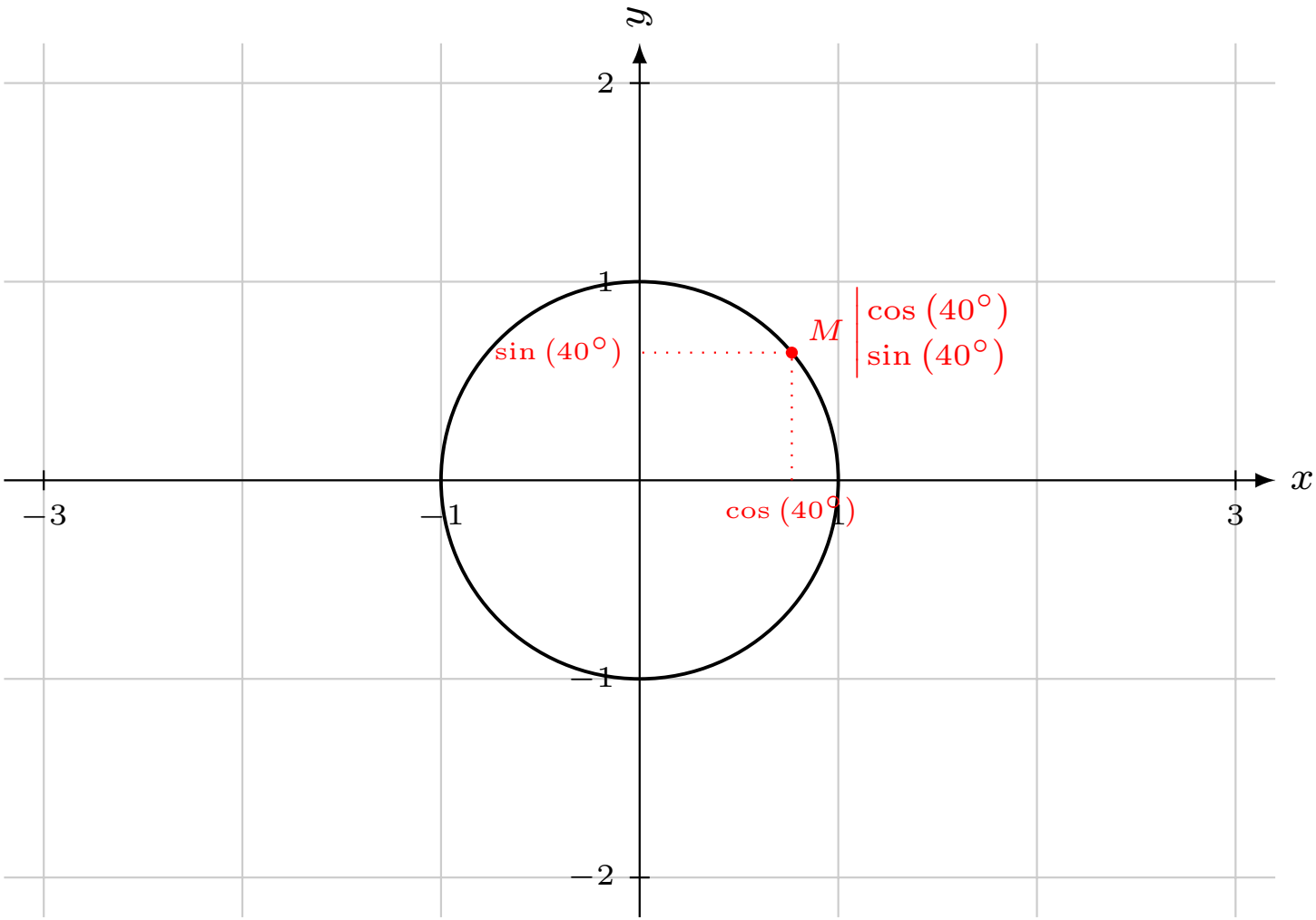
3. Représentation graphique d'une ellipse.



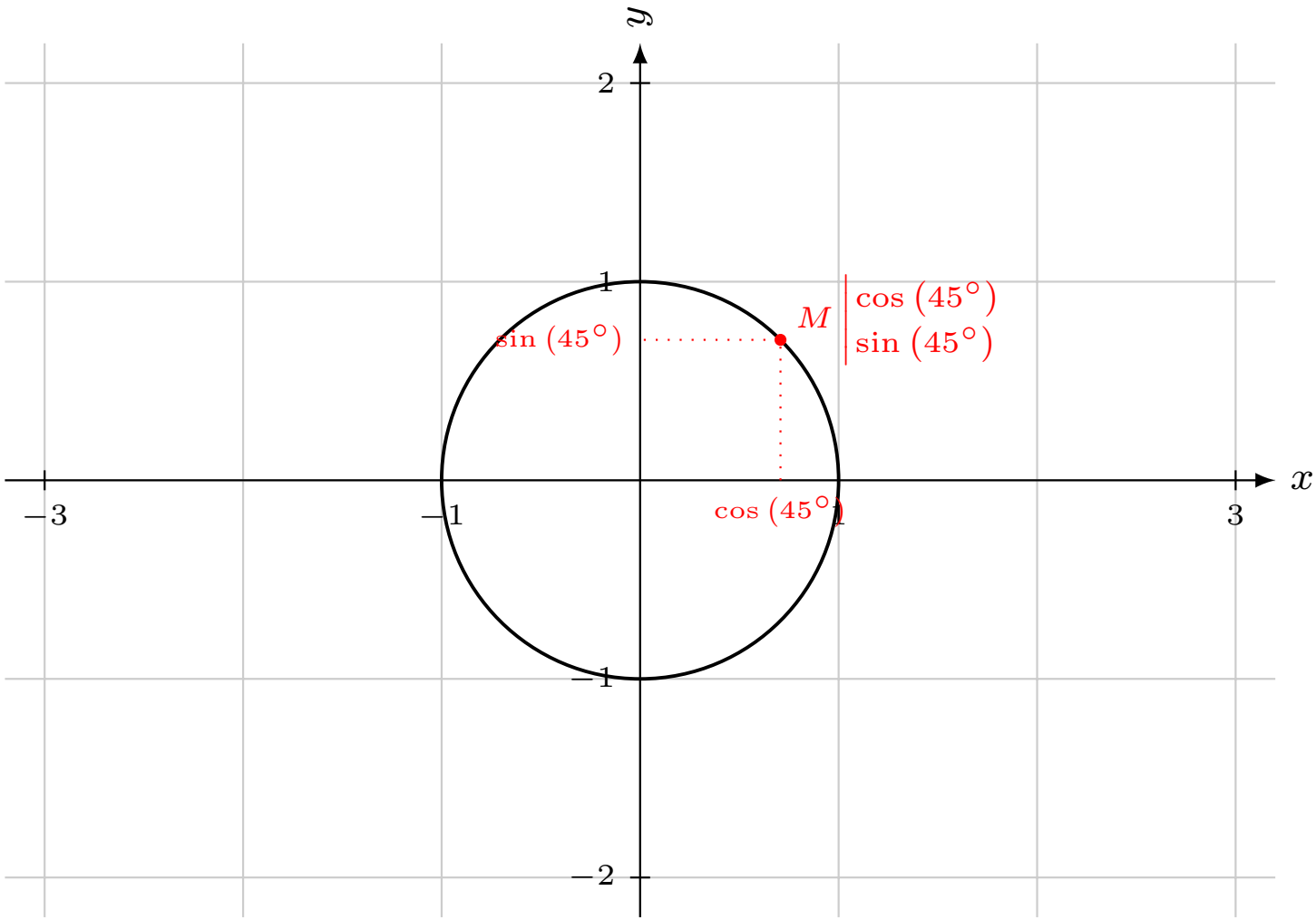
3. Représentation graphique d'une ellipse.



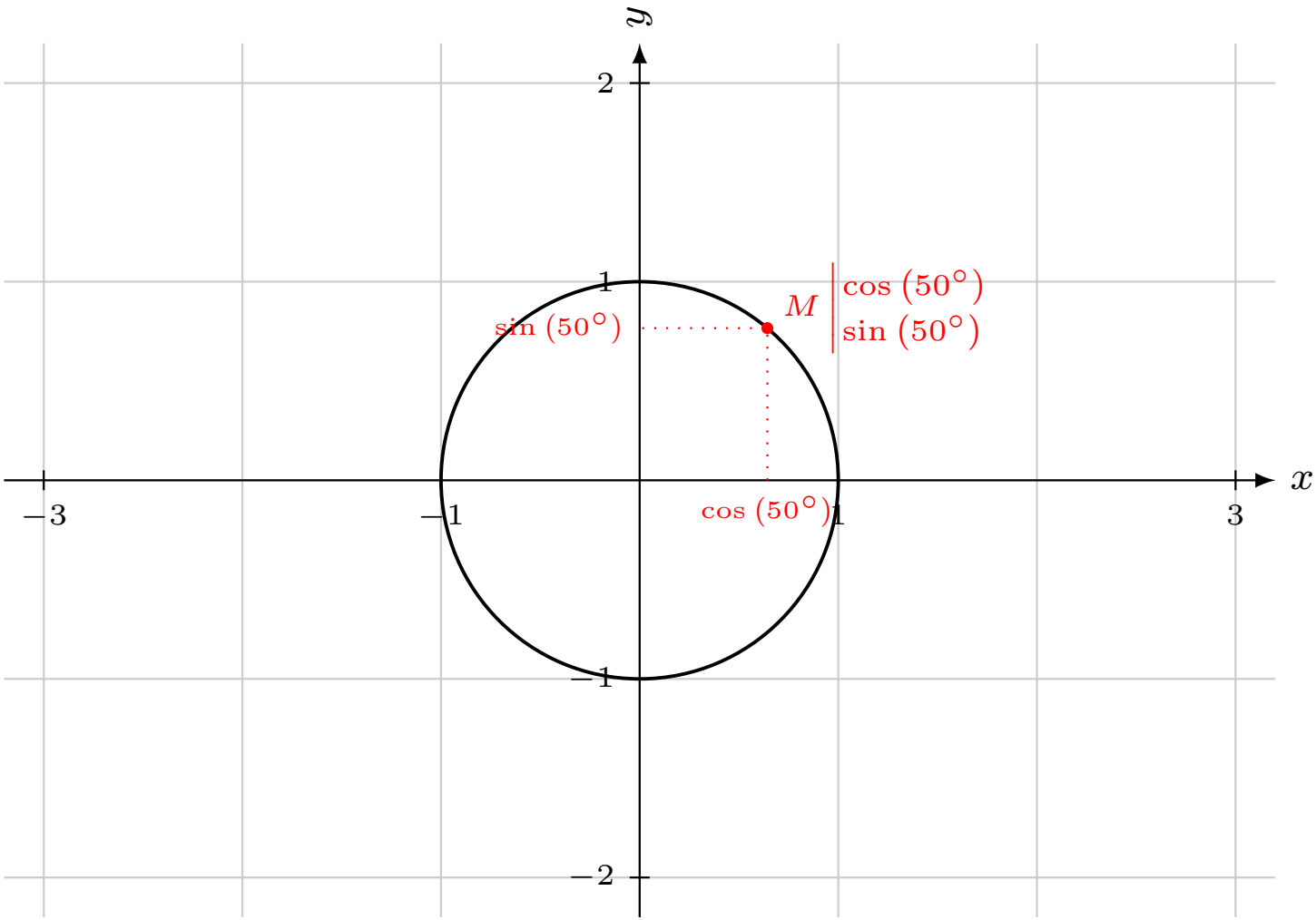
3. Représentation graphique d'une ellipse.



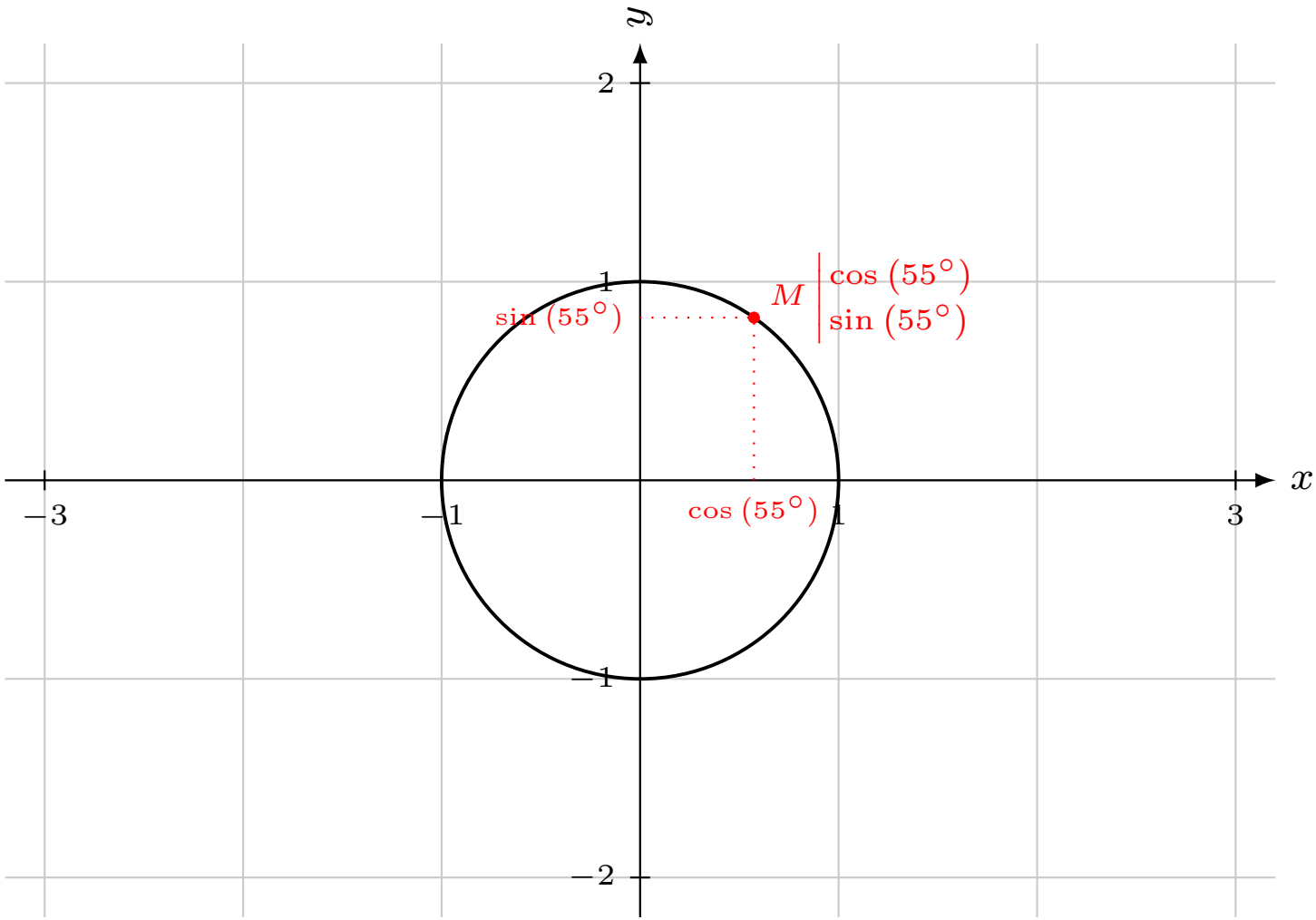
3. Représentation graphique d'une ellipse.



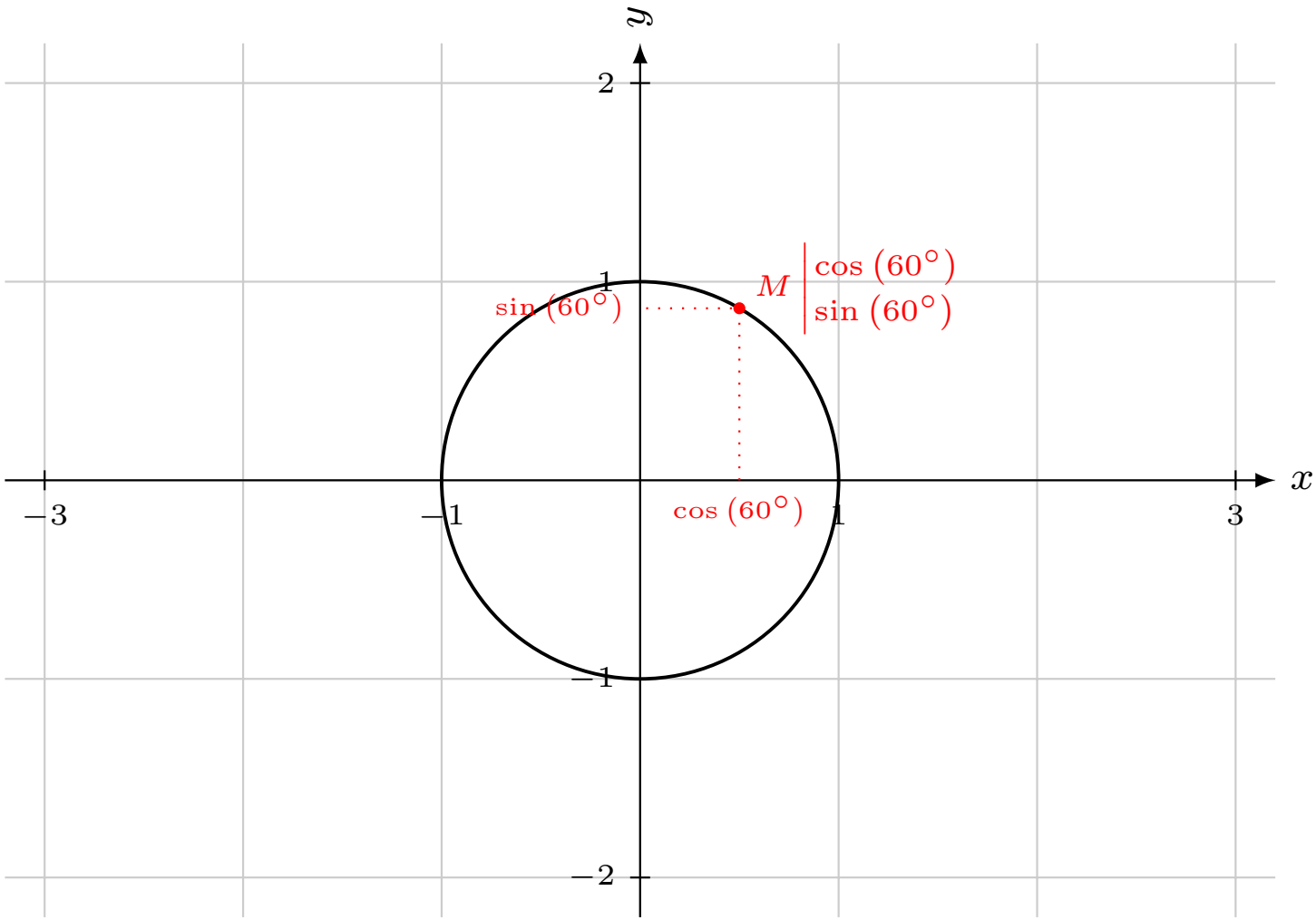
3. Représentation graphique d'une ellipse.



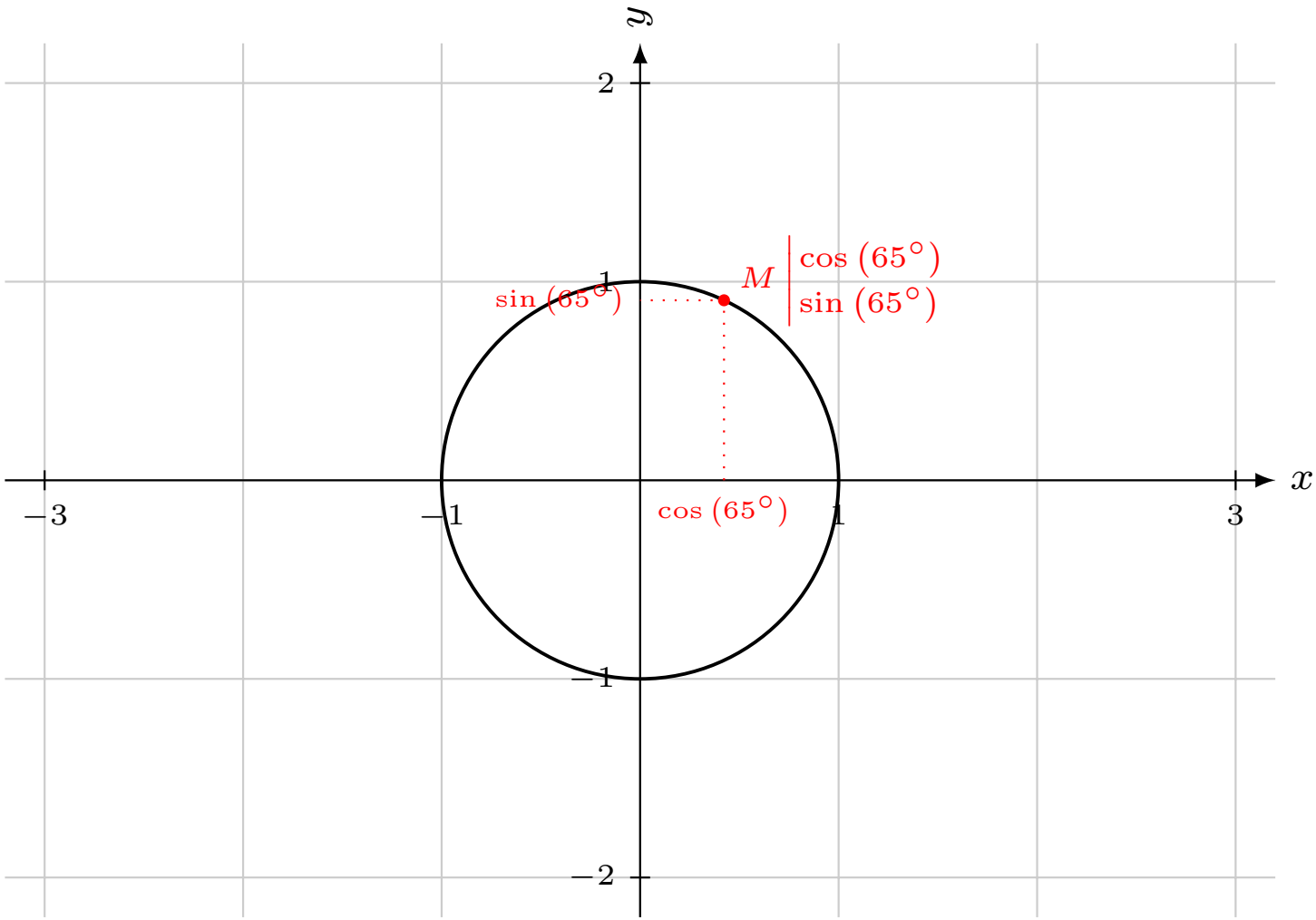
3. Représentation graphique d'une ellipse.



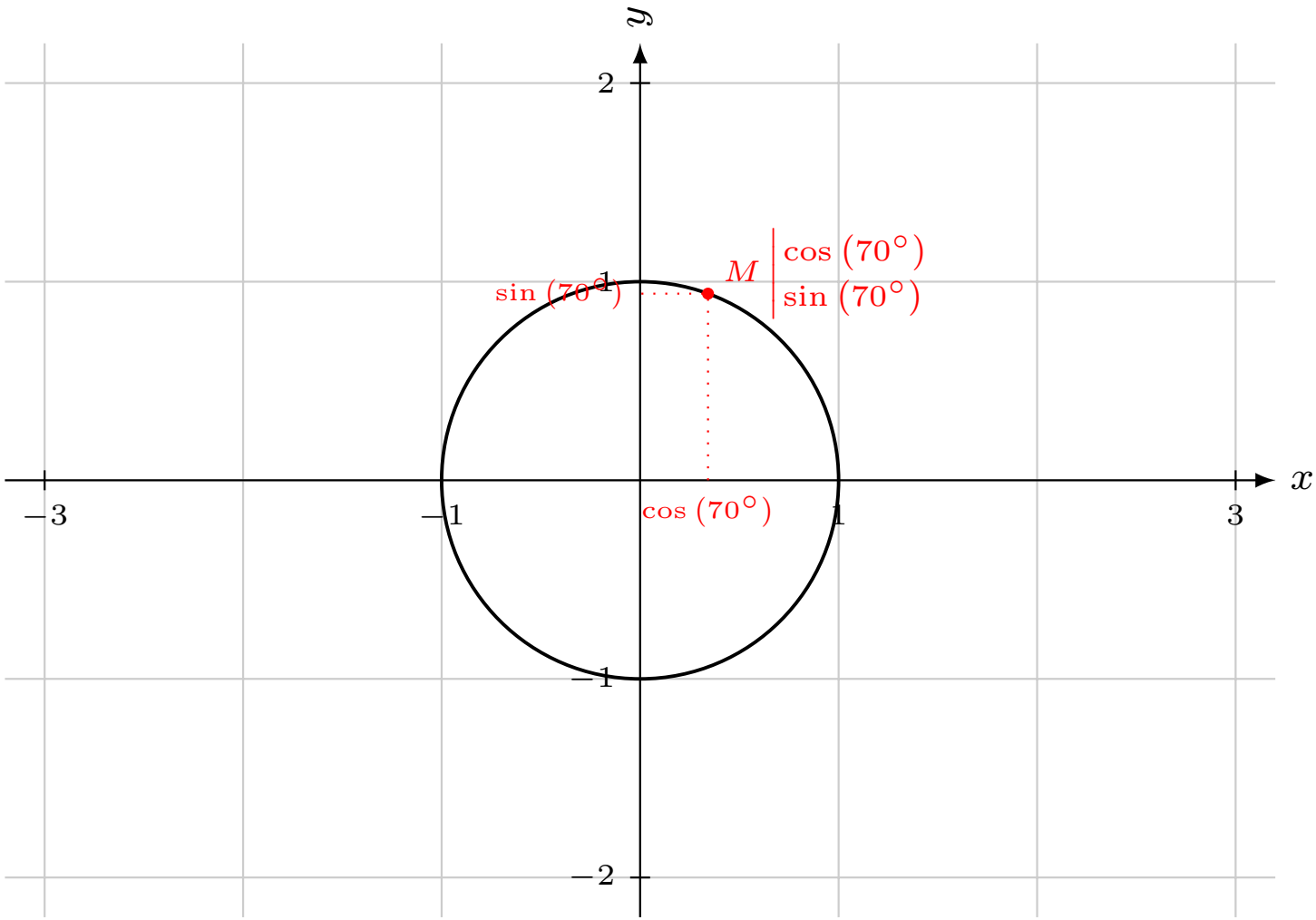
3. Représentation graphique d'une ellipse.



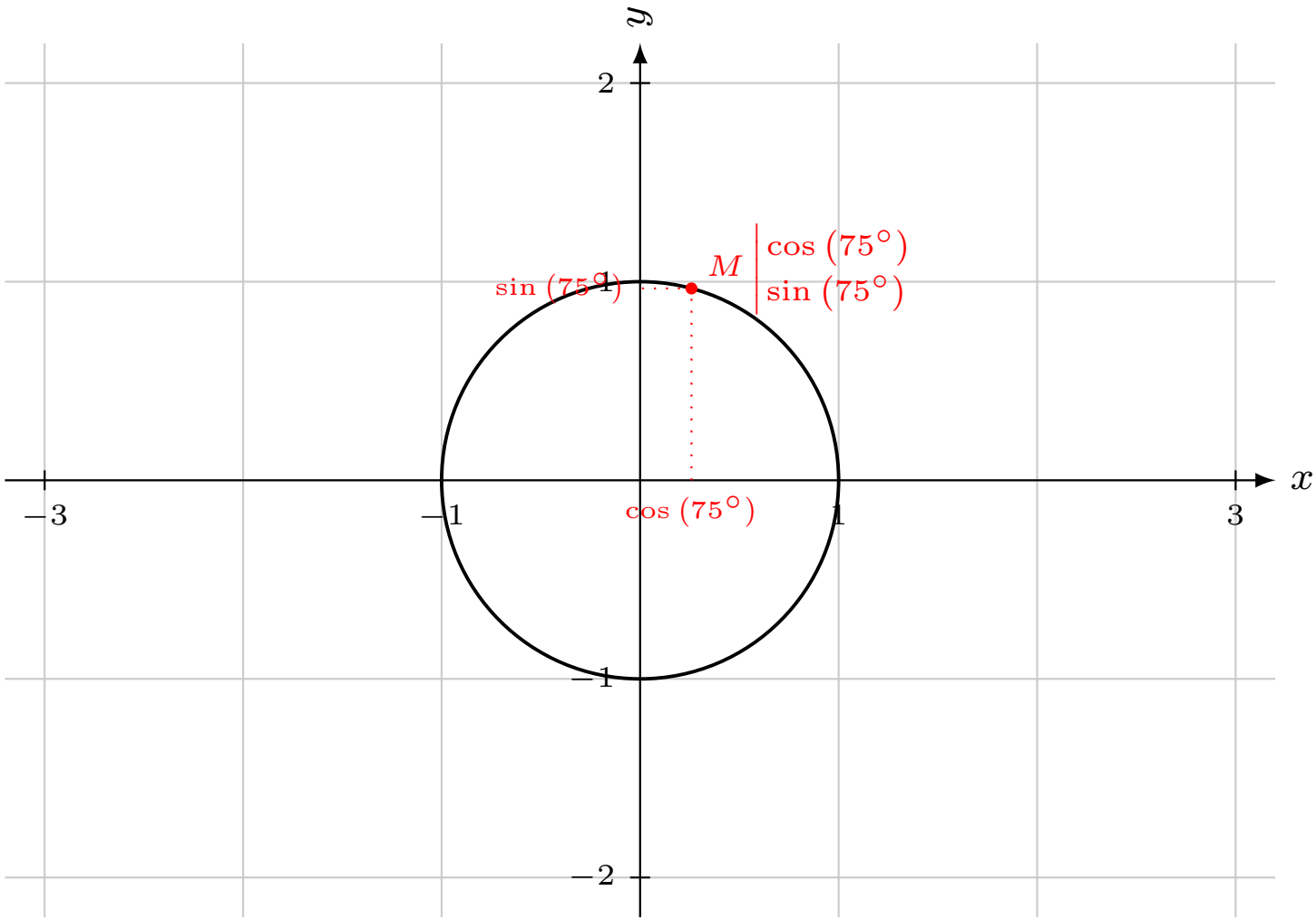
3. Représentation graphique d'une ellipse.



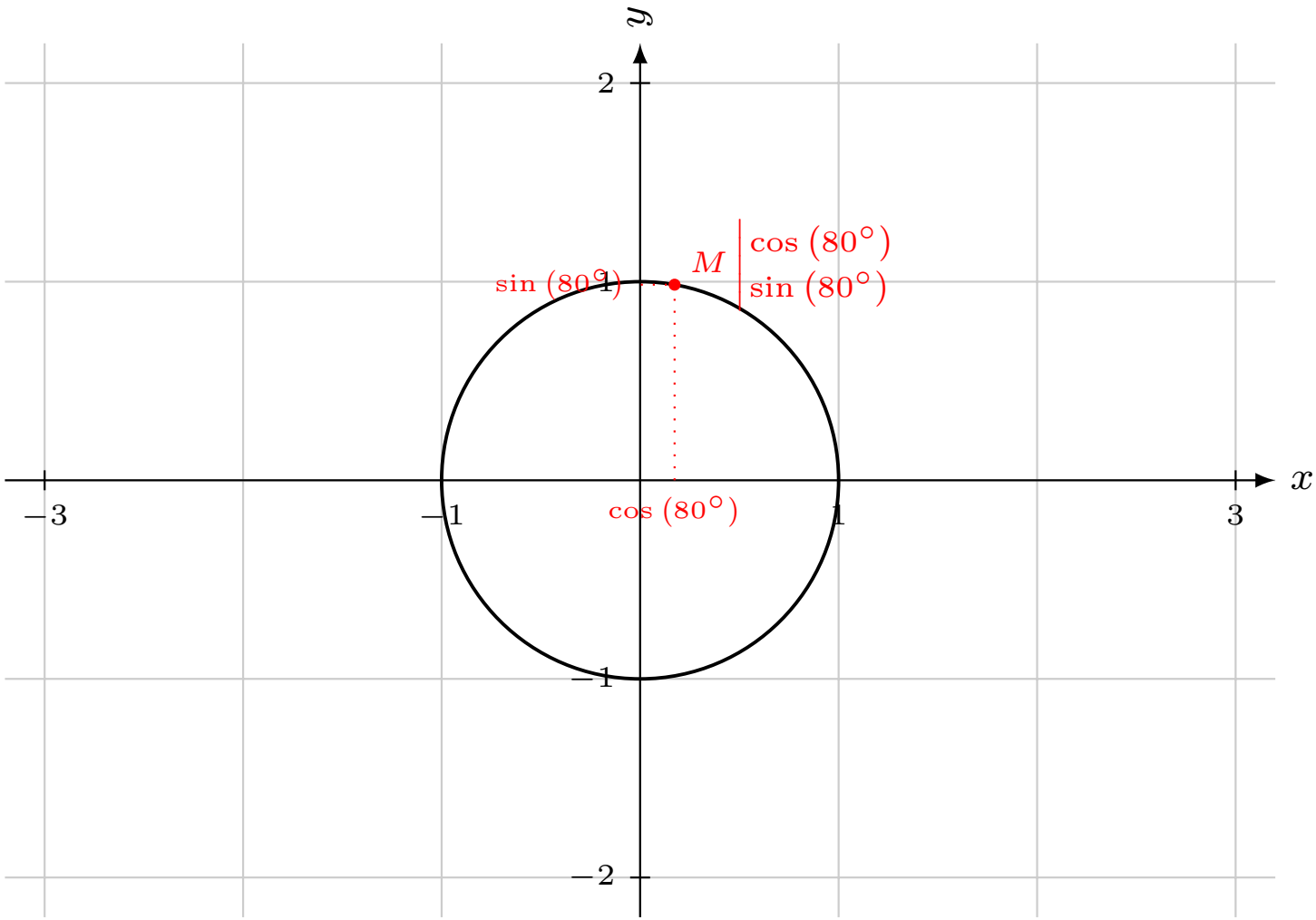
3. Représentation graphique d'une ellipse.



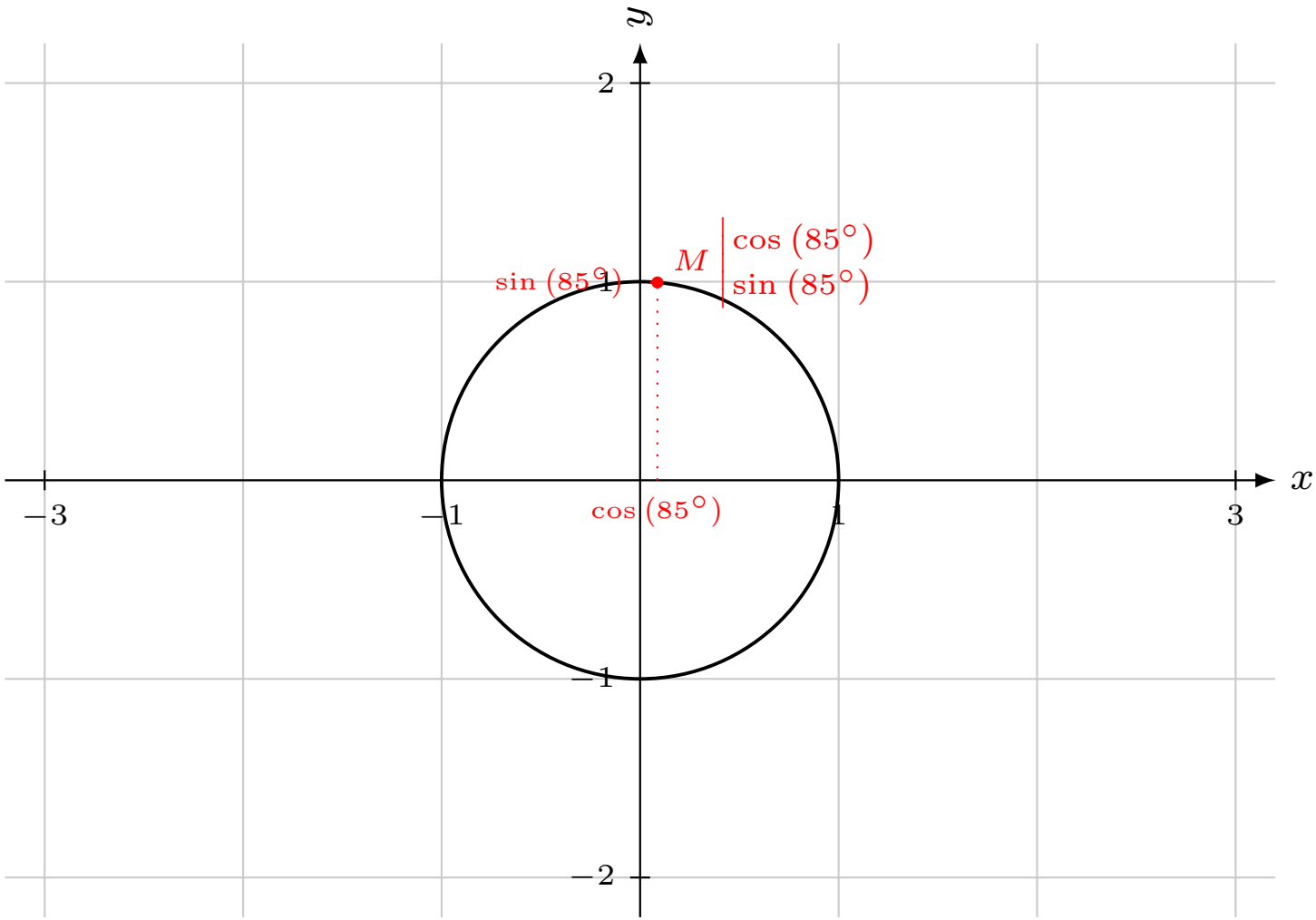
3. Représentation graphique d'une ellipse.



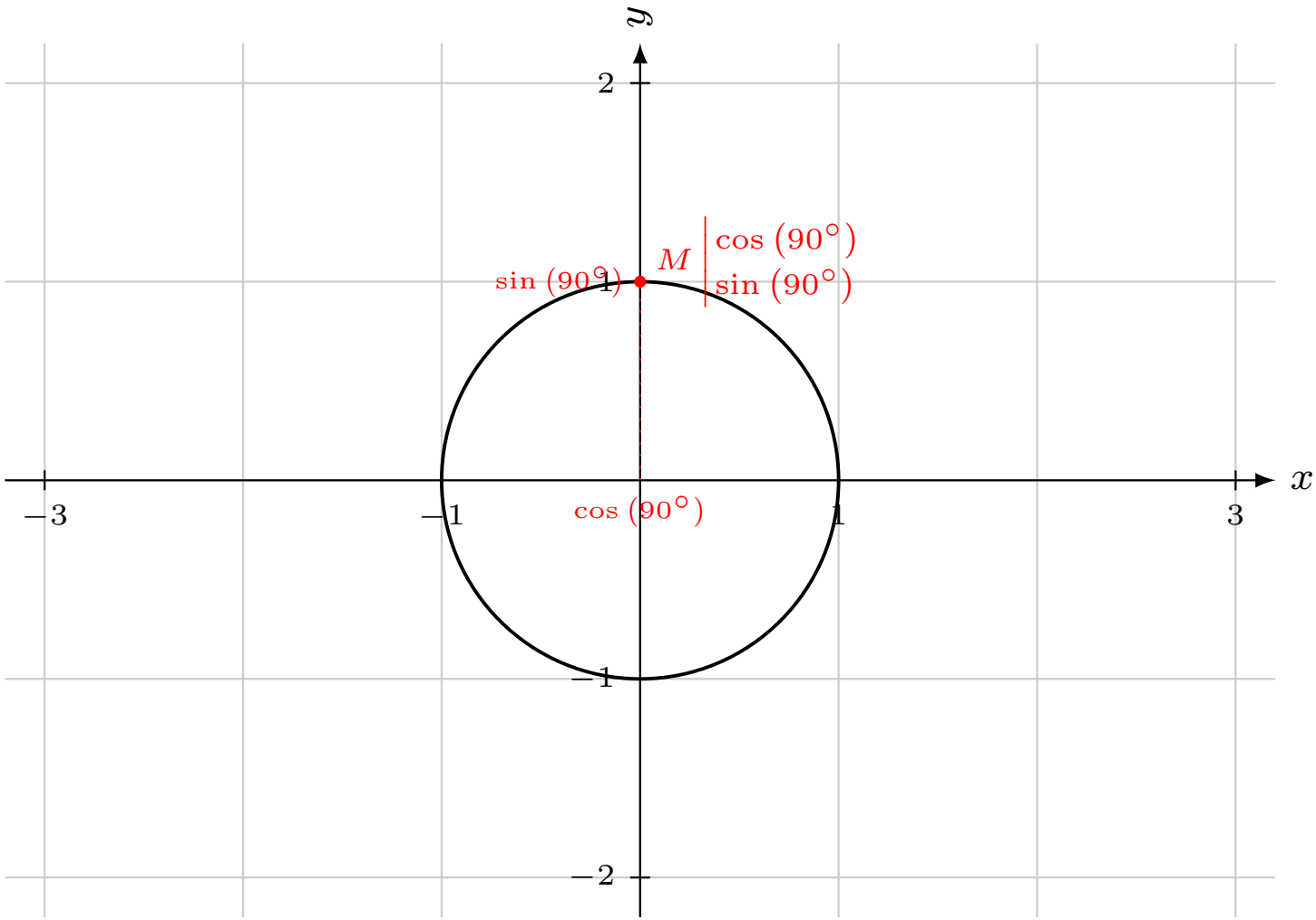
3. Représentation graphique d'une ellipse.



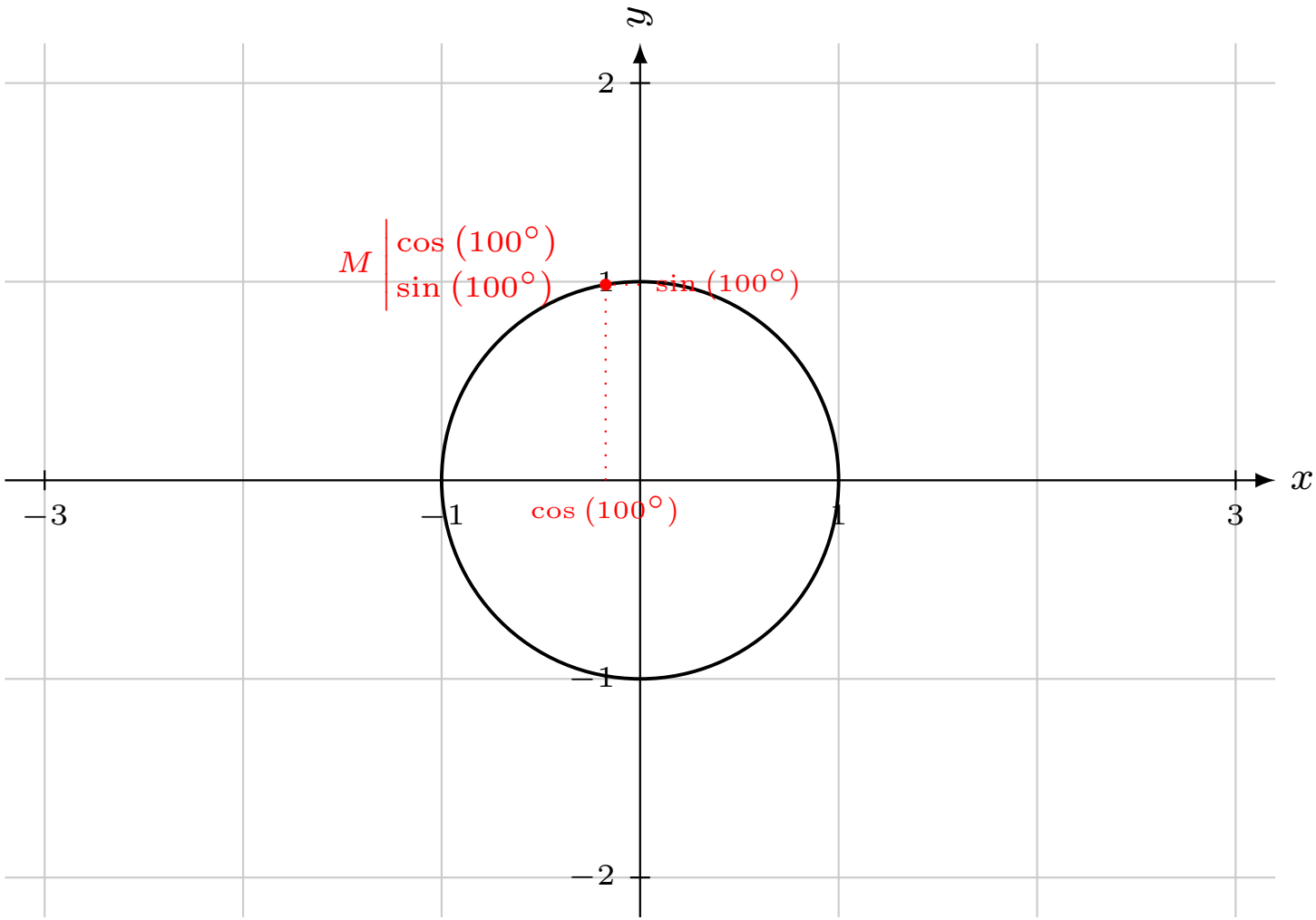
3. Représentation graphique d'une ellipse.



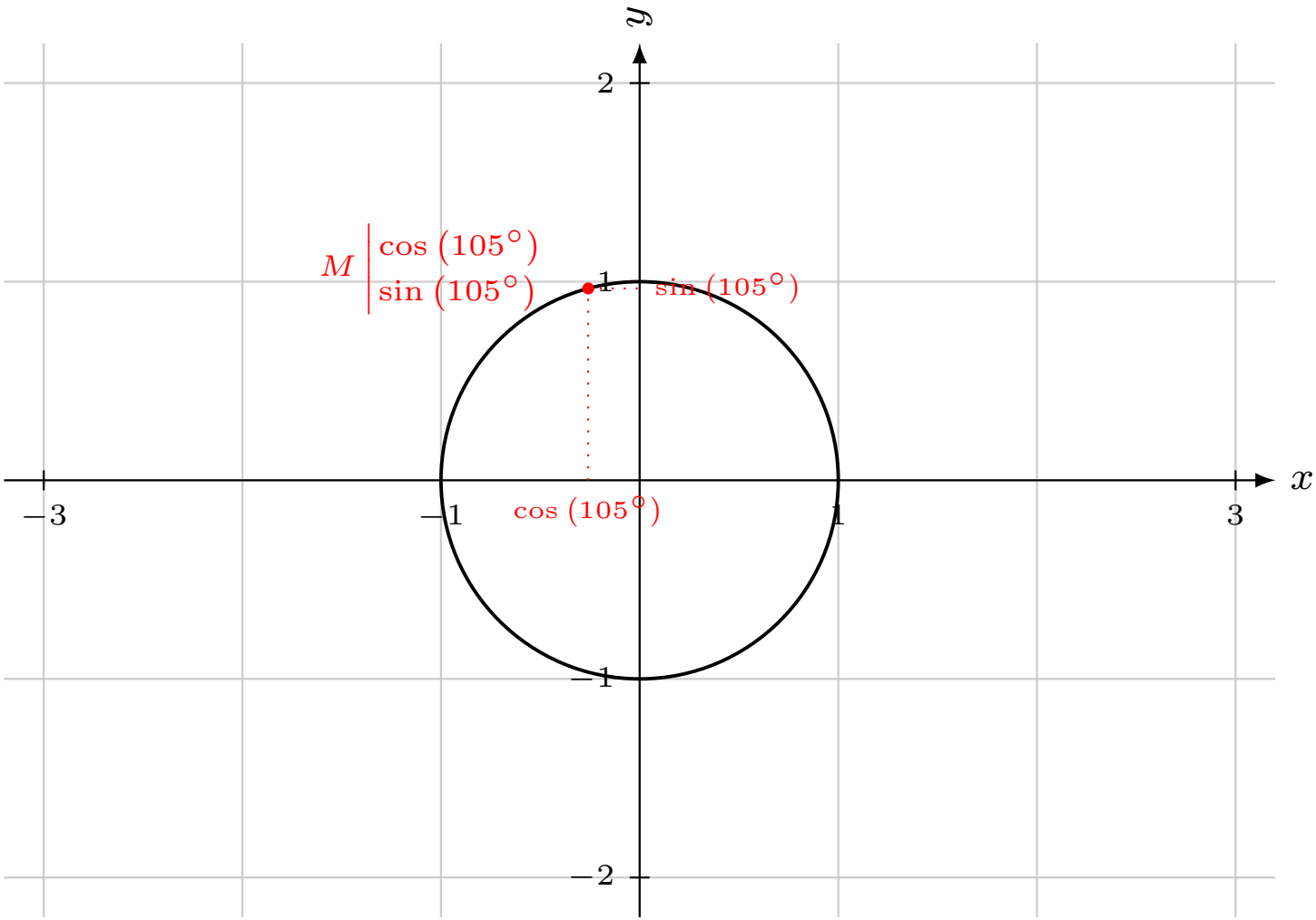
3. Représentation graphique d'une ellipse.



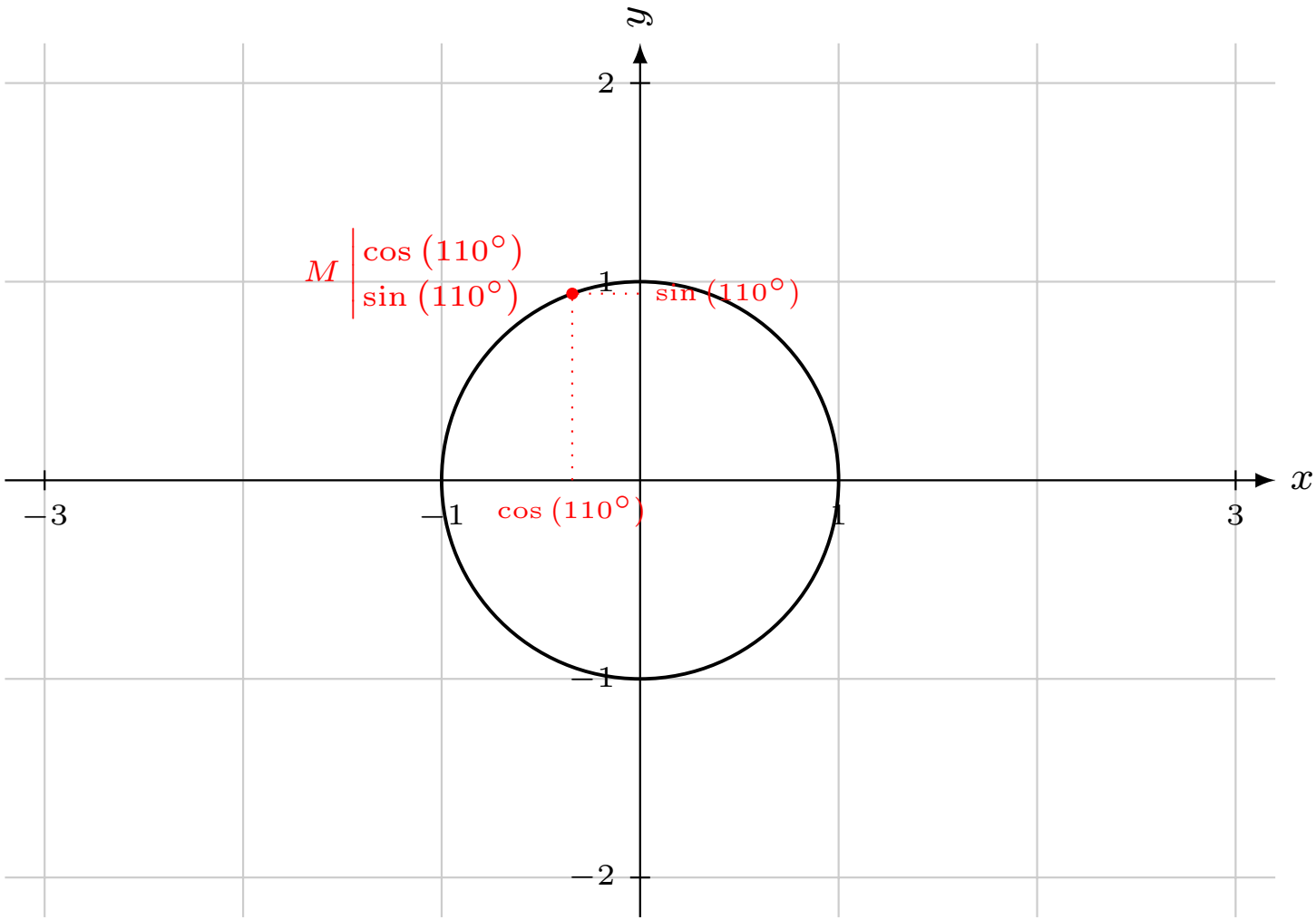
3. Représentation graphique d'une ellipse.



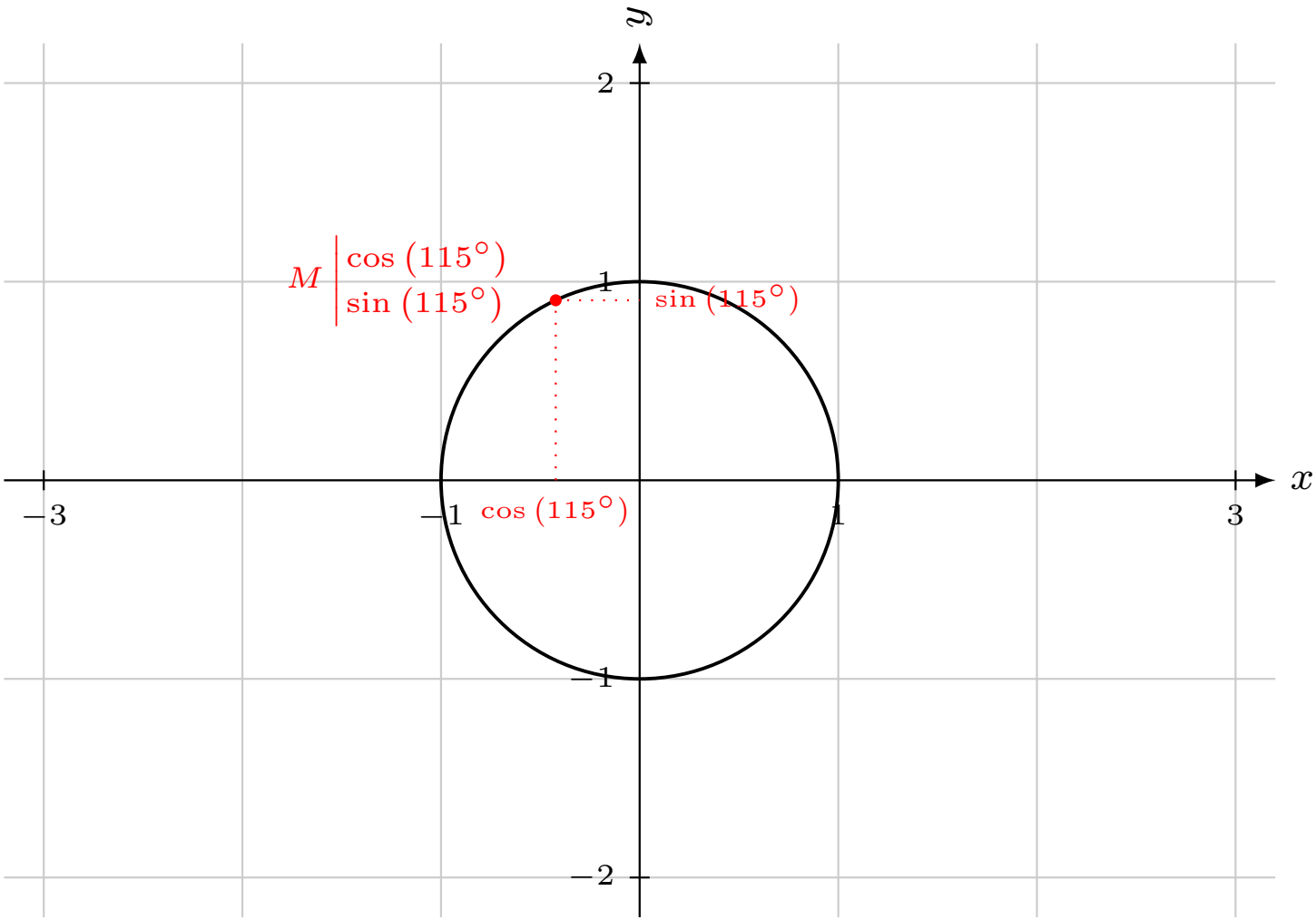
3. Représentation graphique d'une ellipse.



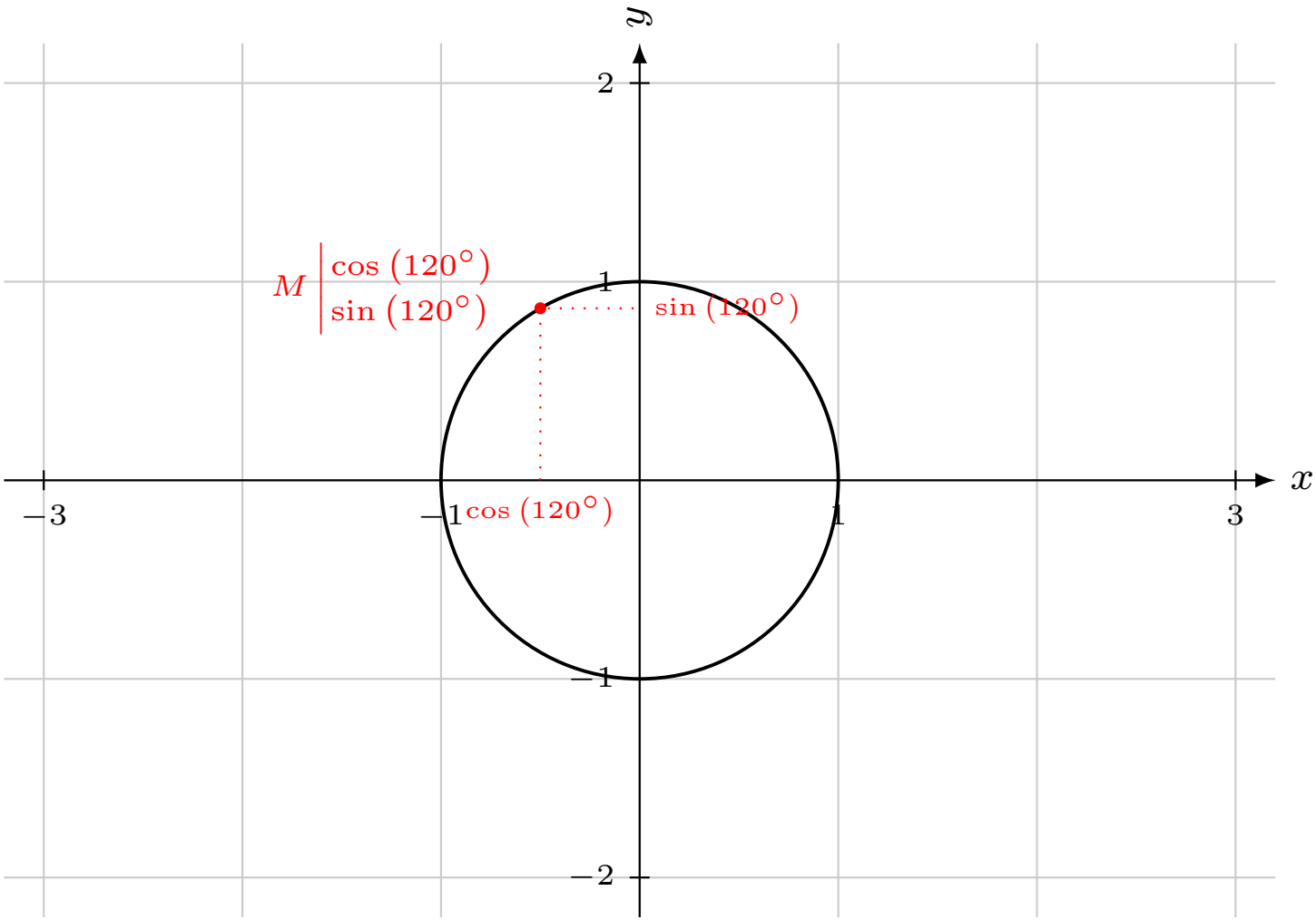
3. Représentation graphique d'une ellipse.



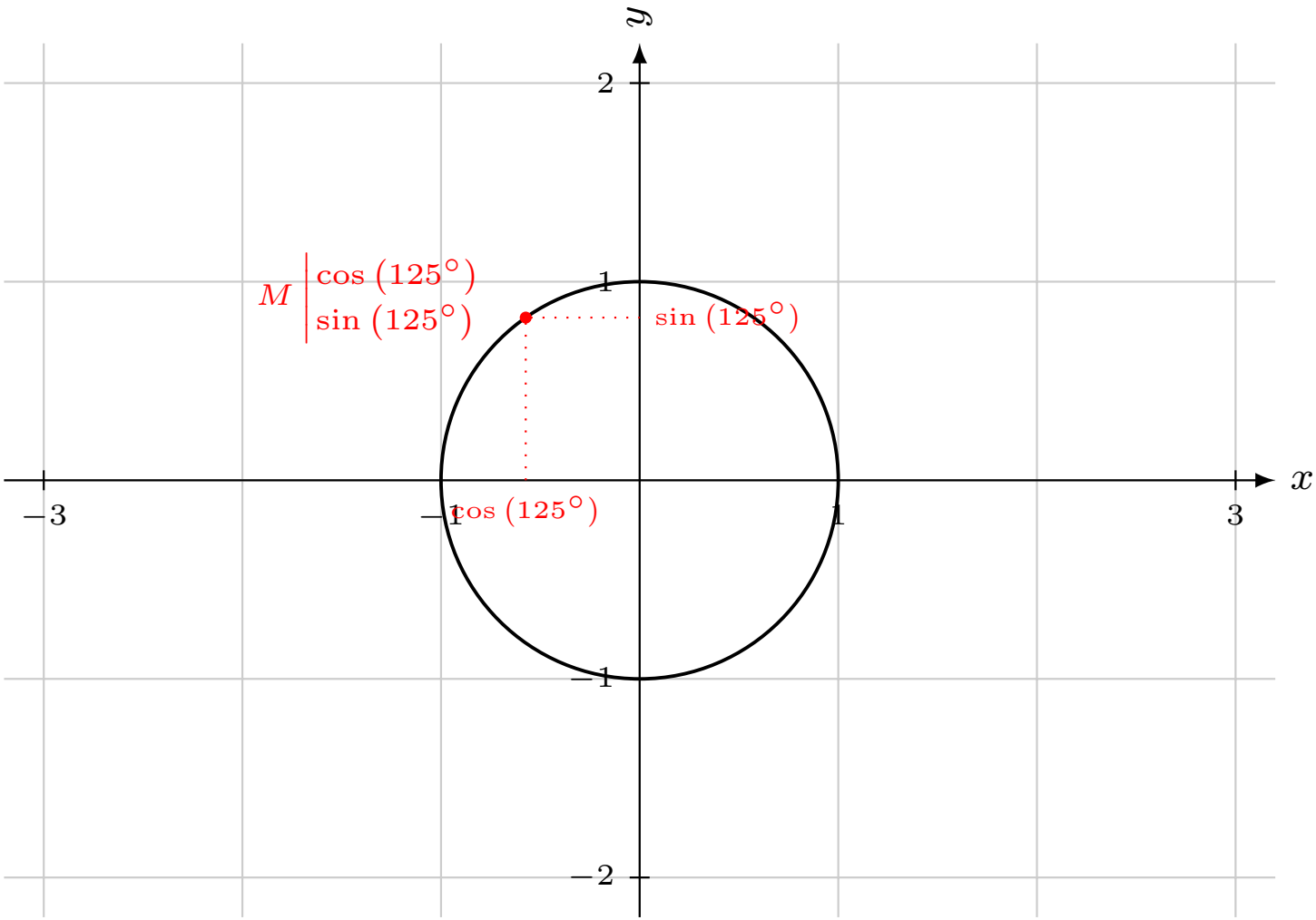
3. Représentation graphique d'une ellipse.



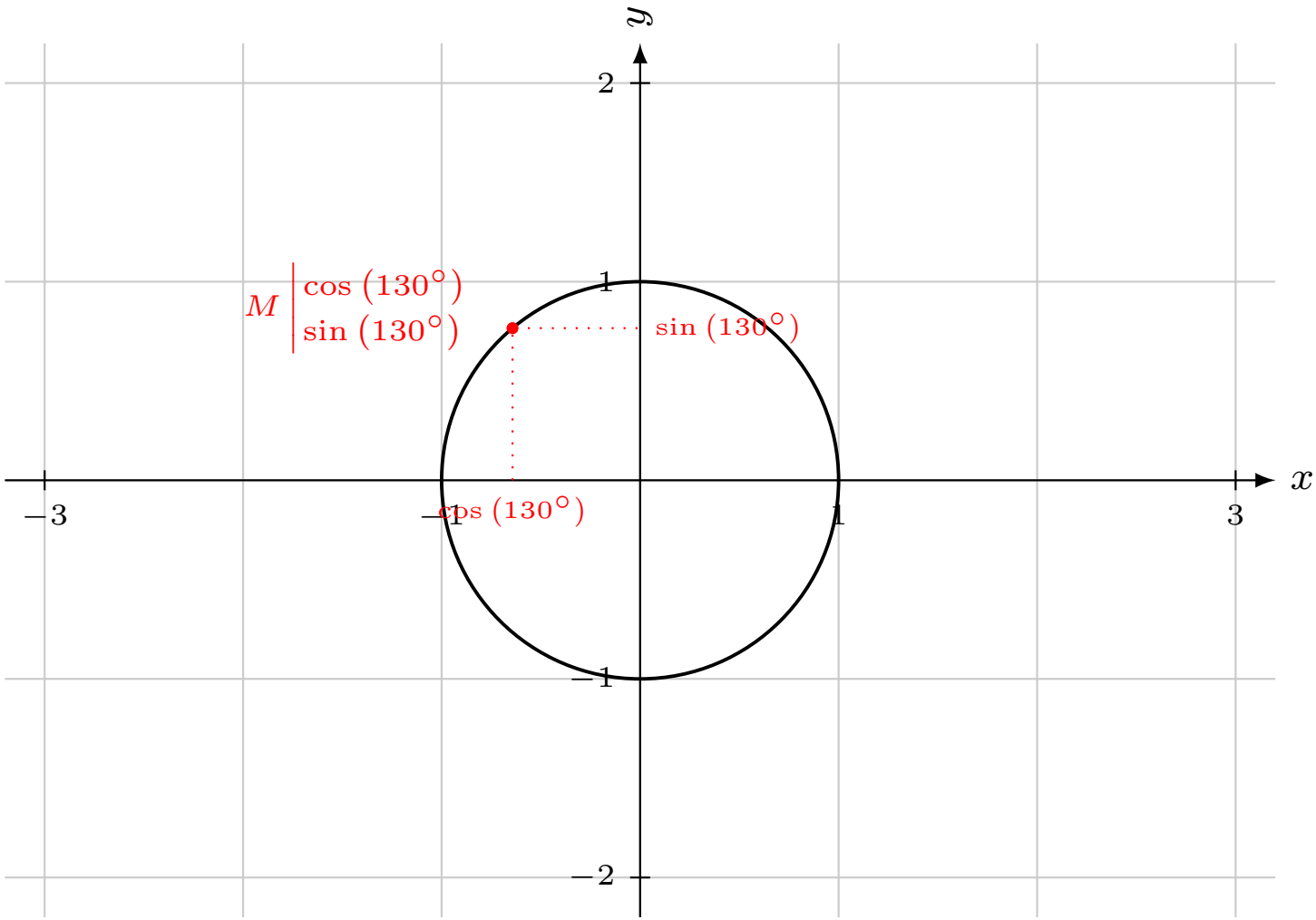
3. Représentation graphique d'une ellipse.



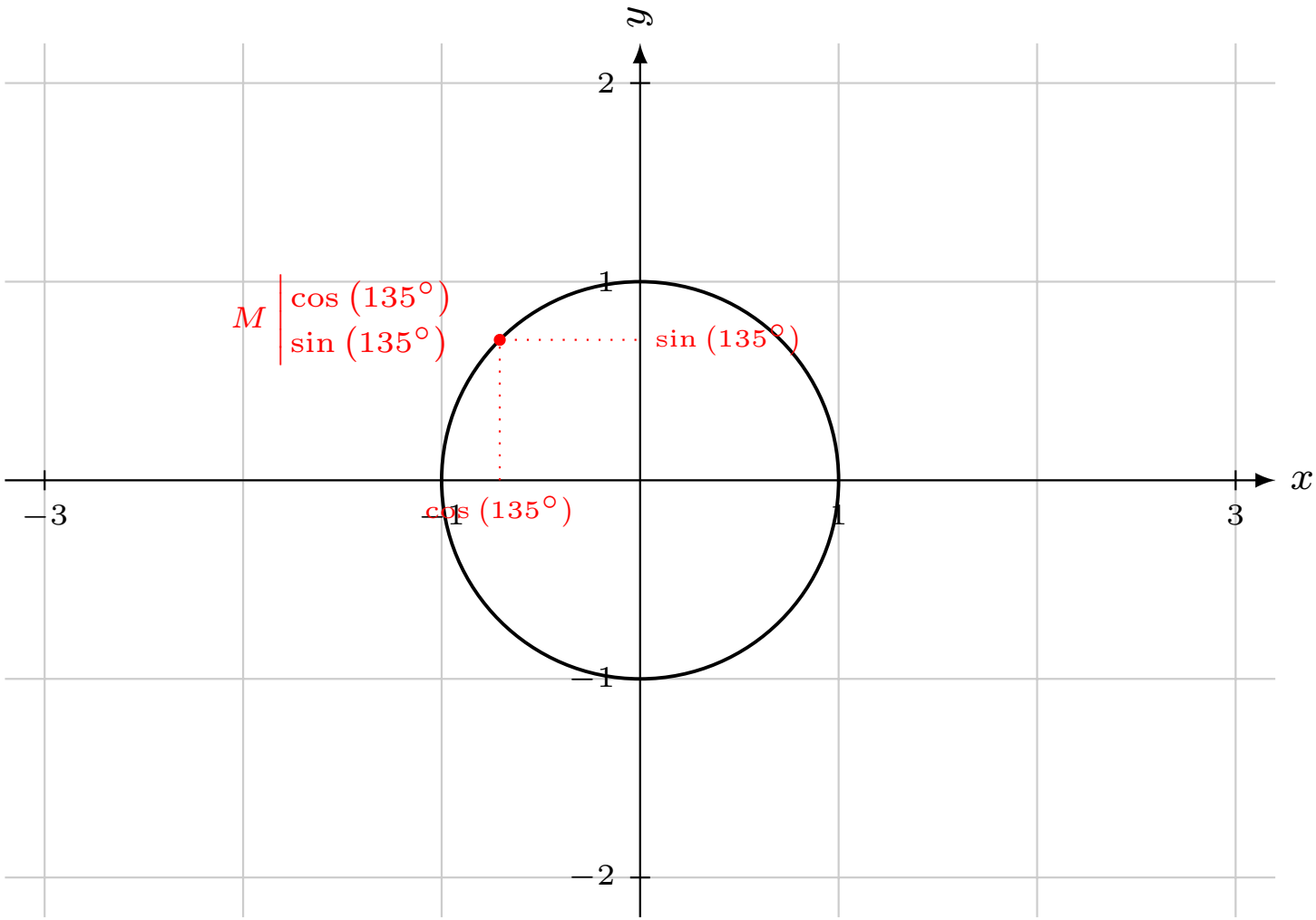
3. Représentation graphique d'une ellipse.



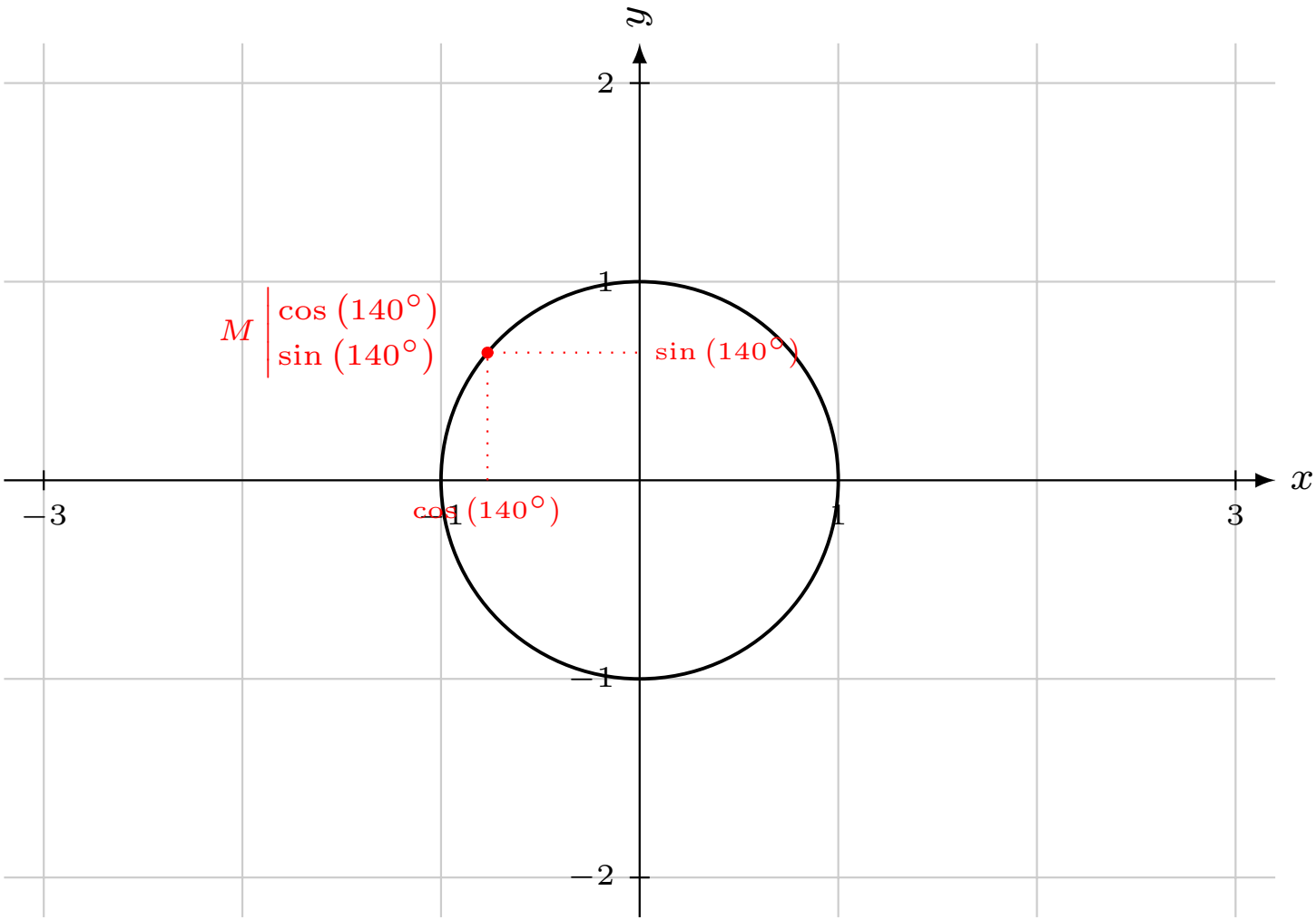
3. Représentation graphique d'une ellipse.



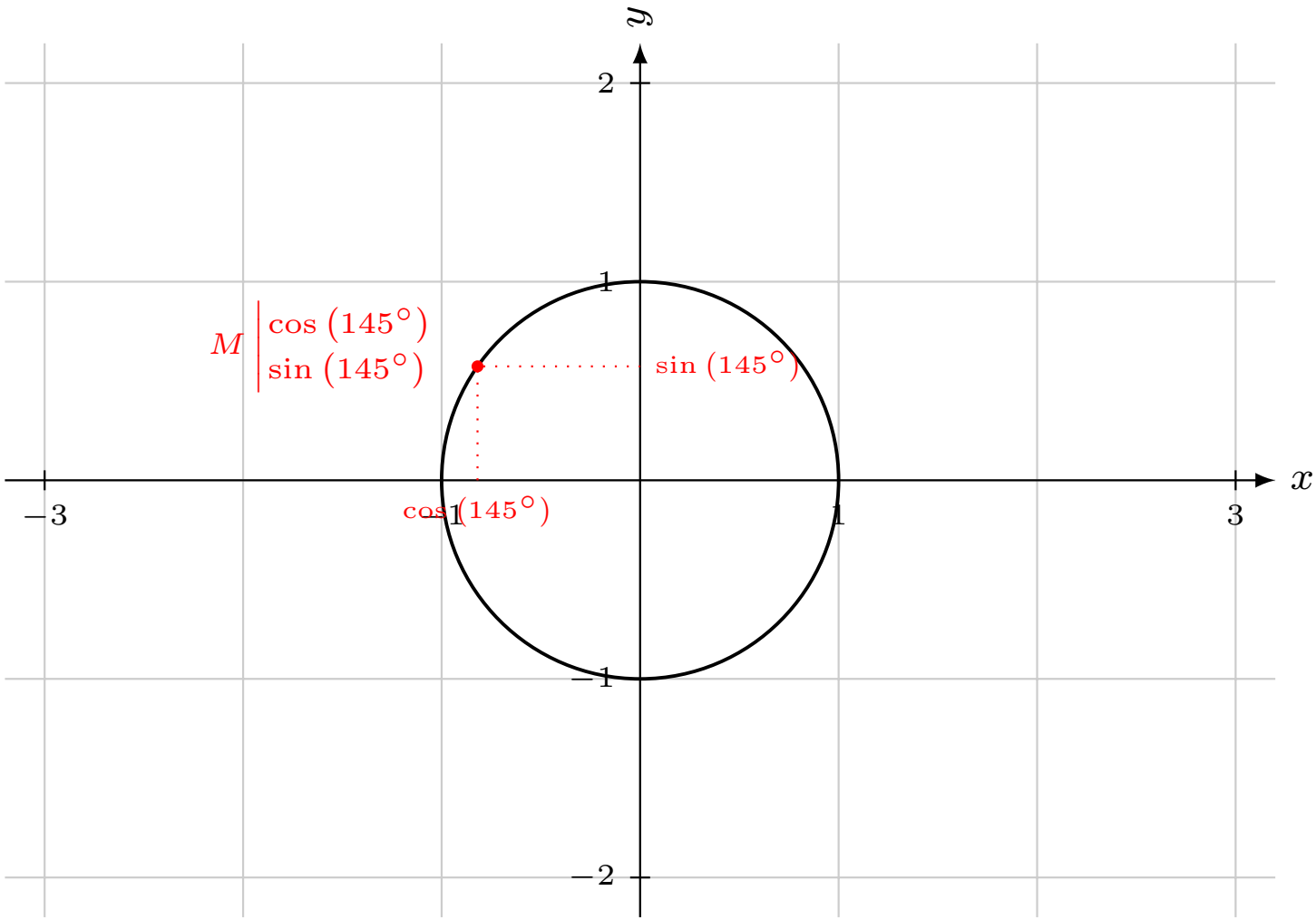
3. Représentation graphique d'une ellipse.



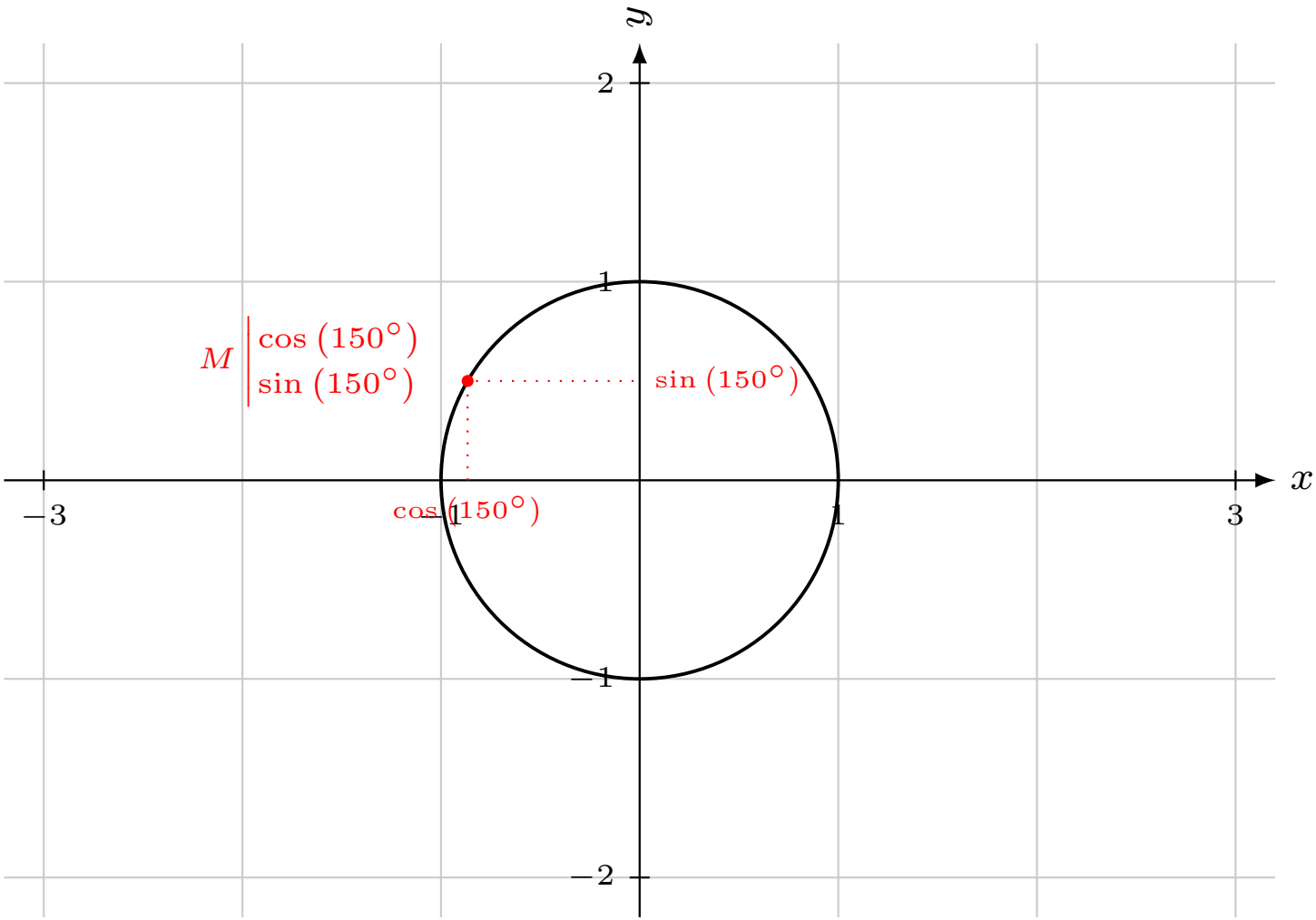
3. Représentation graphique d'une ellipse.



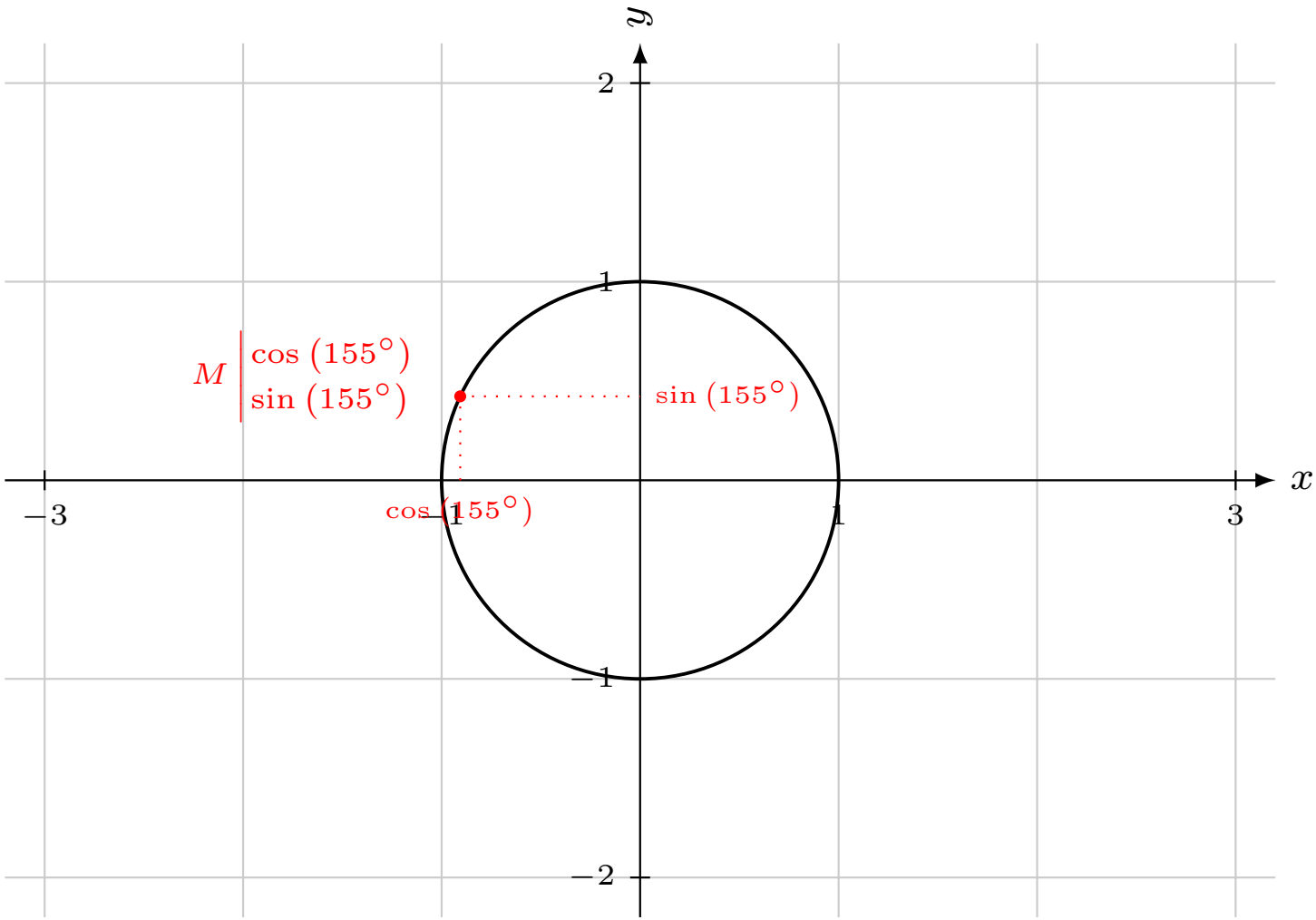
3. Représentation graphique d'une ellipse.



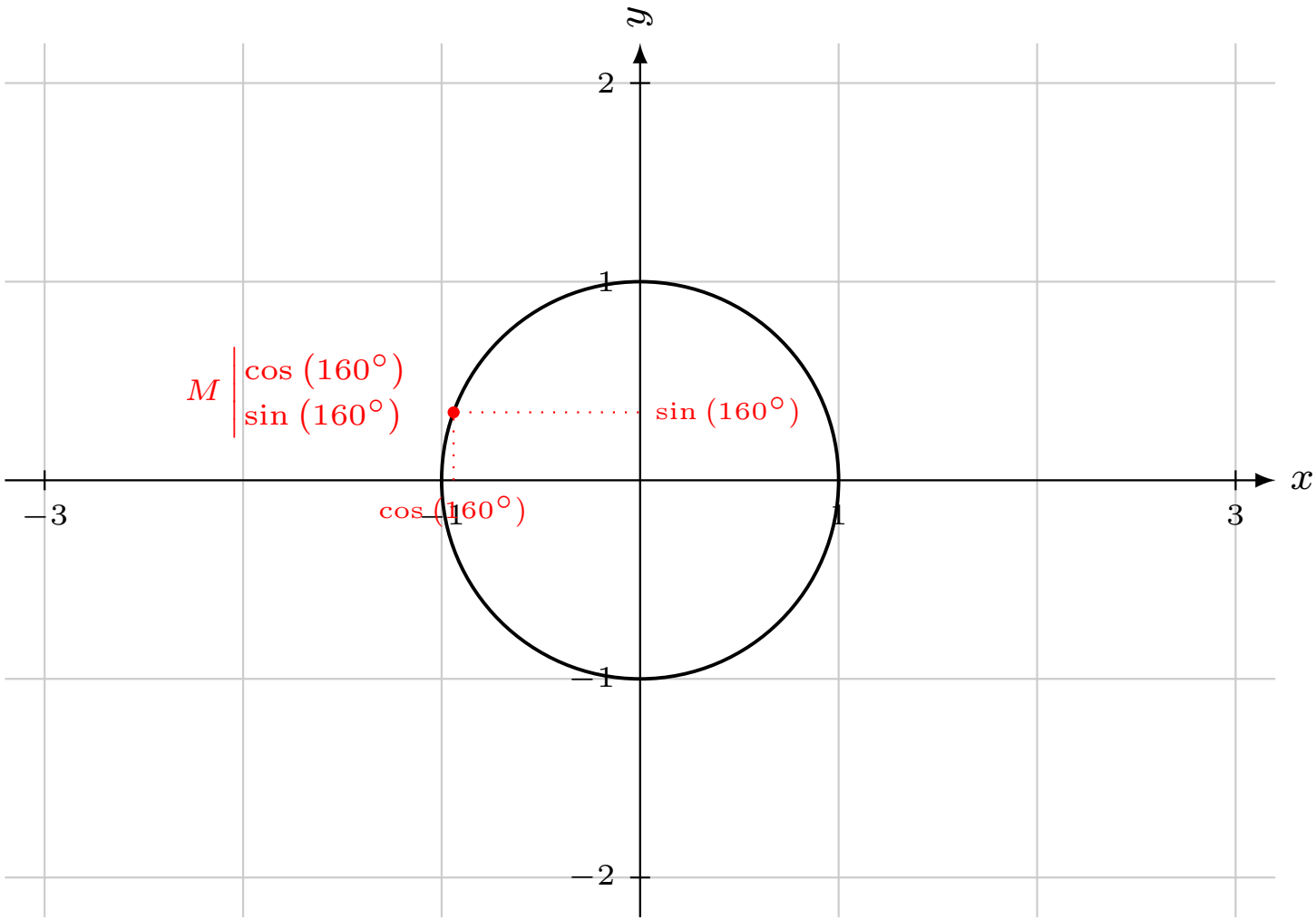
3. Représentation graphique d'une ellipse.



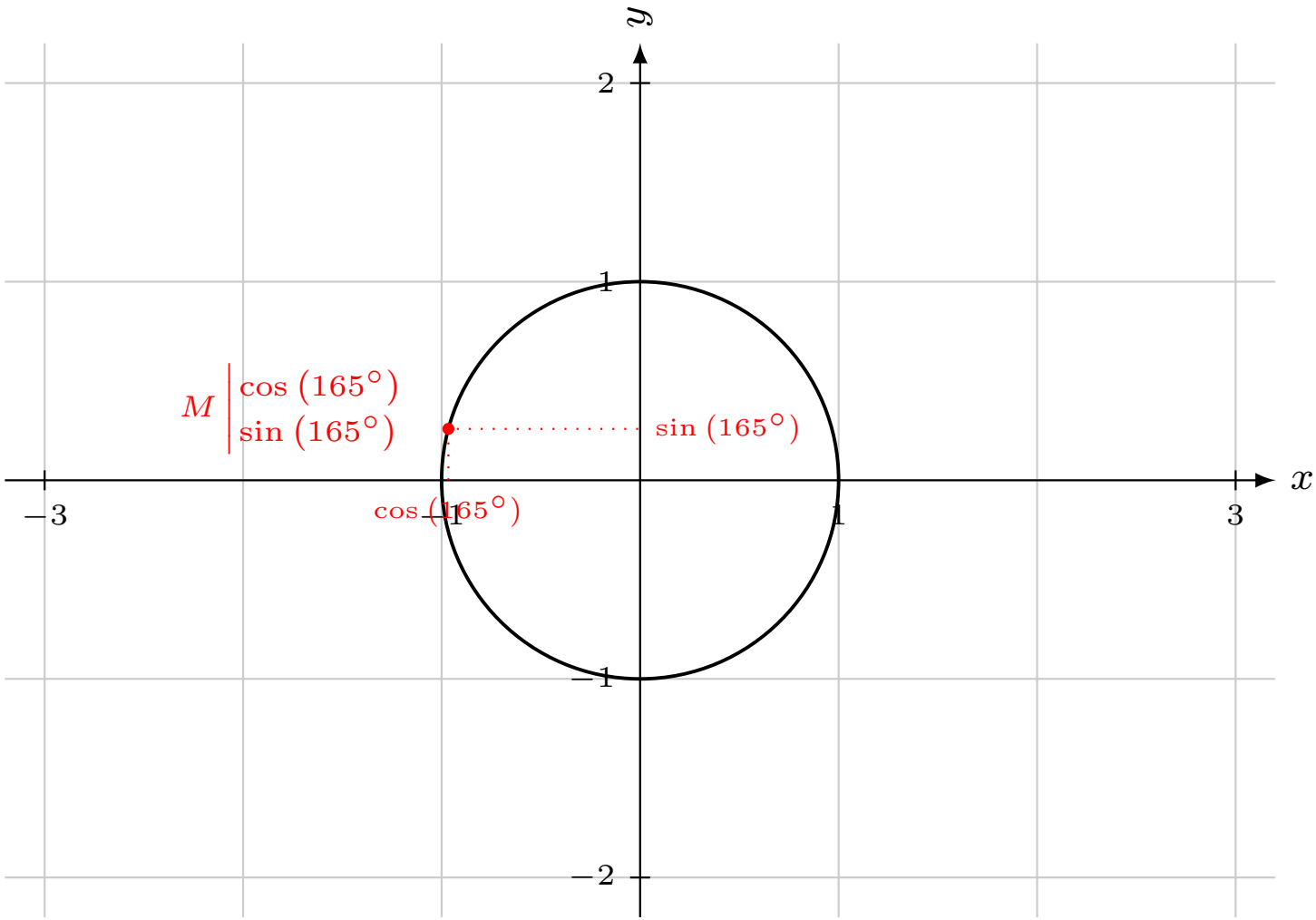
3. Représentation graphique d'une ellipse.



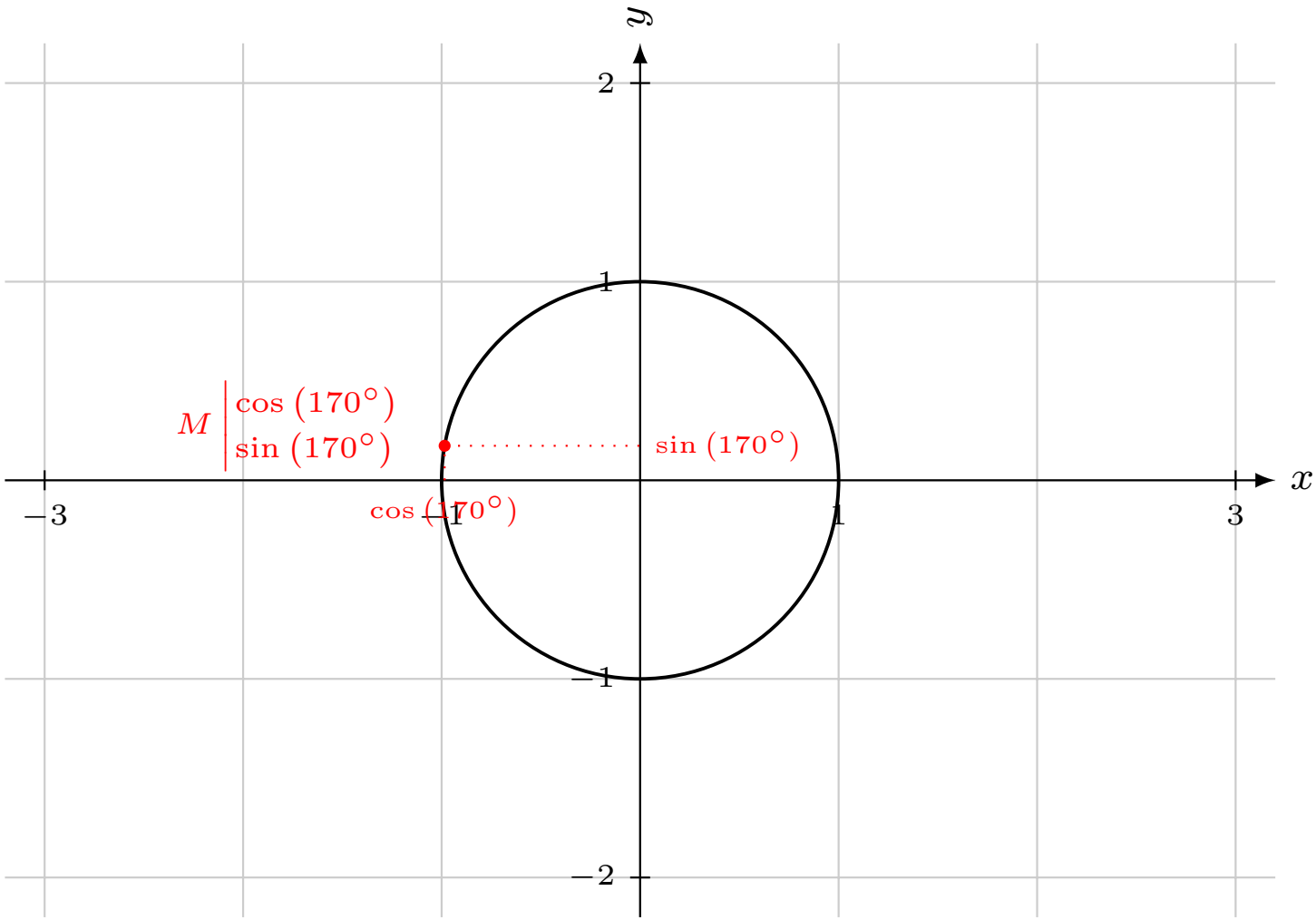
3. Représentation graphique d'une ellipse.



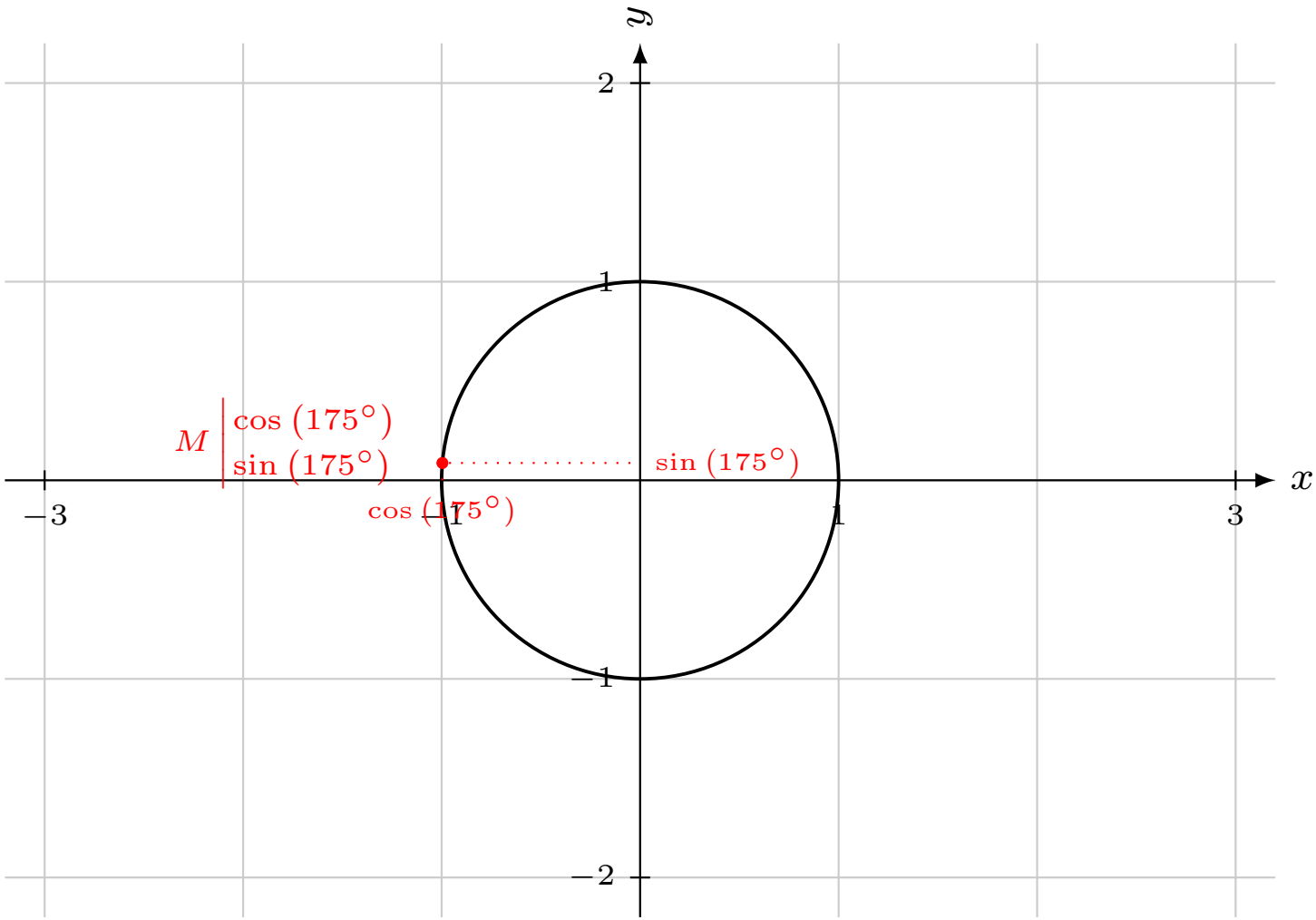
3. Représentation graphique d'une ellipse.



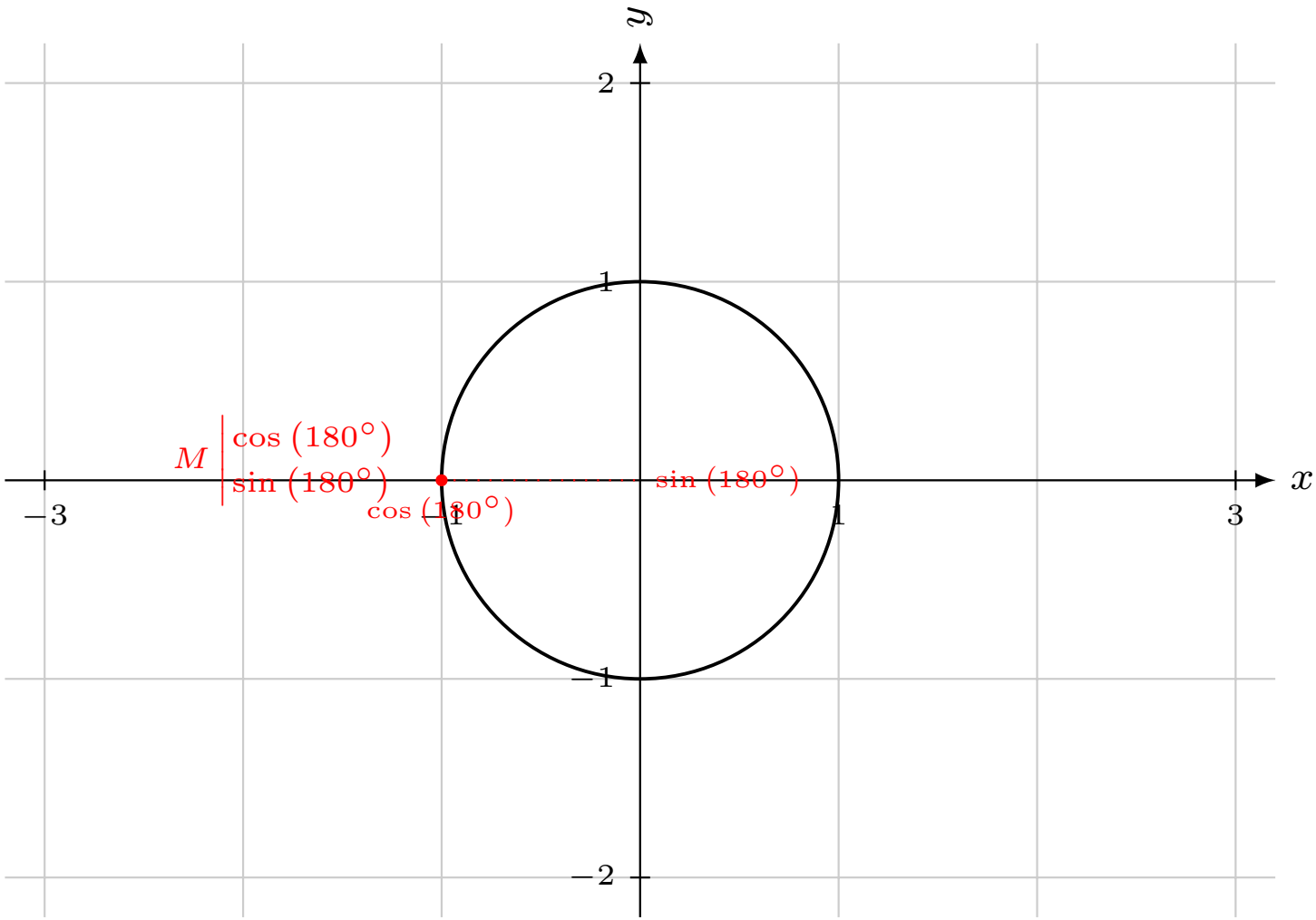
3. Représentation graphique d'une ellipse.



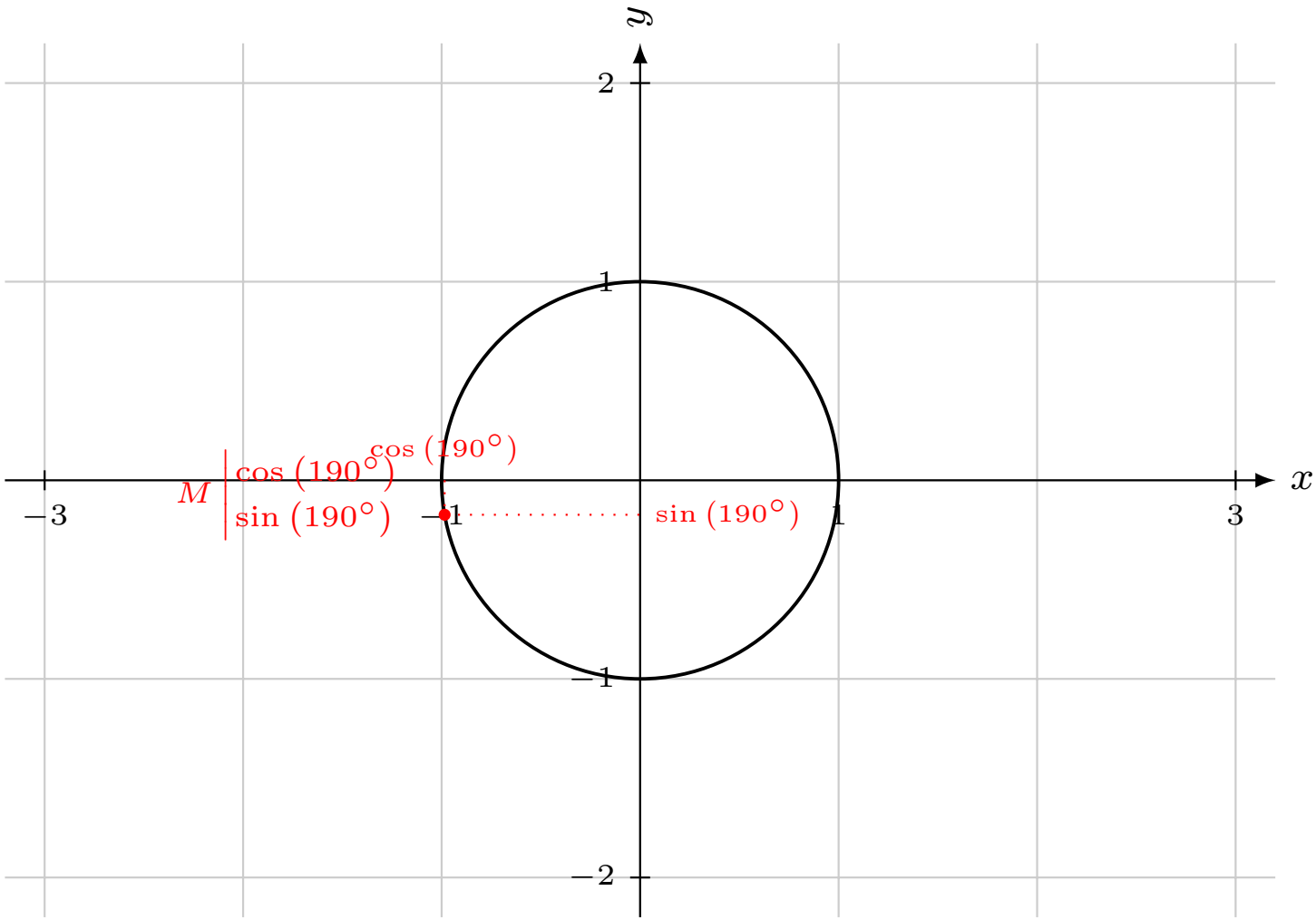
3. Représentation graphique d'une ellipse.



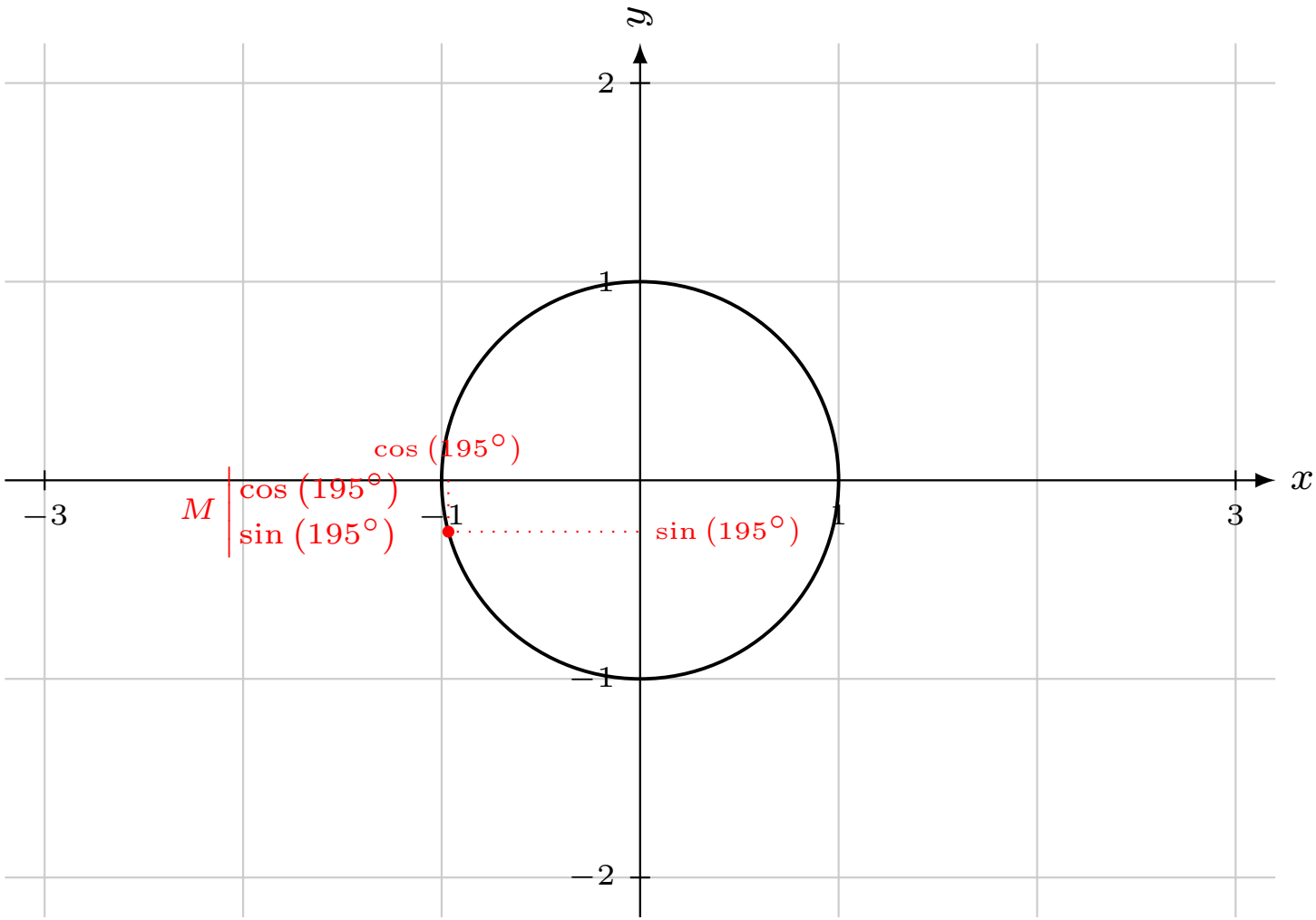
3. Représentation graphique d'une ellipse.



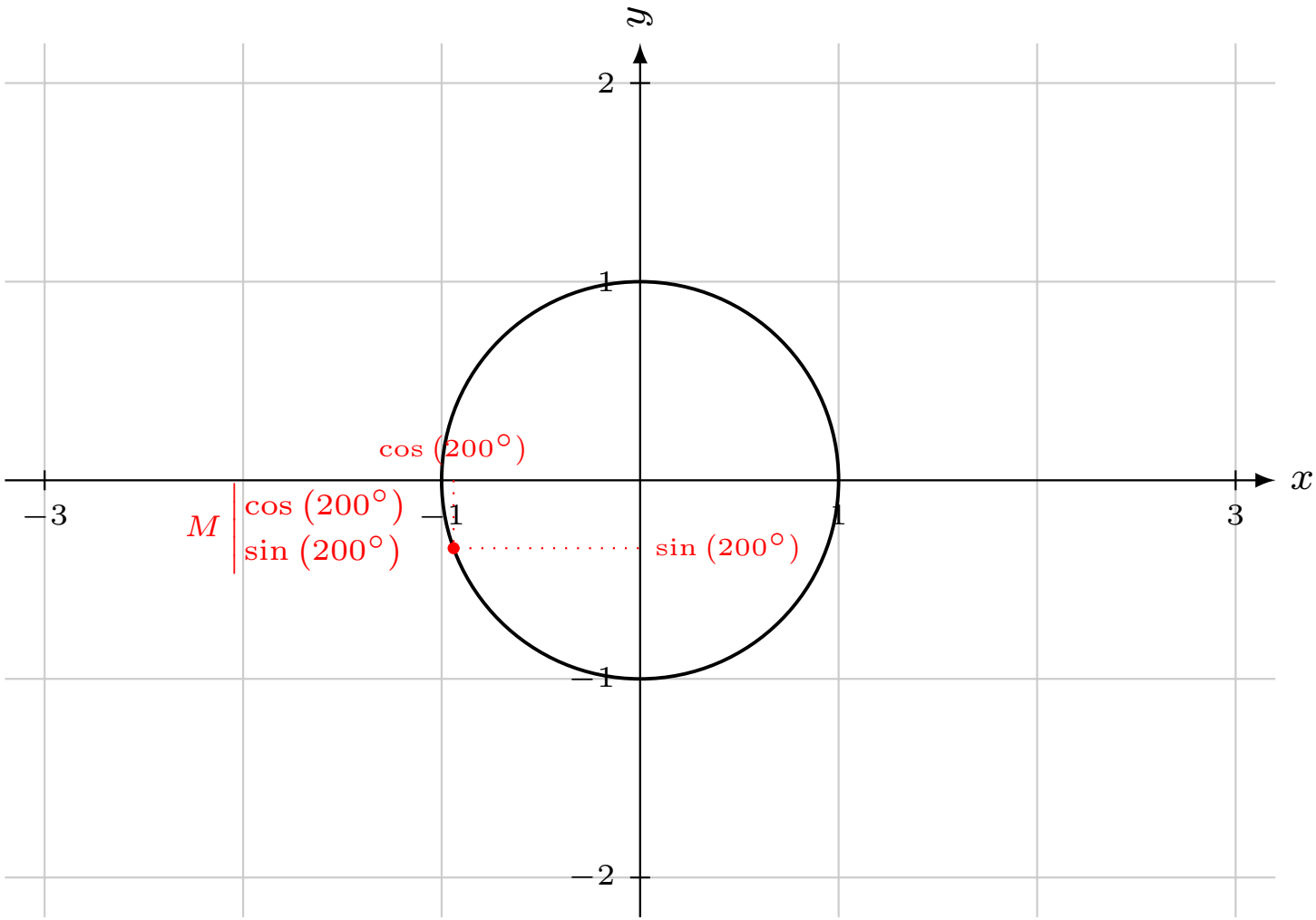
3. Représentation graphique d'une ellipse.



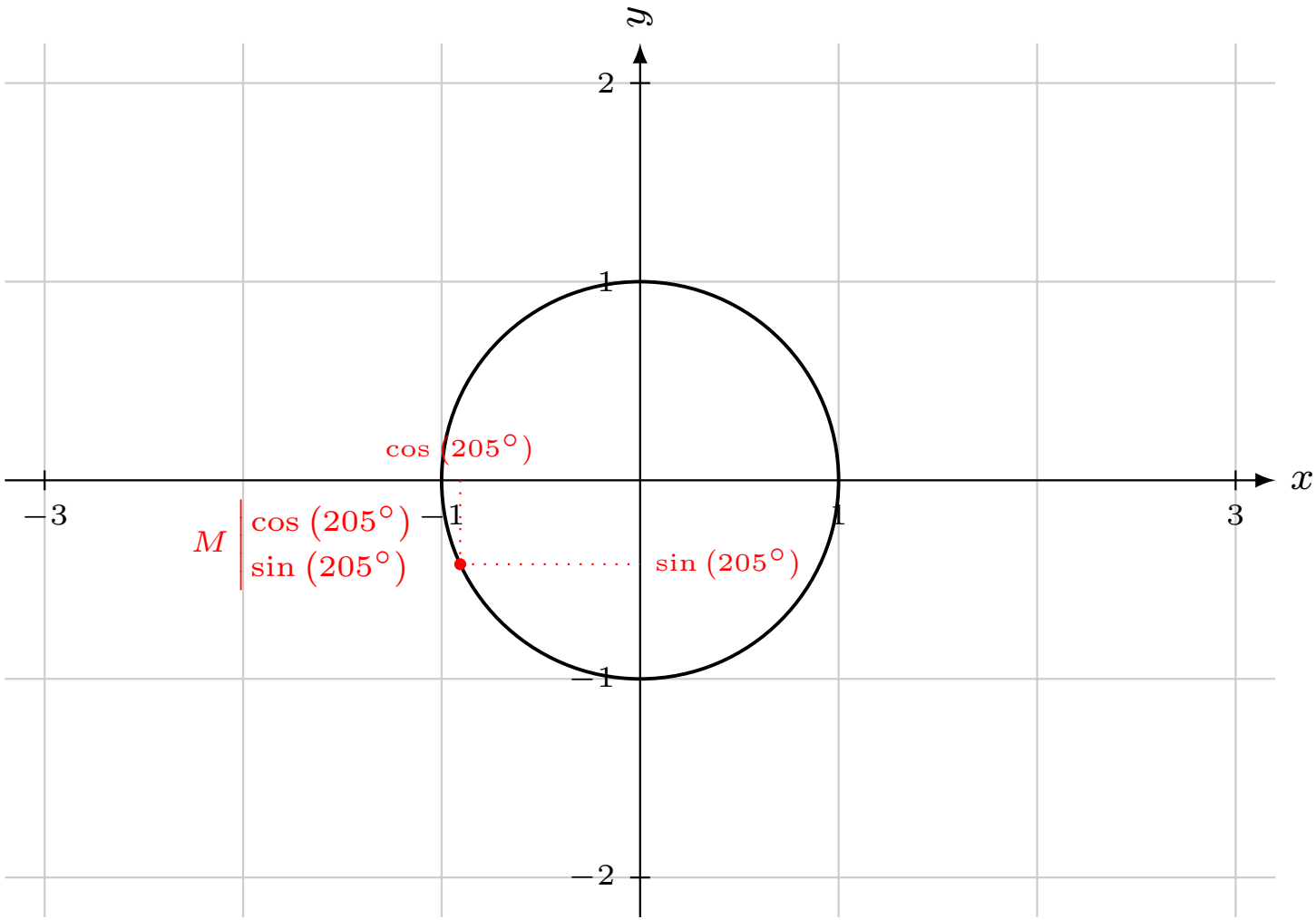
3. Représentation graphique d'une ellipse.



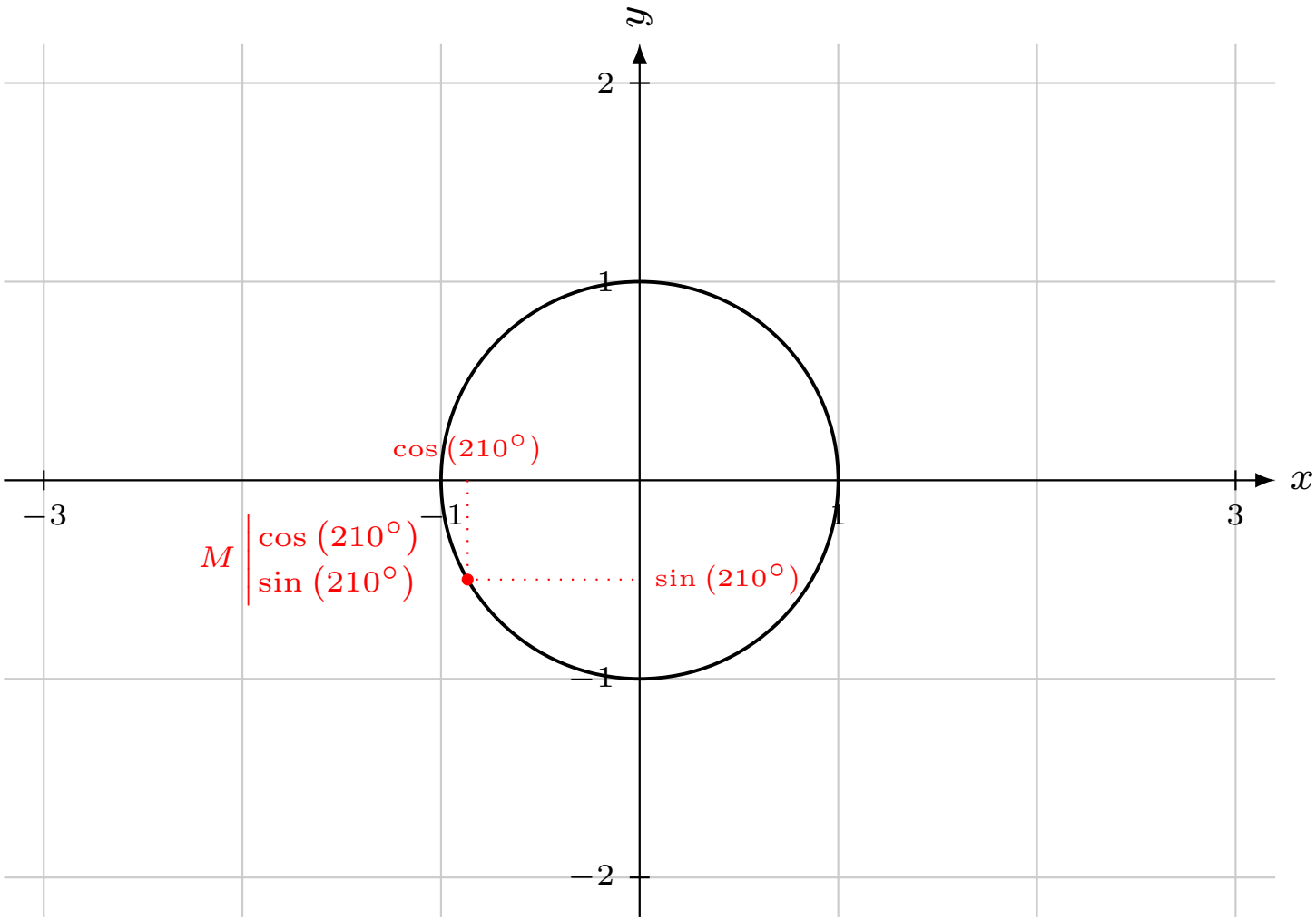
3. Représentation graphique d'une ellipse.



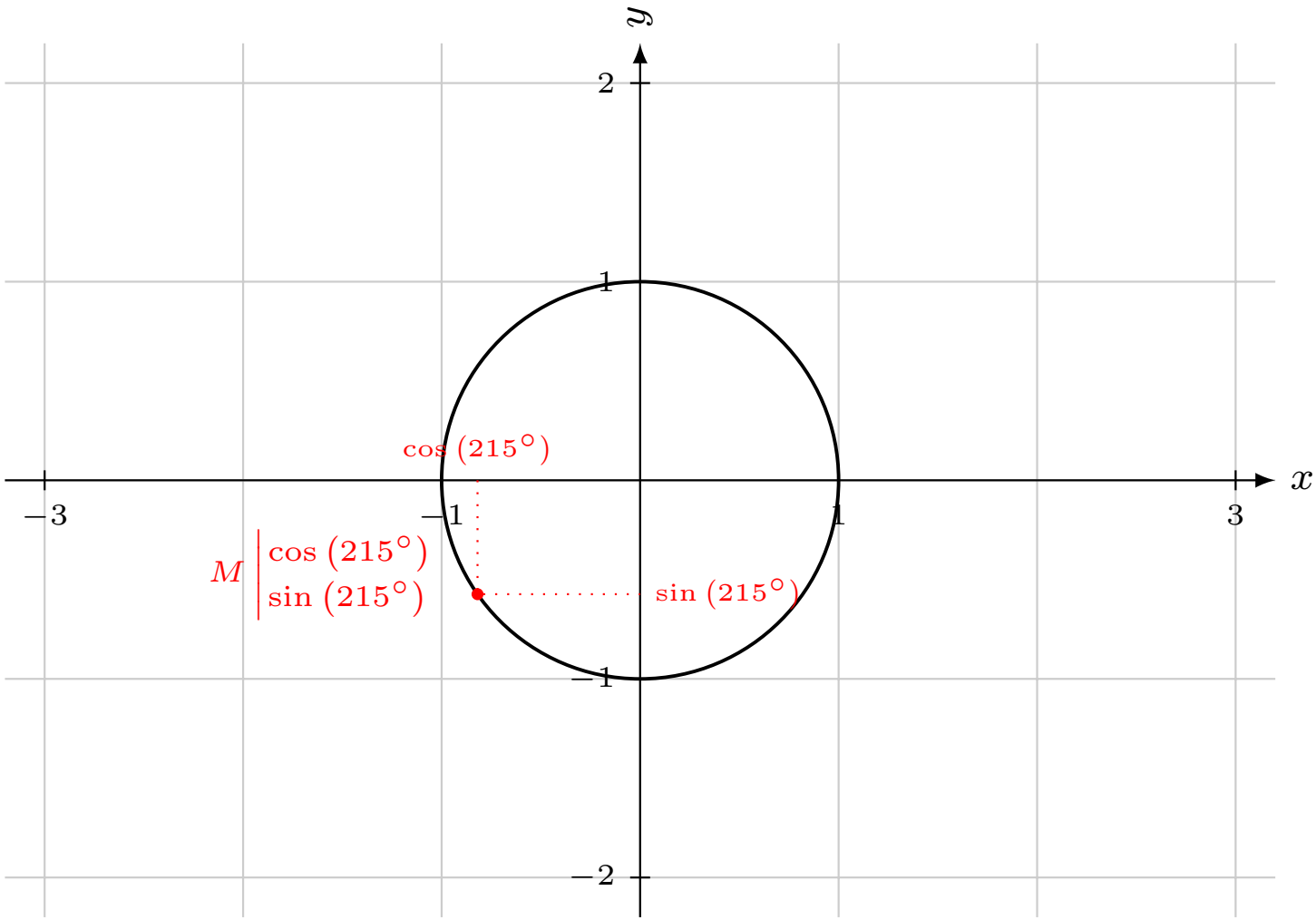
3. Représentation graphique d'une ellipse.



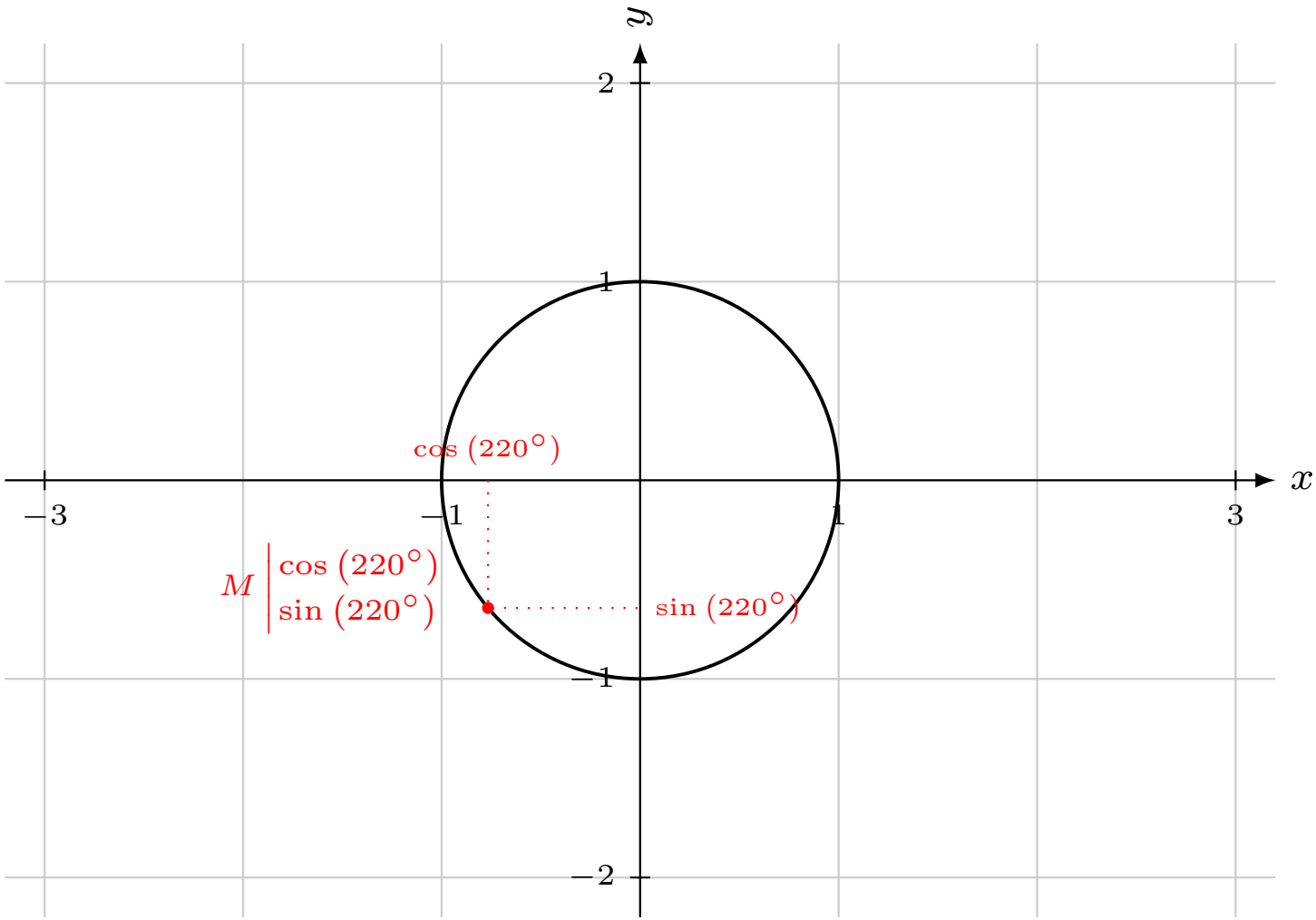
3. Représentation graphique d'une ellipse.



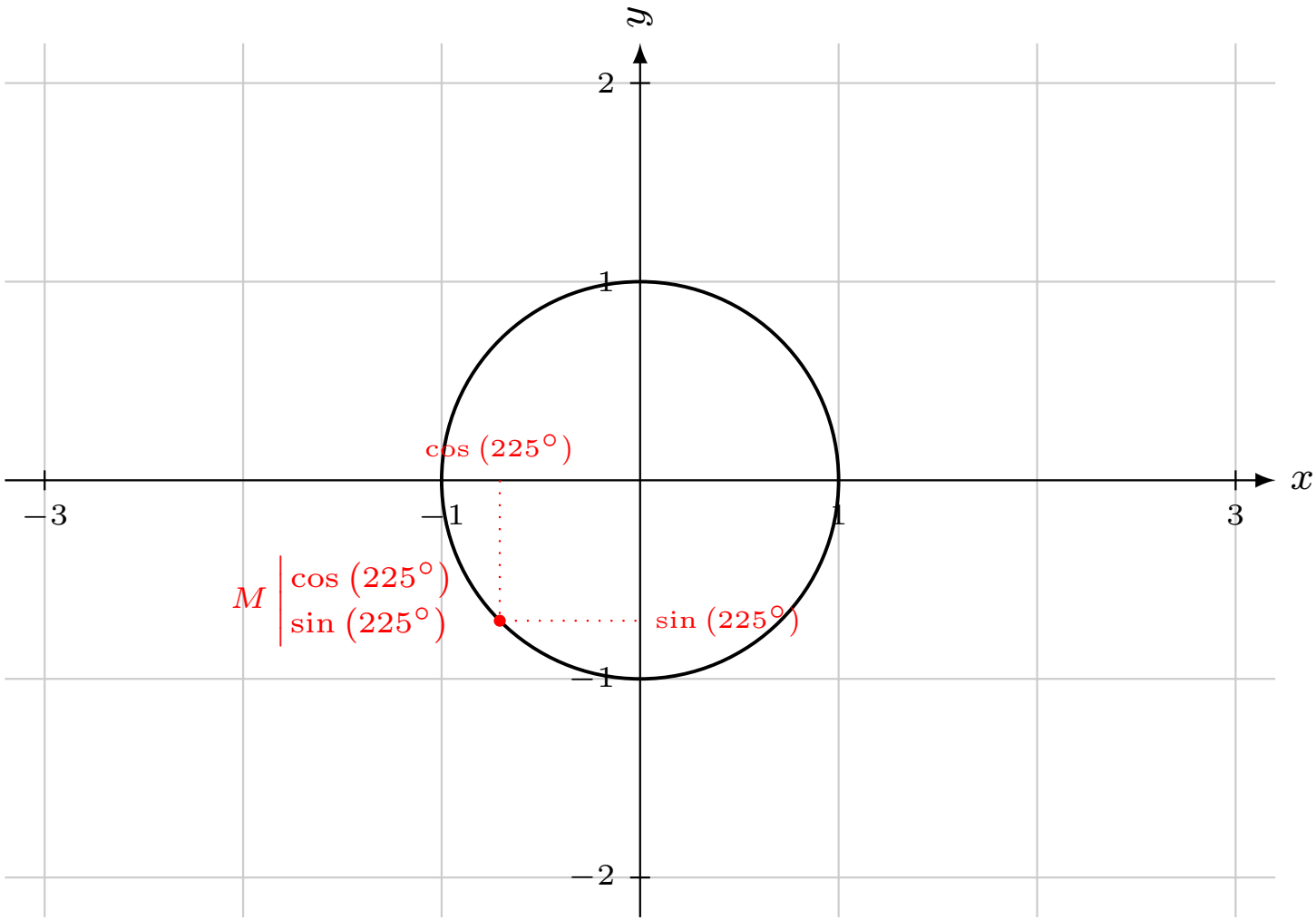
3. Représentation graphique d'une ellipse.



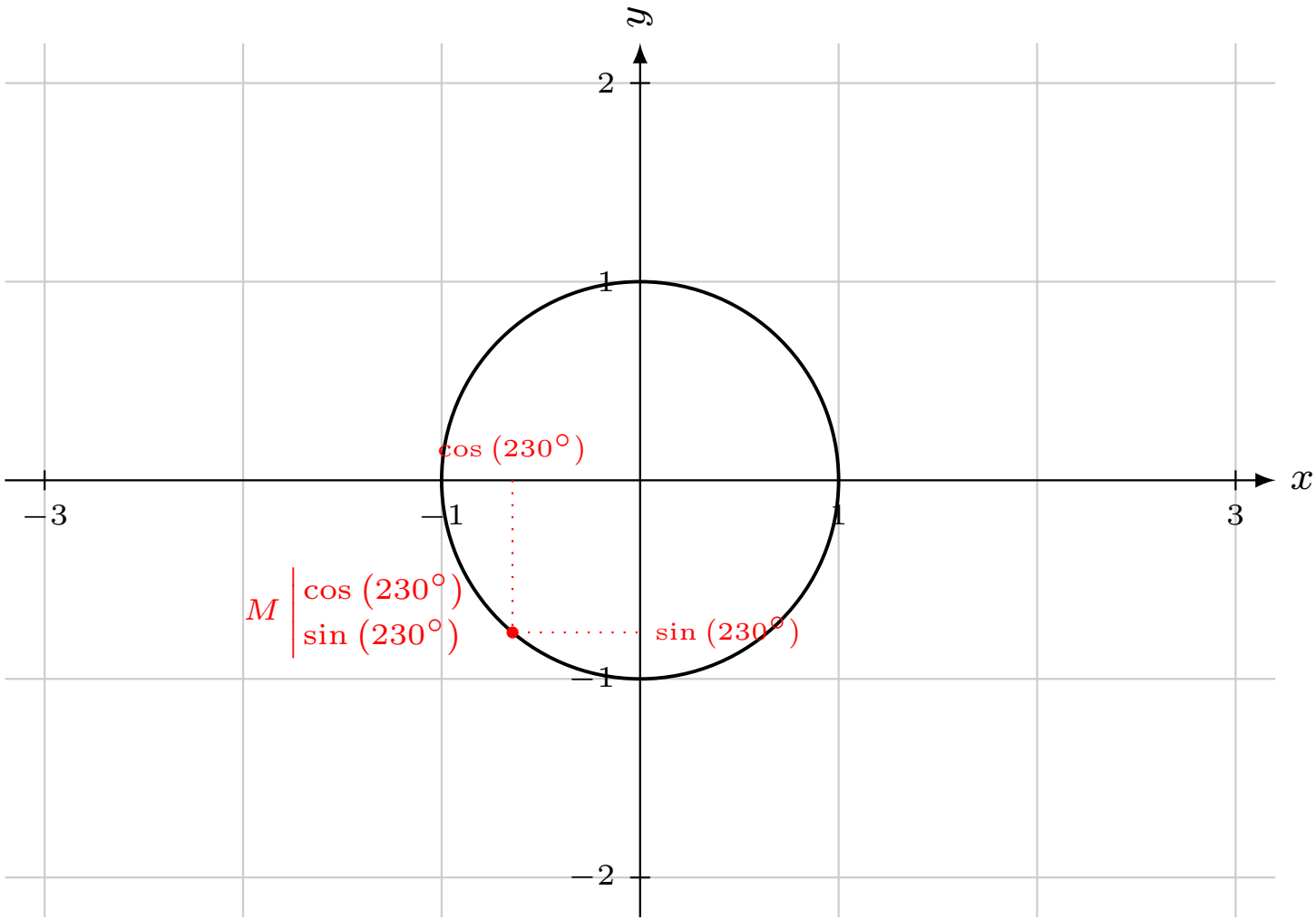
3. Représentation graphique d'une ellipse.



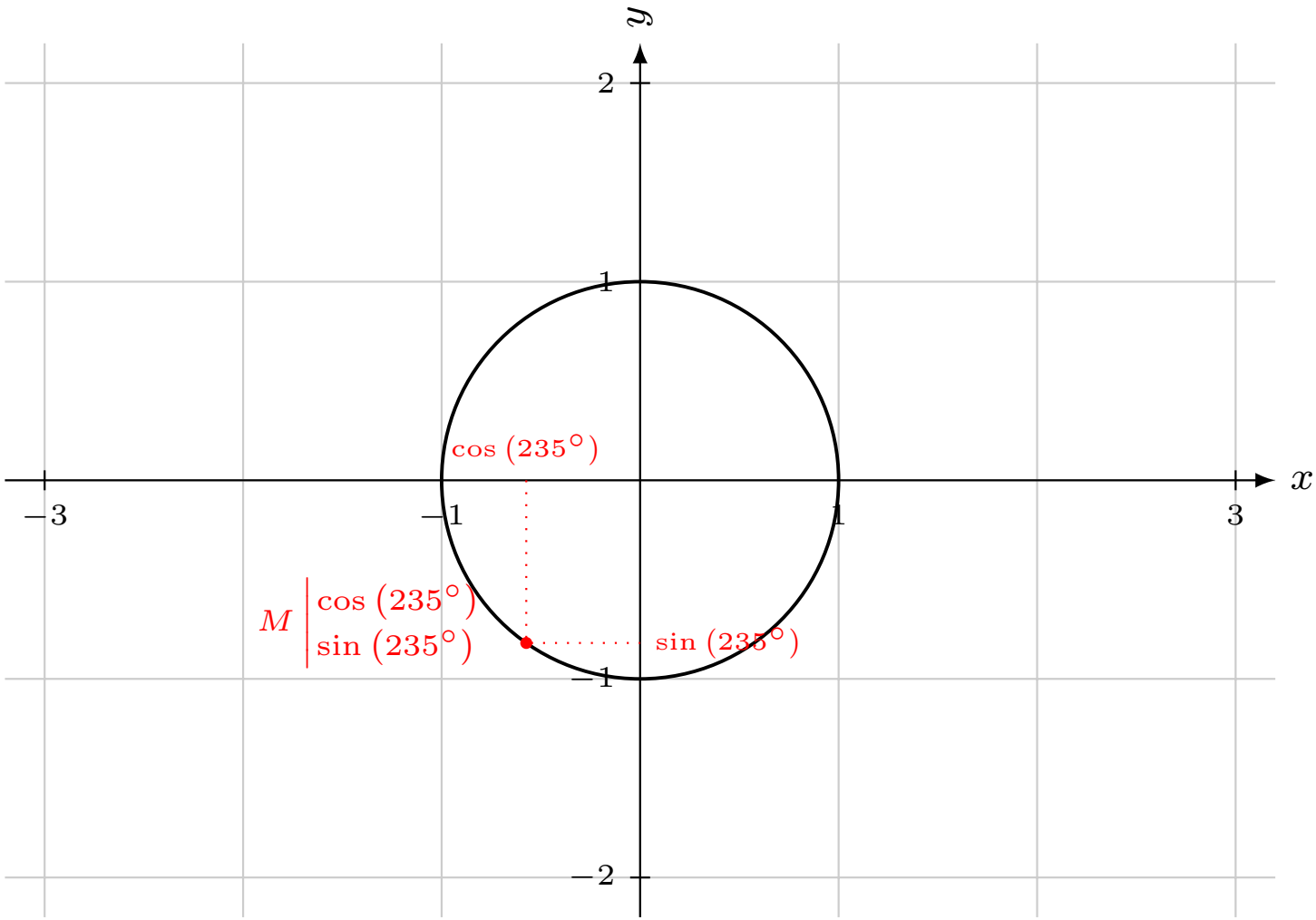
3. Représentation graphique d'une ellipse.



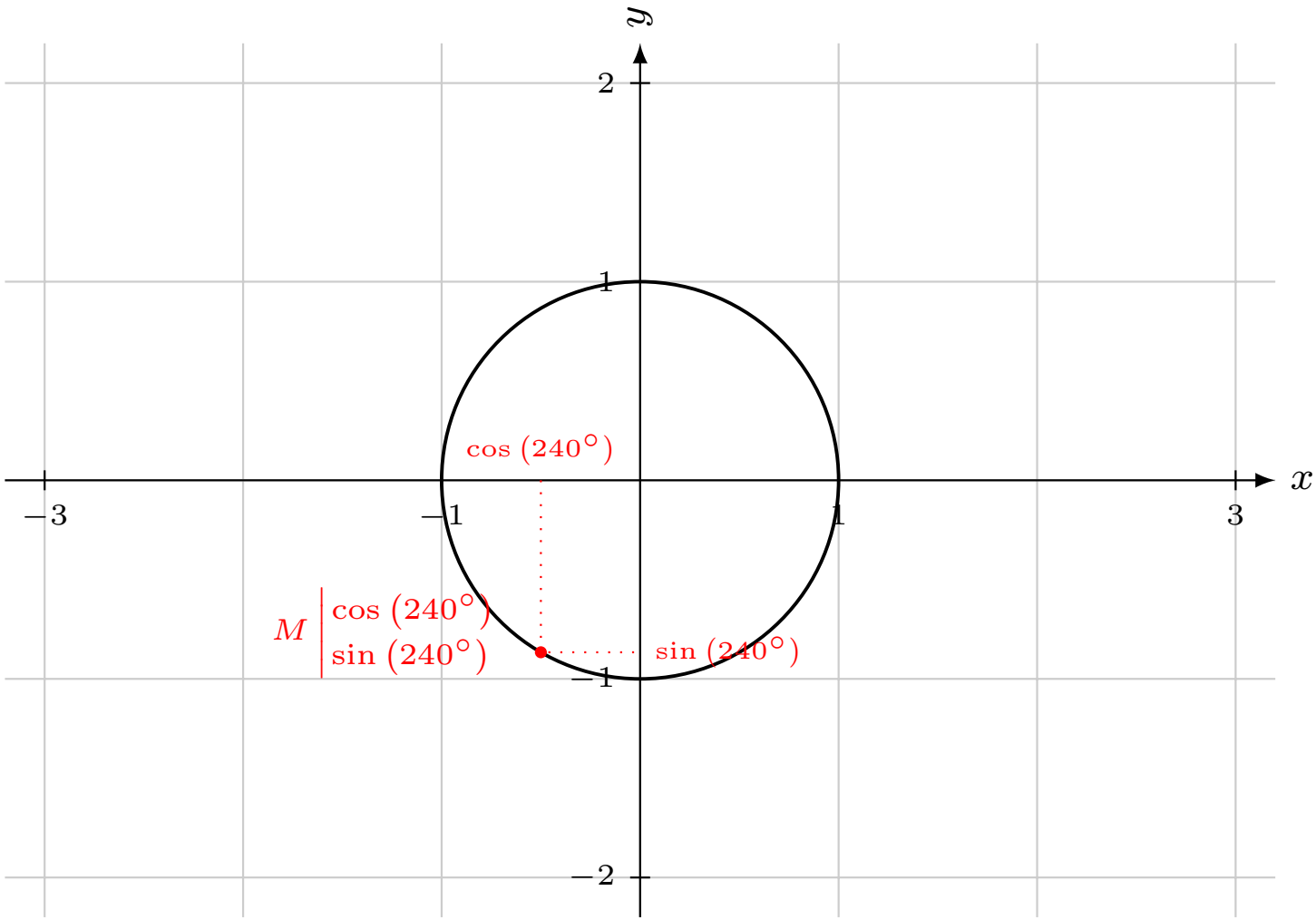
3. Représentation graphique d'une ellipse.



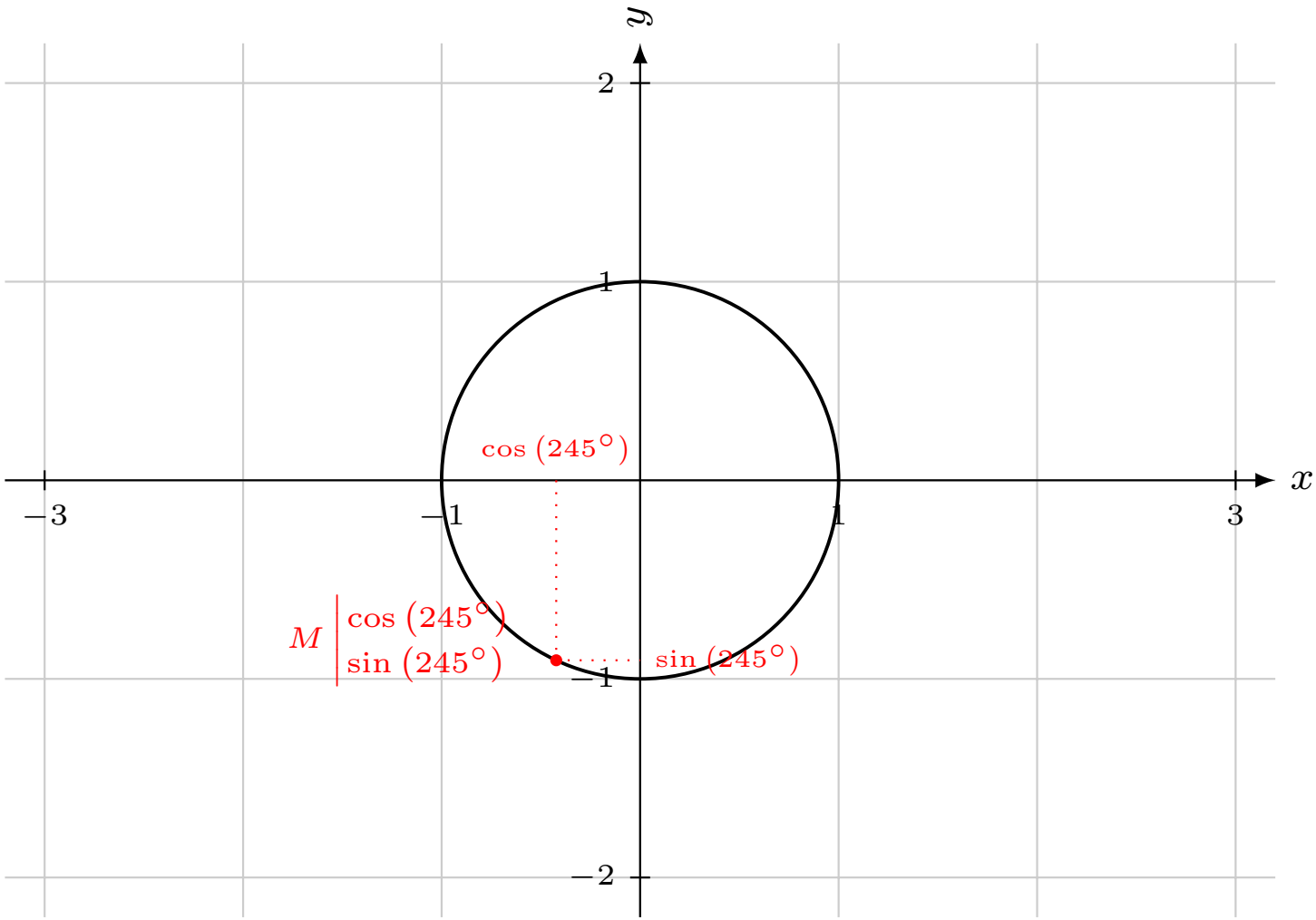
3. Représentation graphique d'une ellipse.



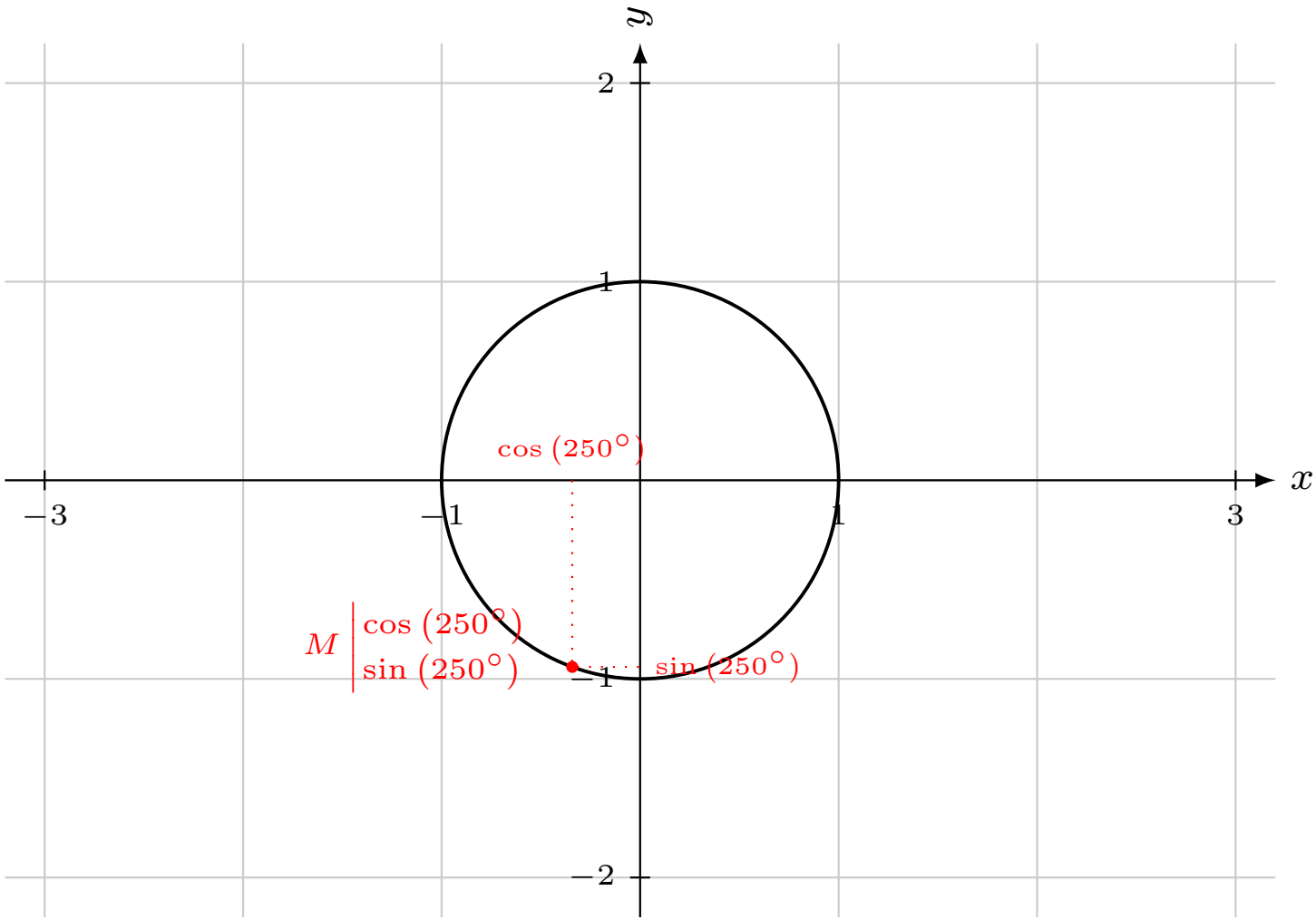
3. Représentation graphique d'une ellipse.



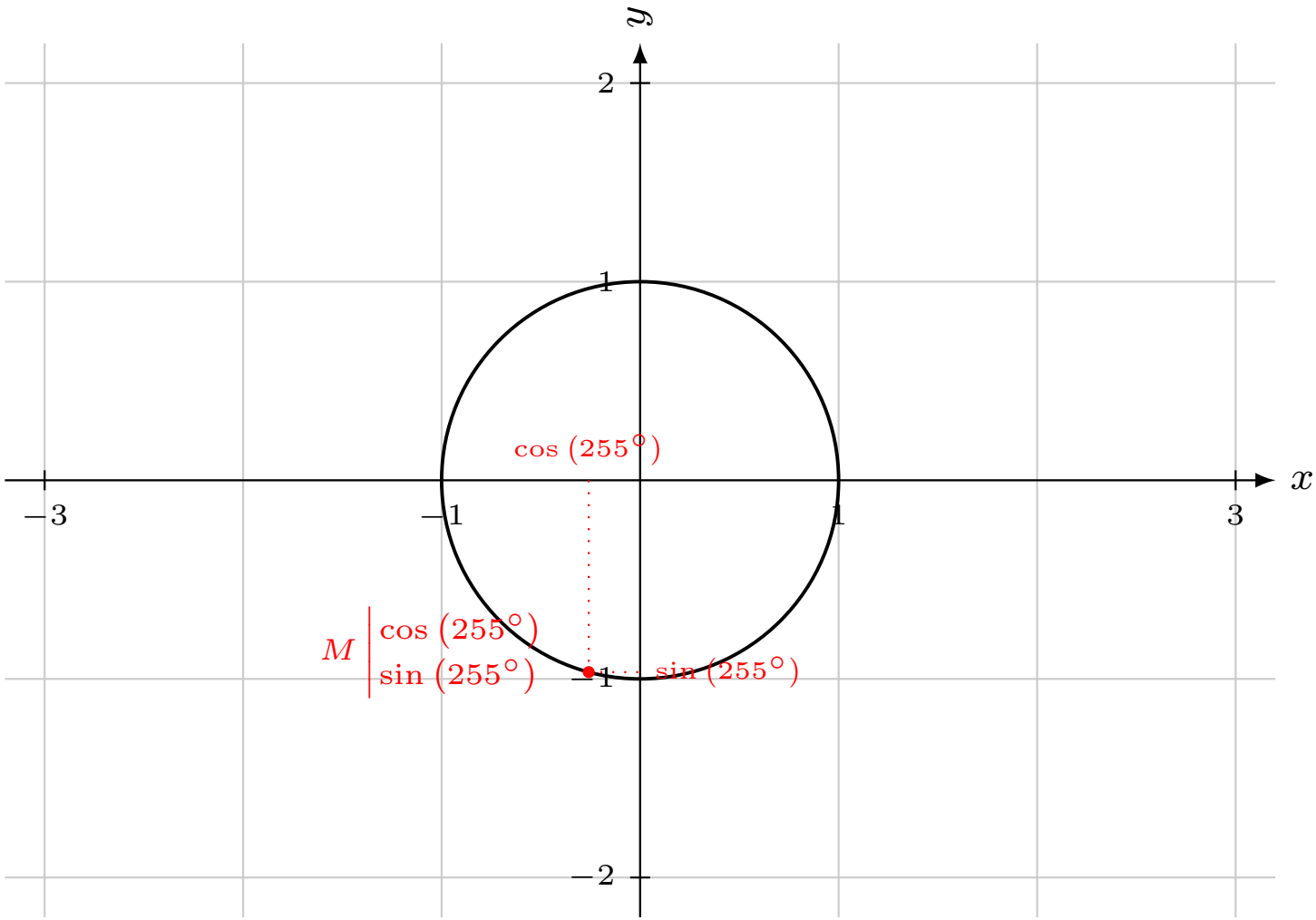
3. Représentation graphique d'une ellipse.



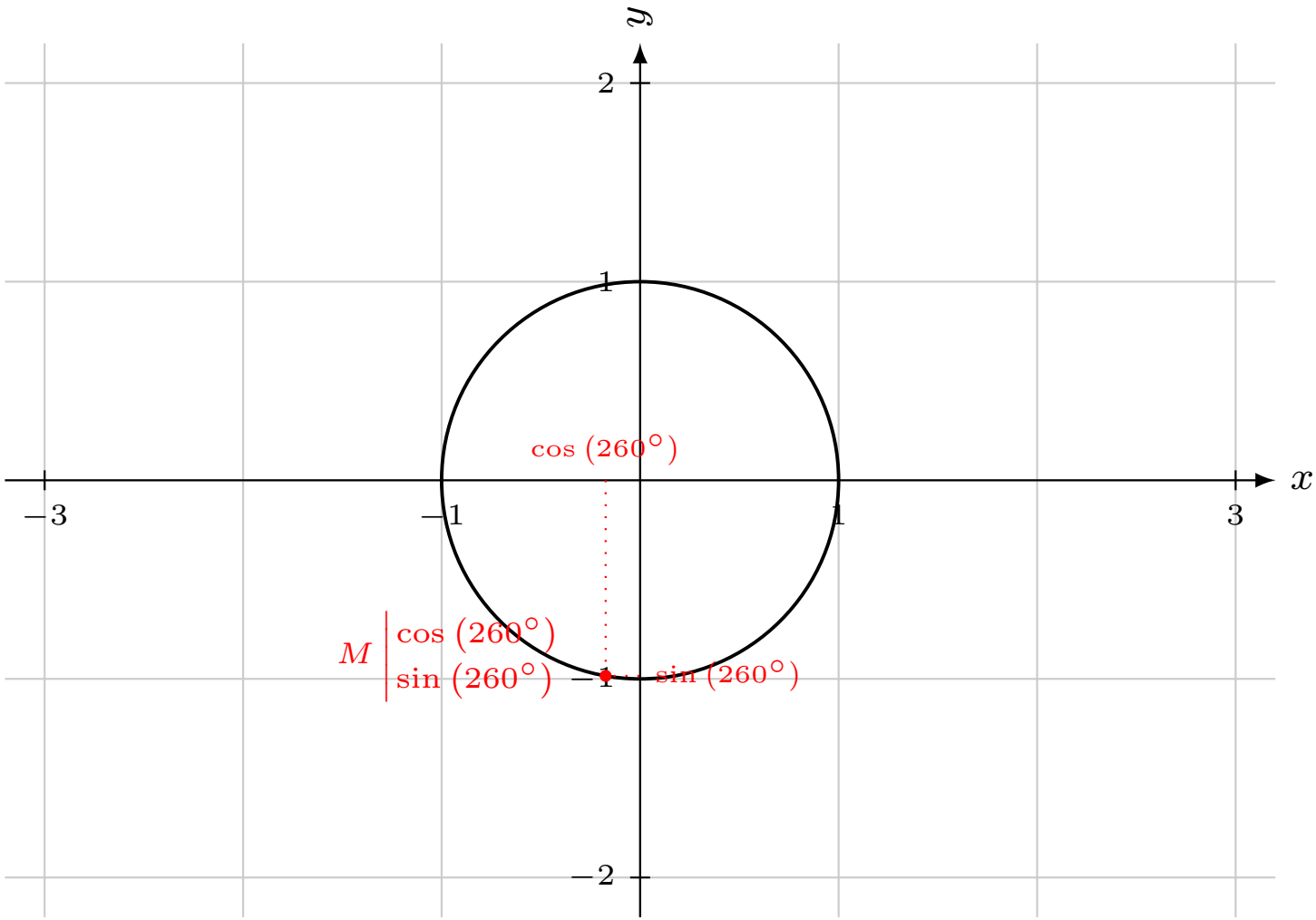
3. Représentation graphique d'une ellipse.



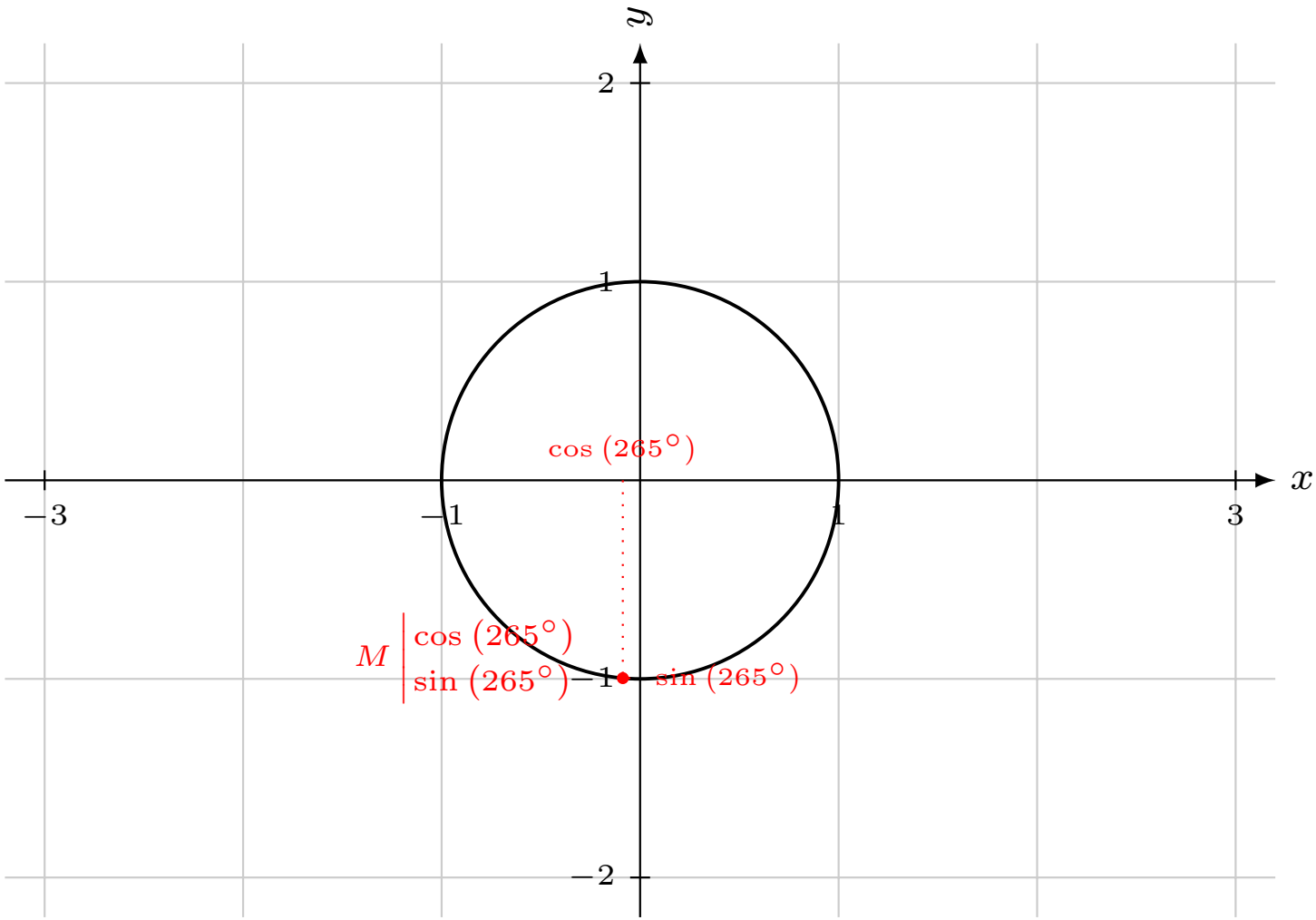
3. Représentation graphique d'une ellipse.



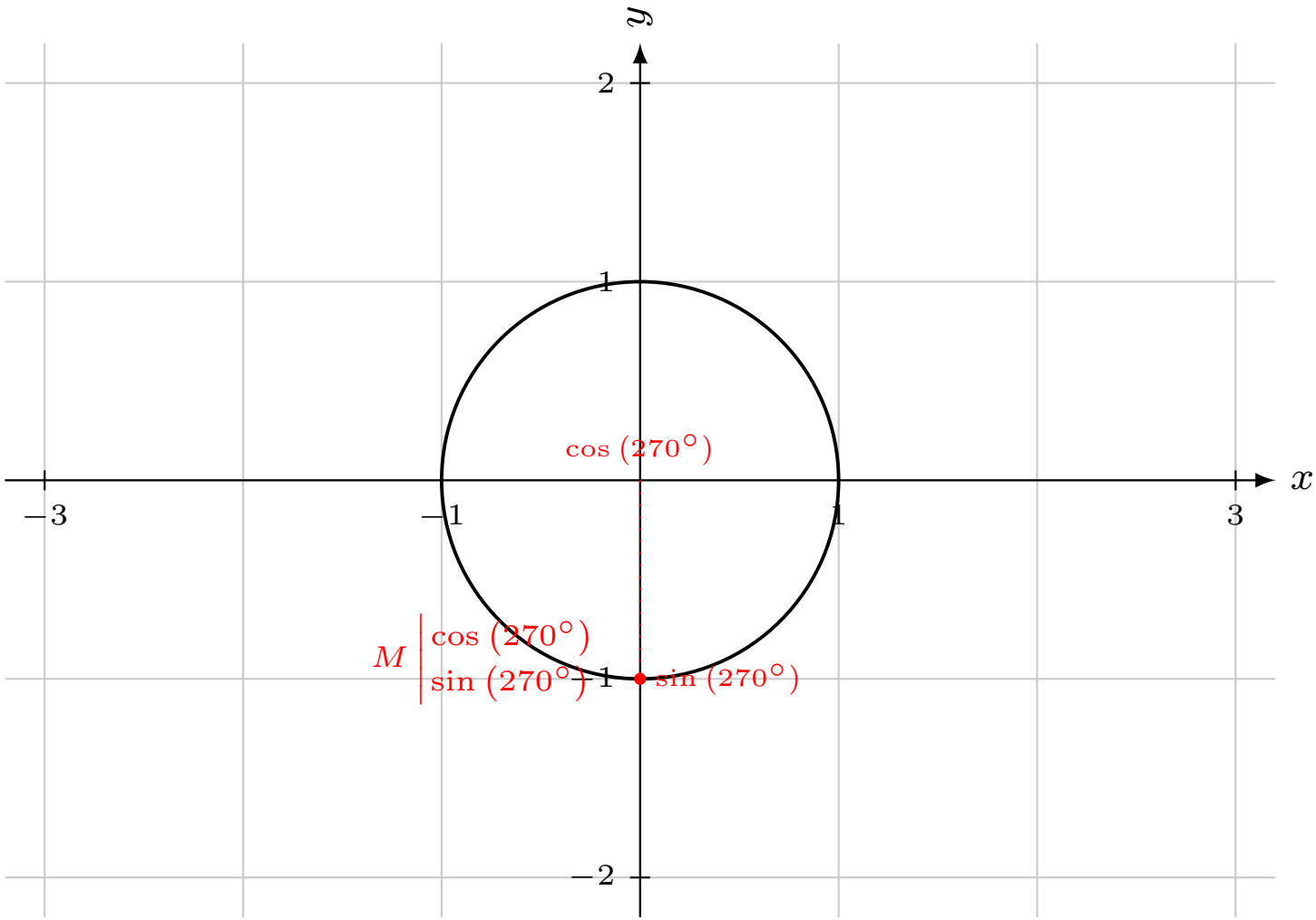
3. Représentation graphique d'une ellipse.



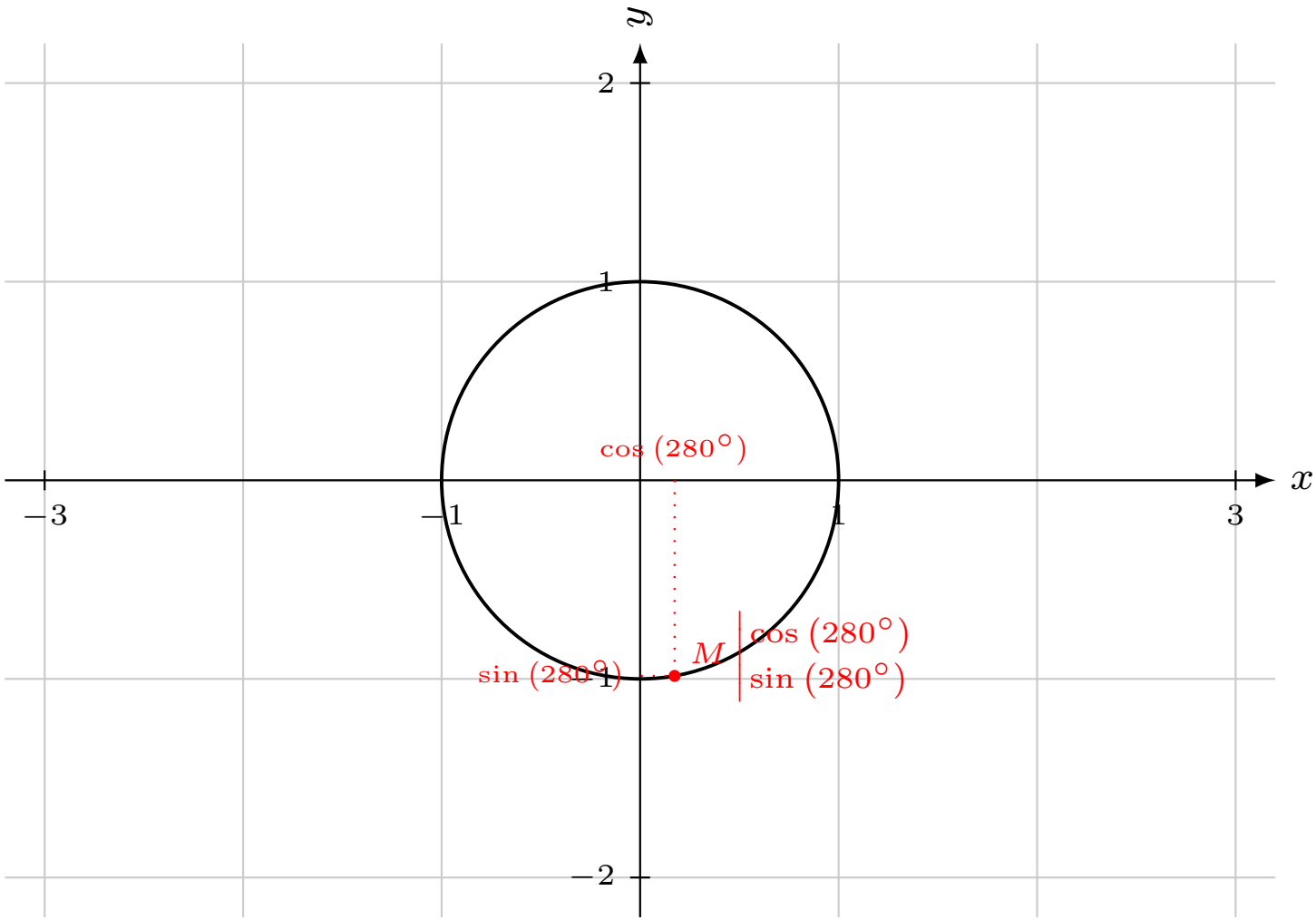
3. Représentation graphique d'une ellipse.



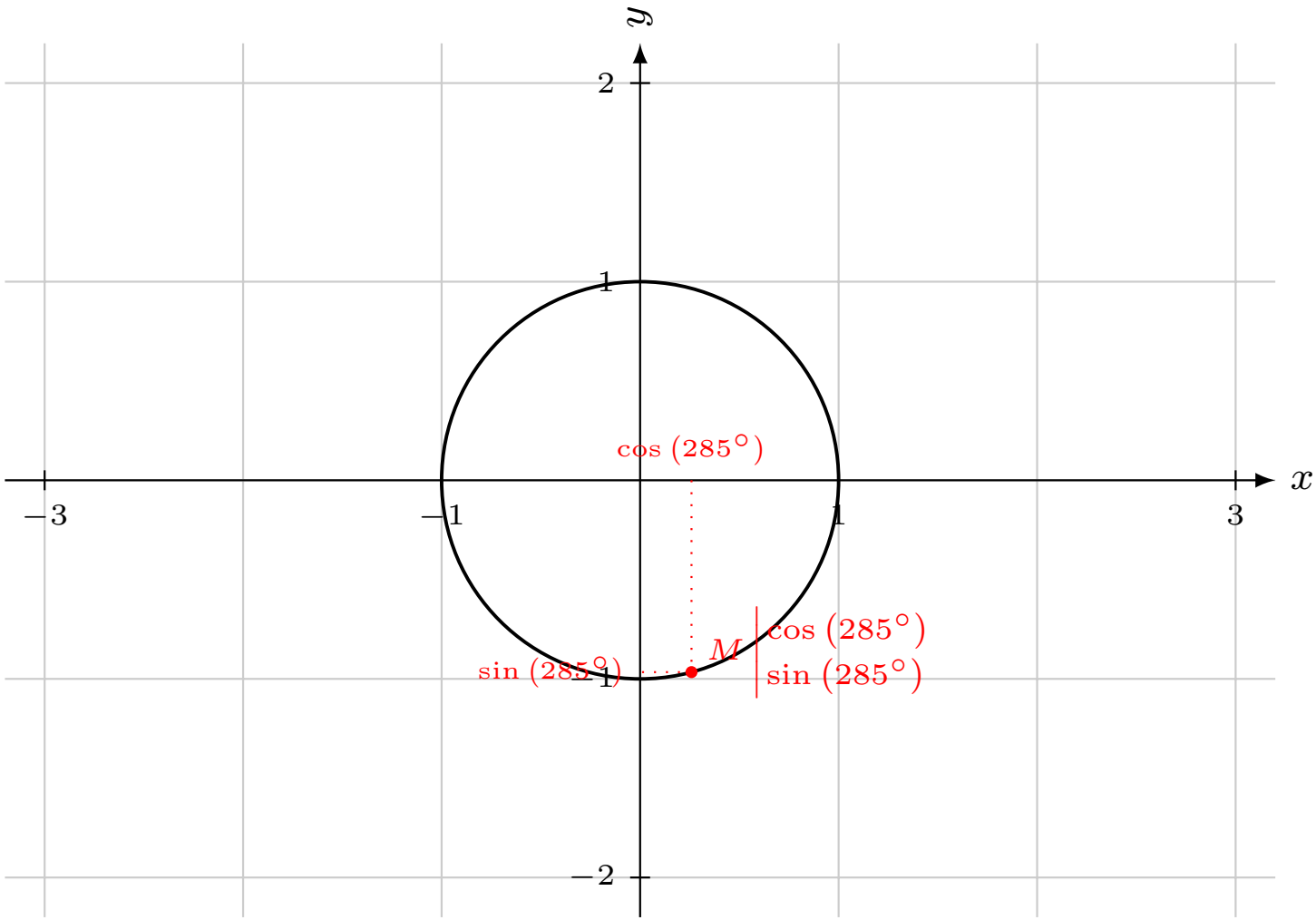
3. Représentation graphique d'une ellipse.



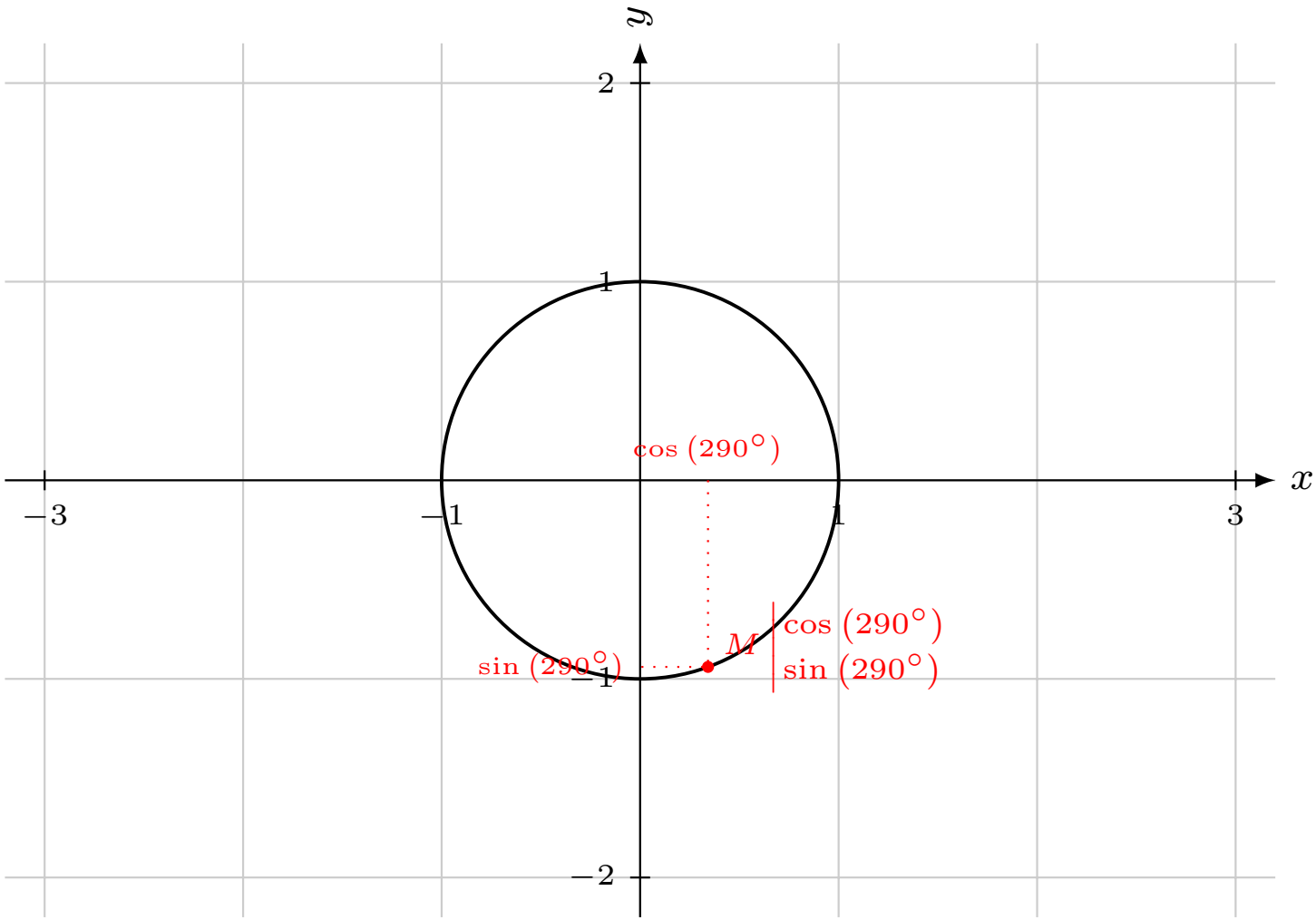
3. Représentation graphique d'une ellipse.



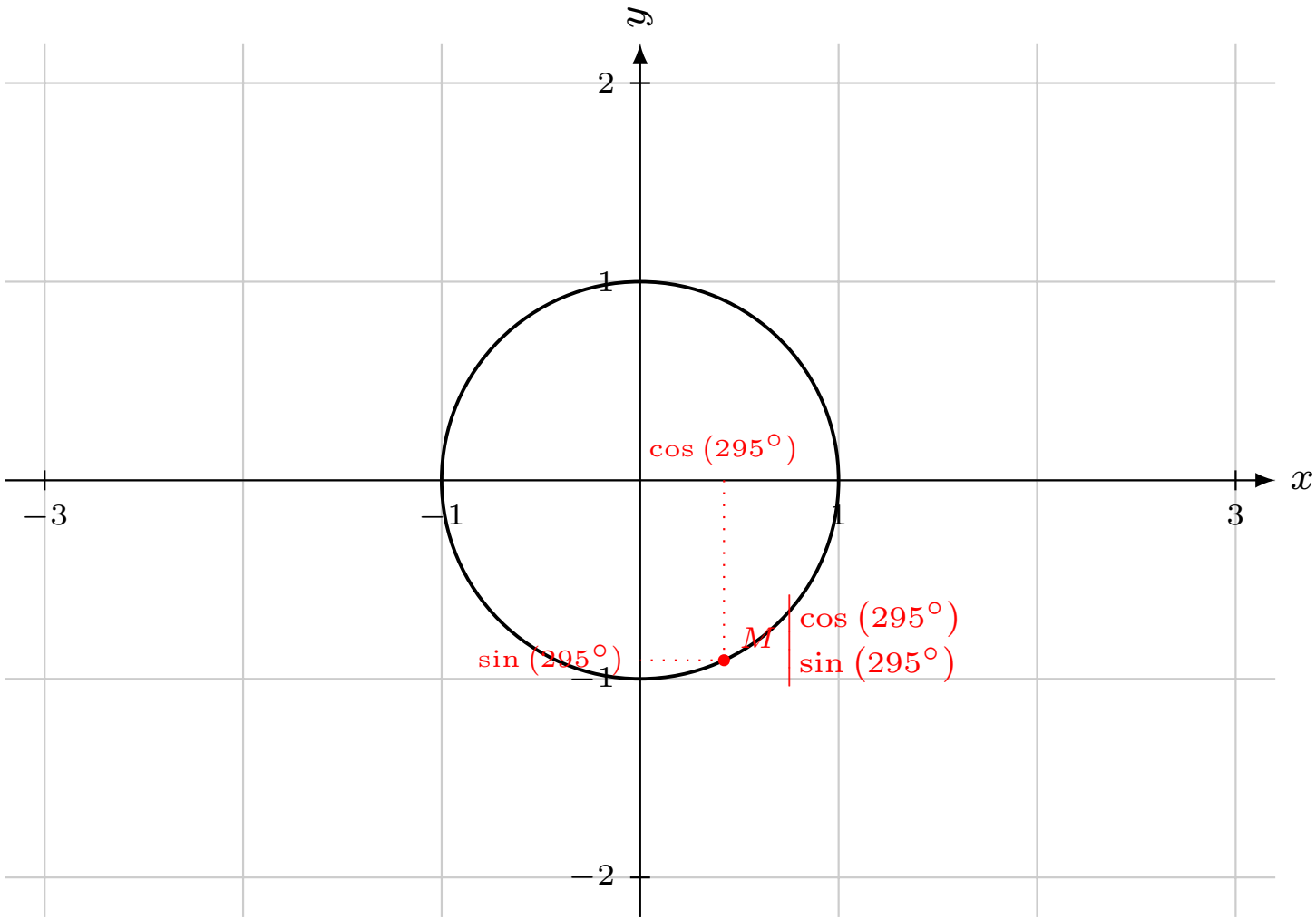
3. Représentation graphique d'une ellipse.



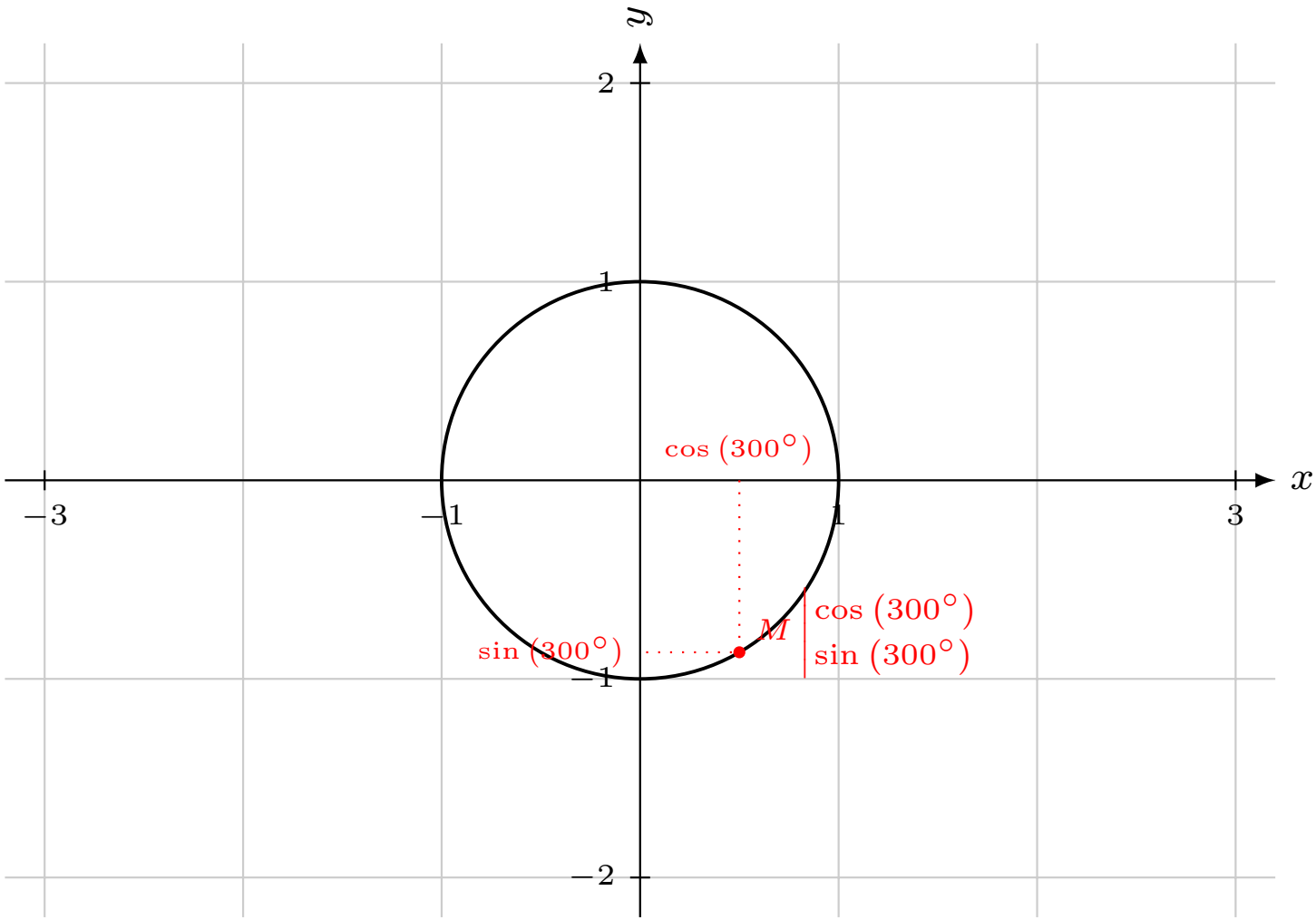
3. Représentation graphique d'une ellipse.



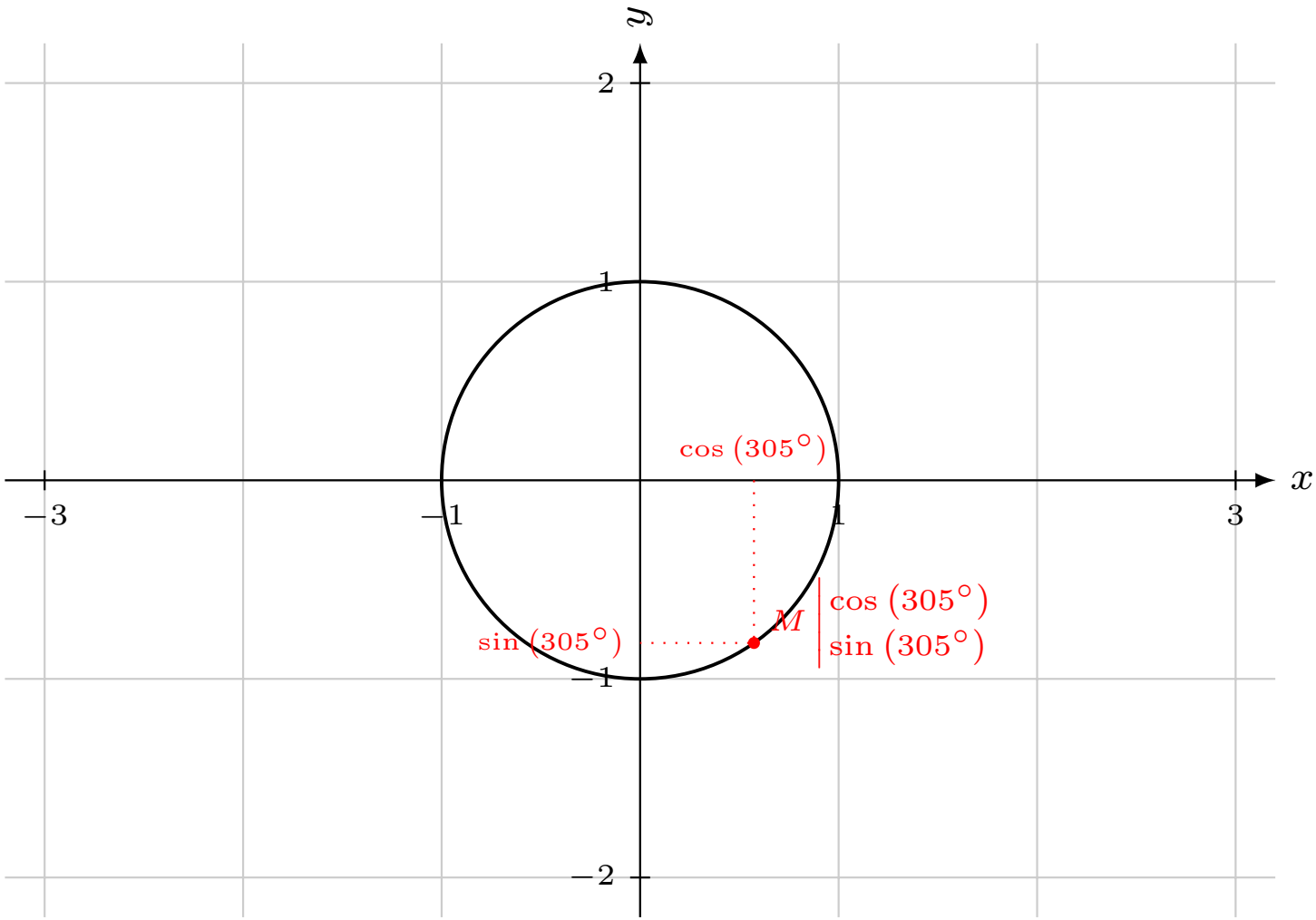
3. Représentation graphique d'une ellipse.



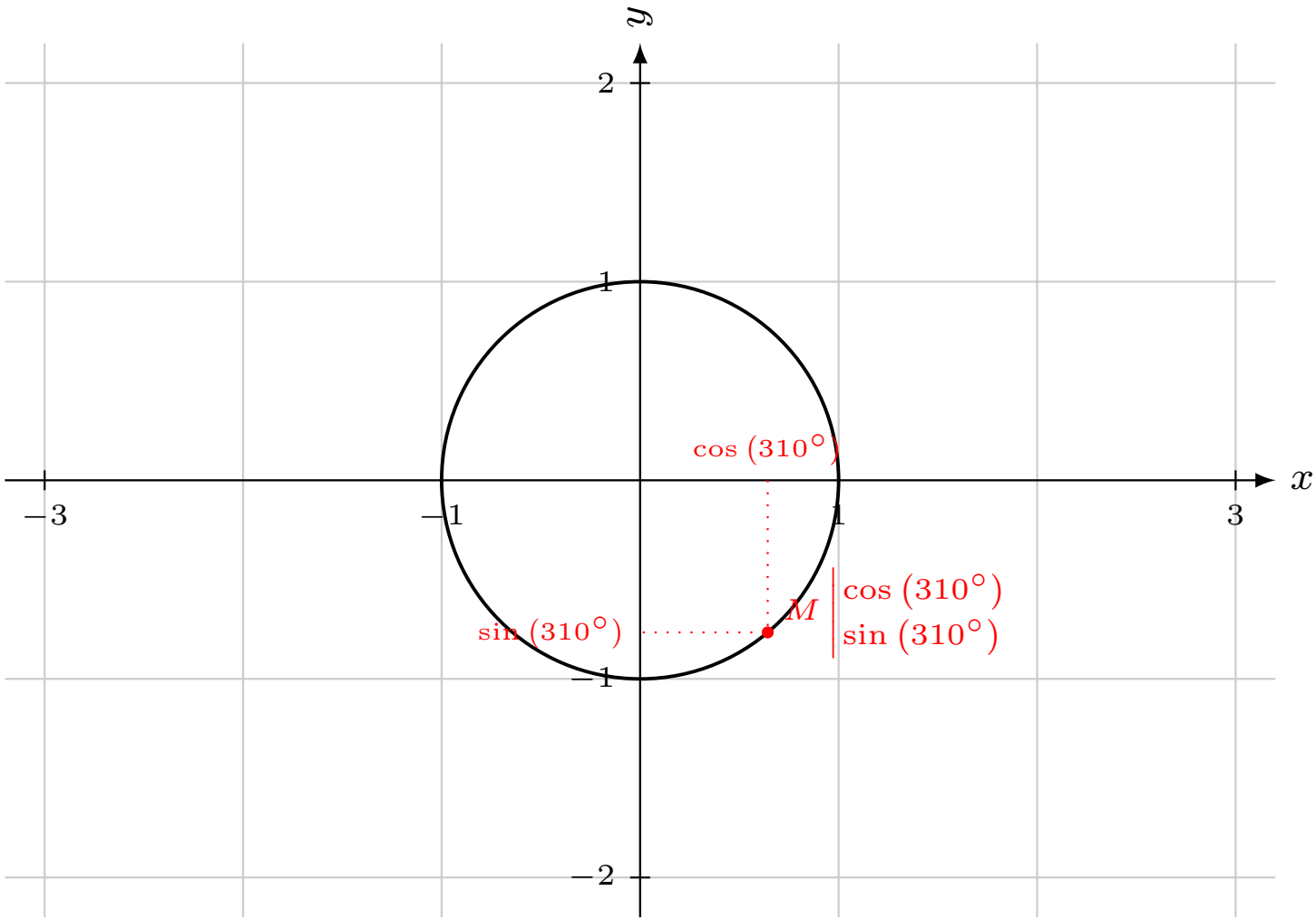
3. Représentation graphique d'une ellipse.



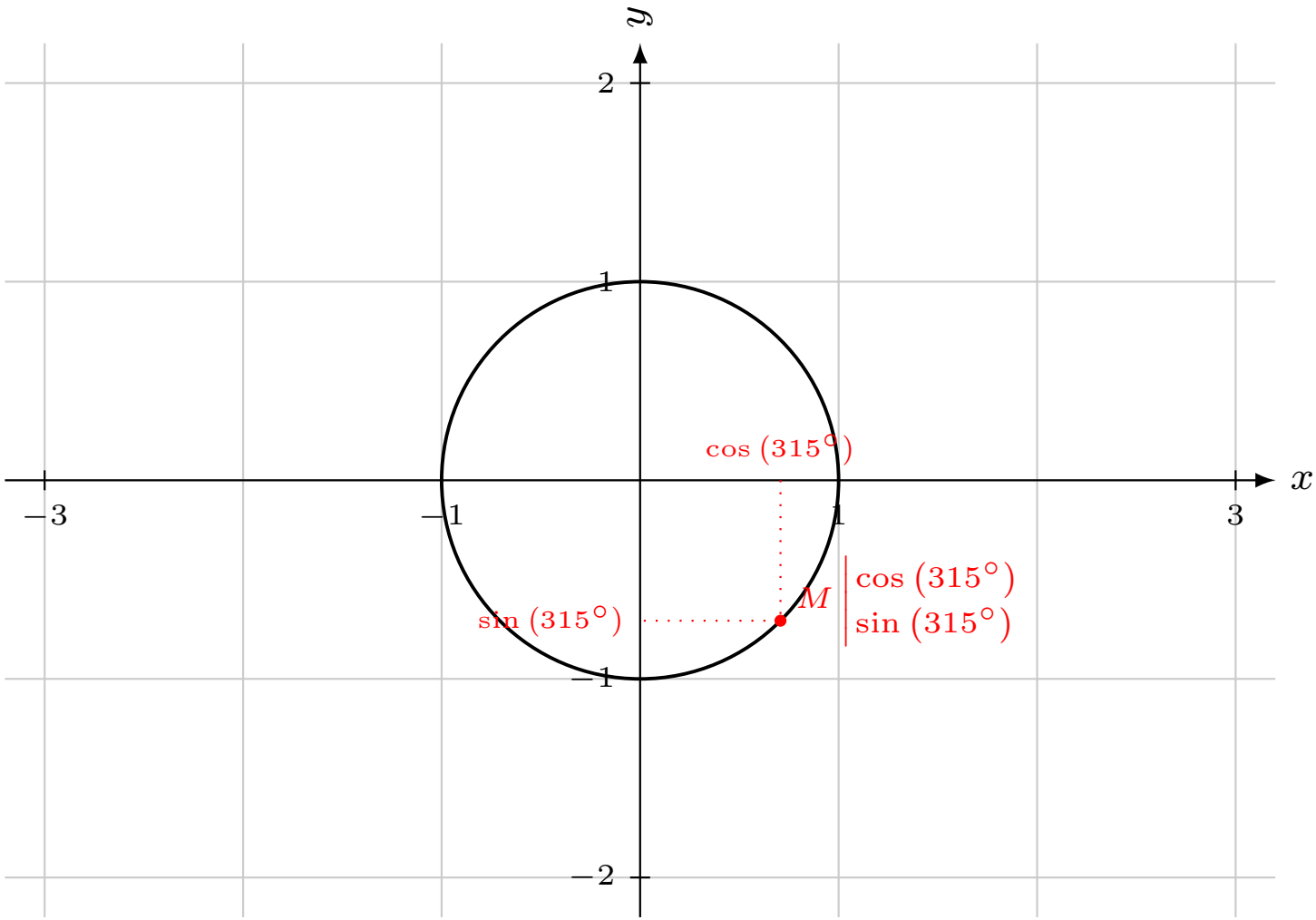
3. Représentation graphique d'une ellipse.



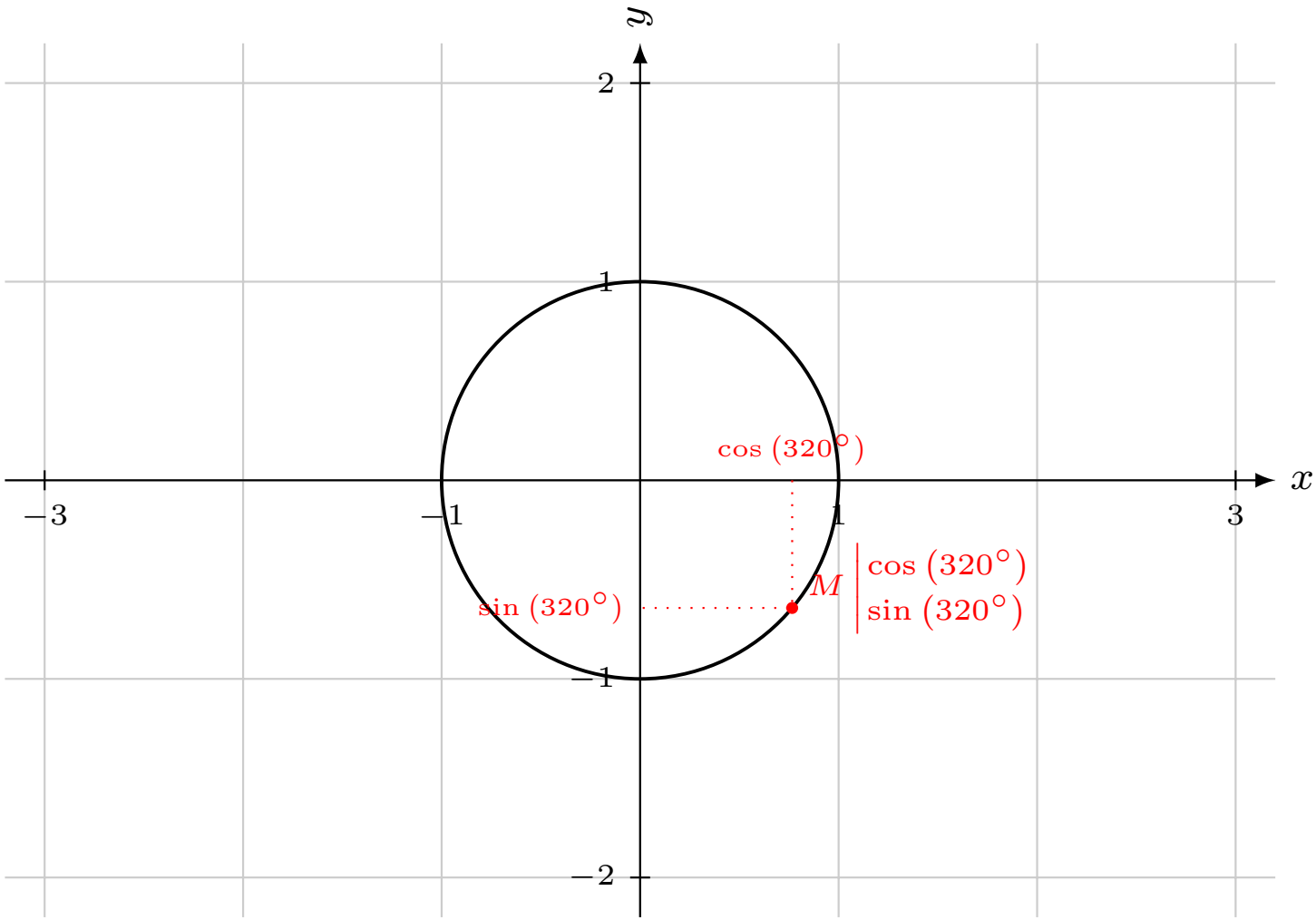
3. Représentation graphique d'une ellipse.



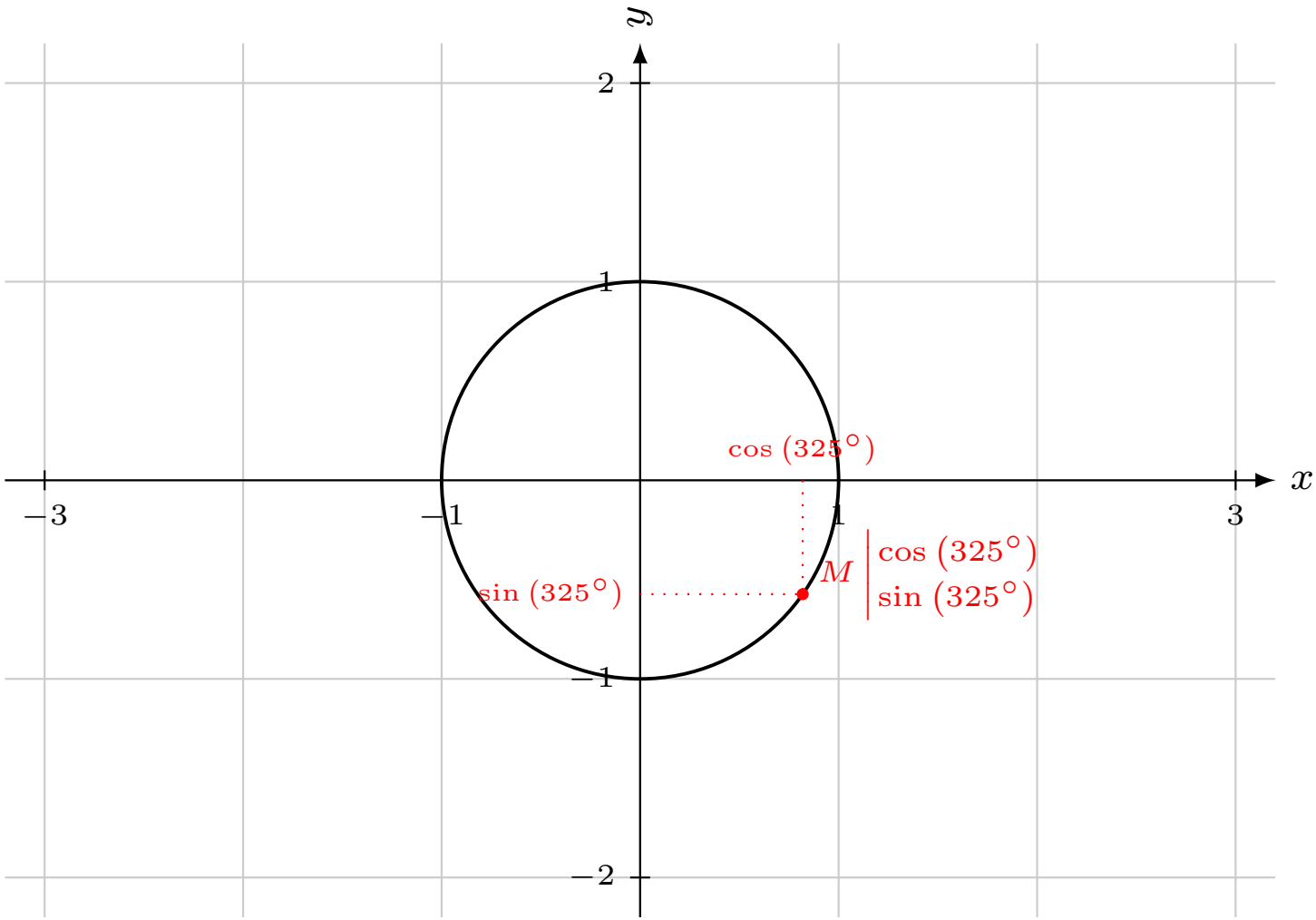
3. Représentation graphique d'une ellipse.



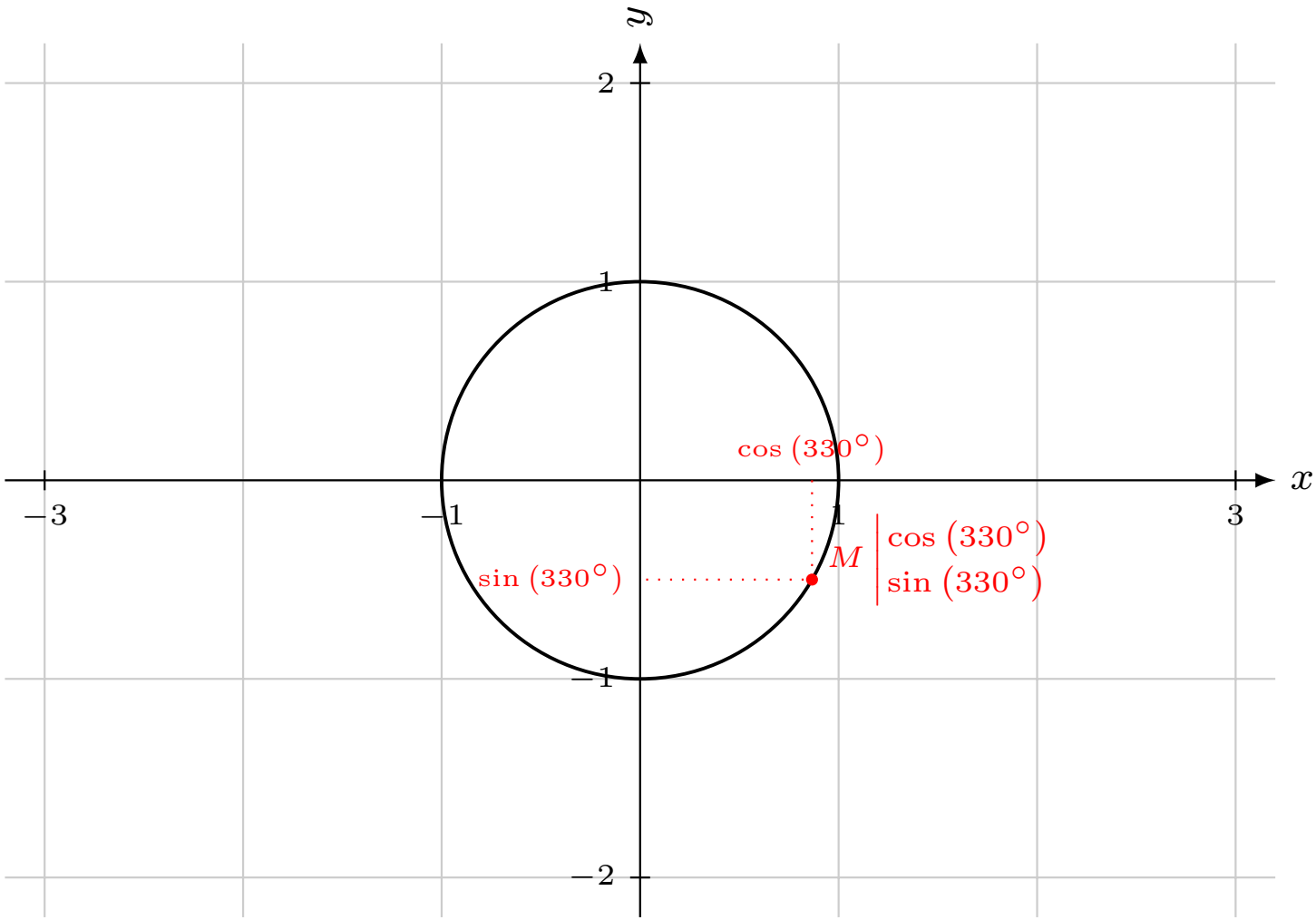
3. Représentation graphique d'une ellipse.



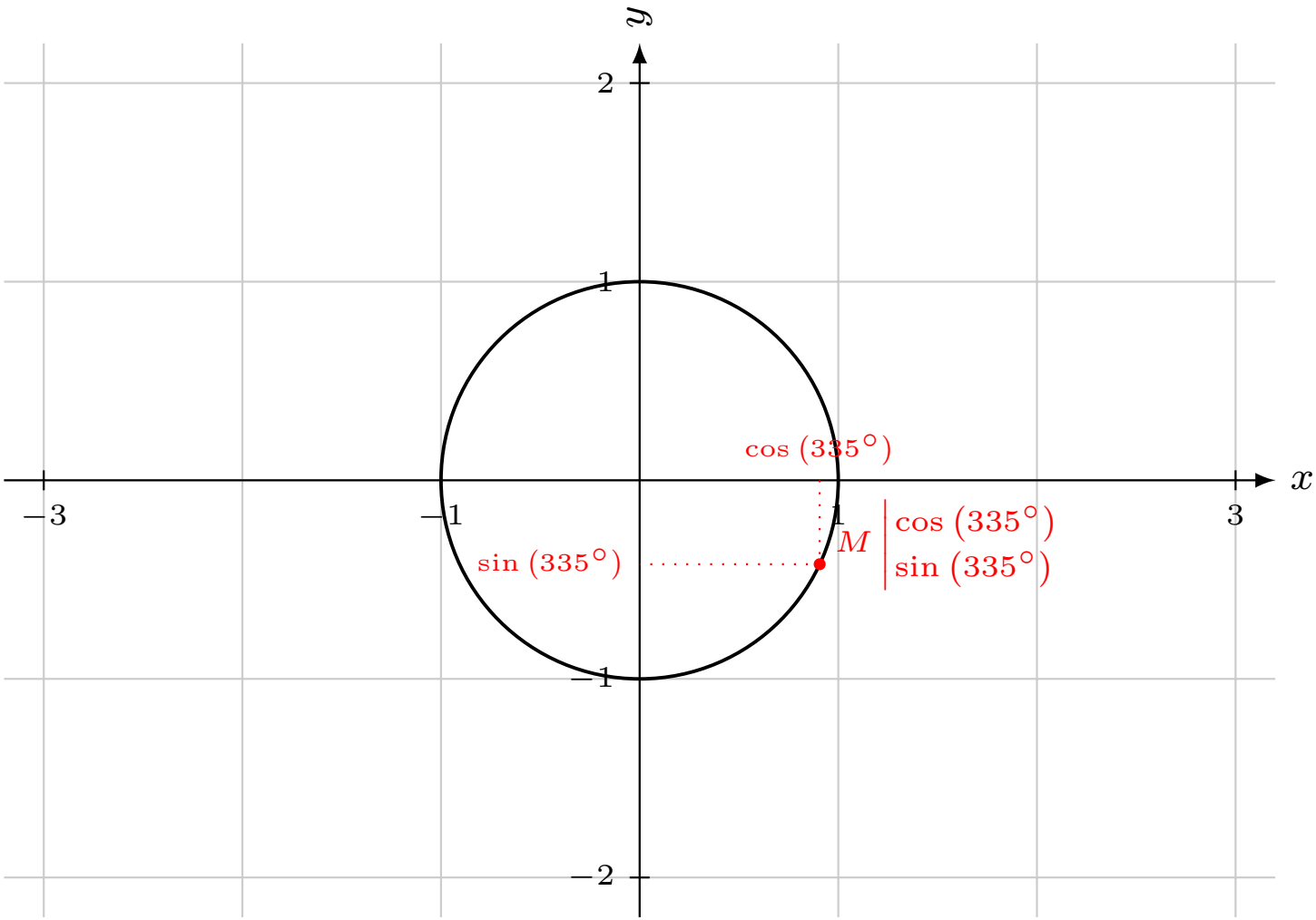
3. Représentation graphique d'une ellipse.



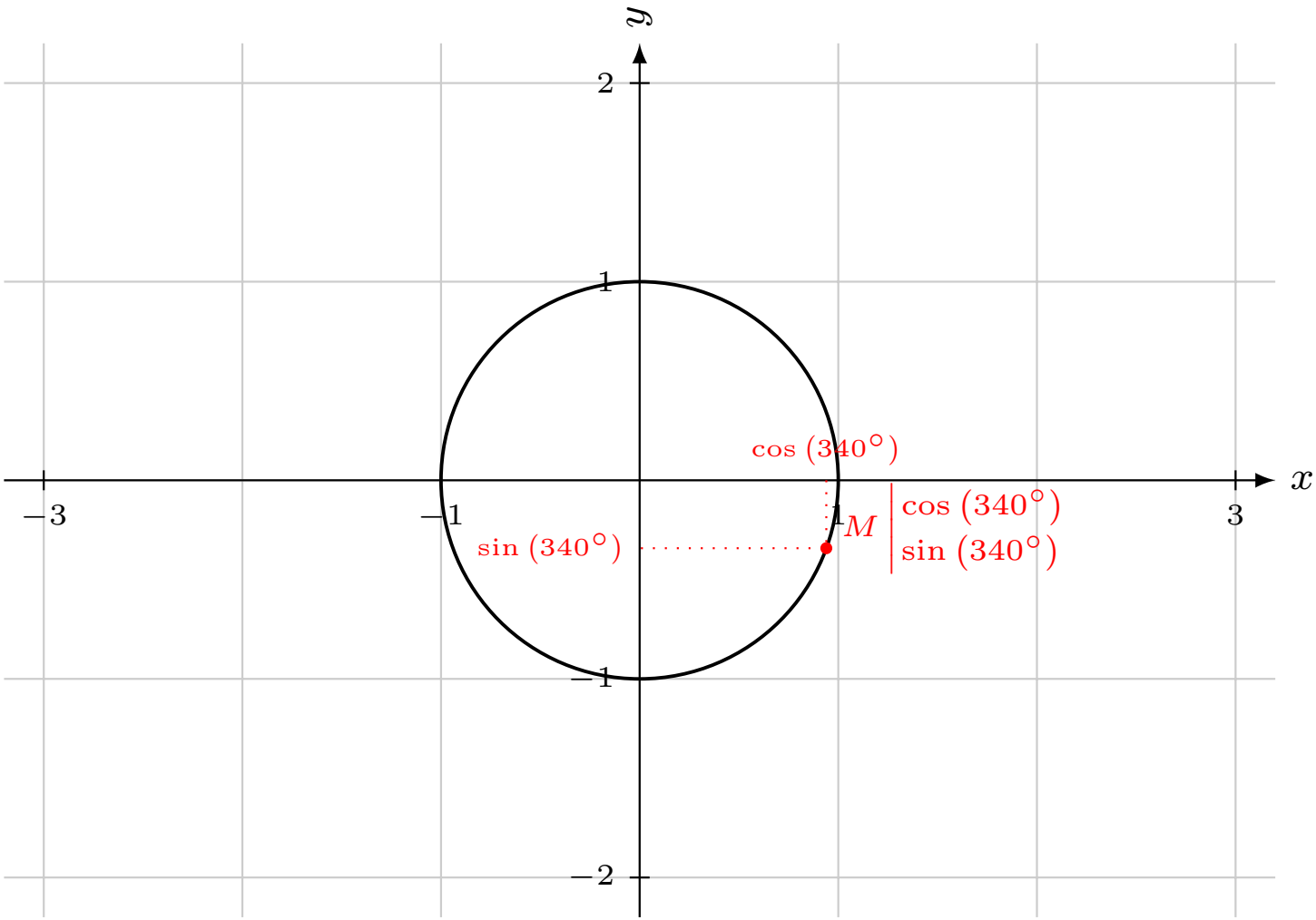
3. Représentation graphique d'une ellipse.



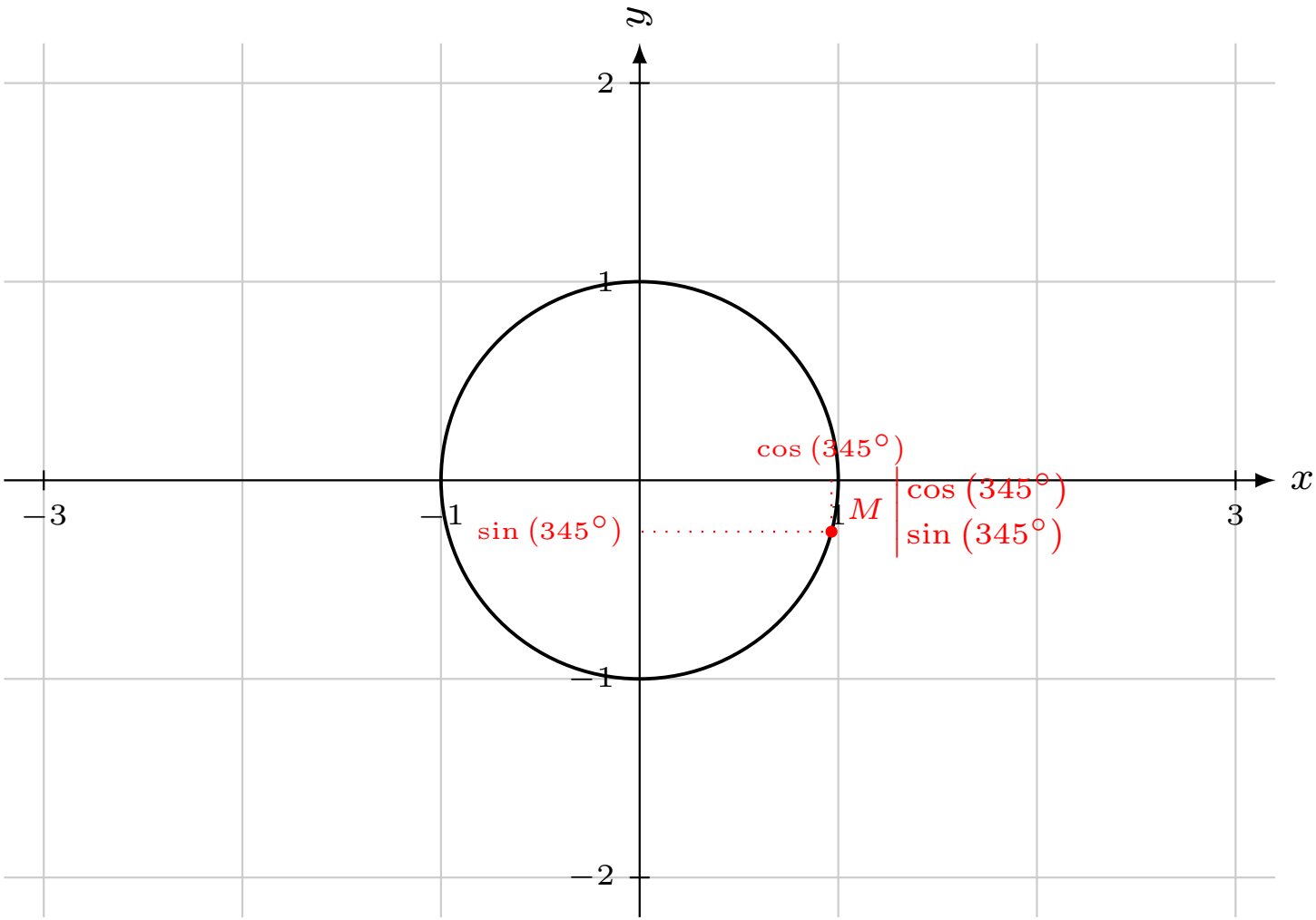
3. Représentation graphique d'une ellipse.



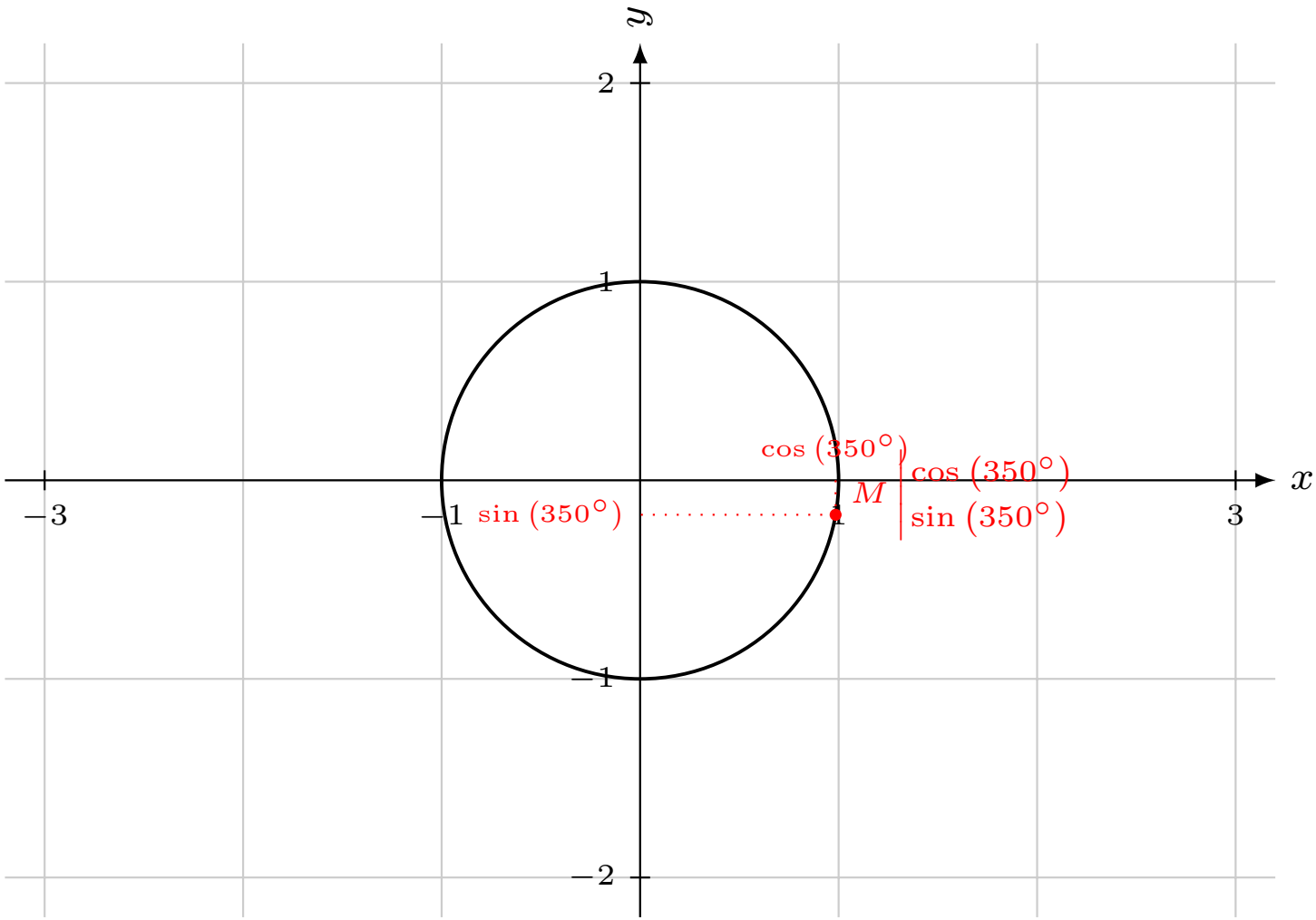
3. Représentation graphique d'une ellipse.



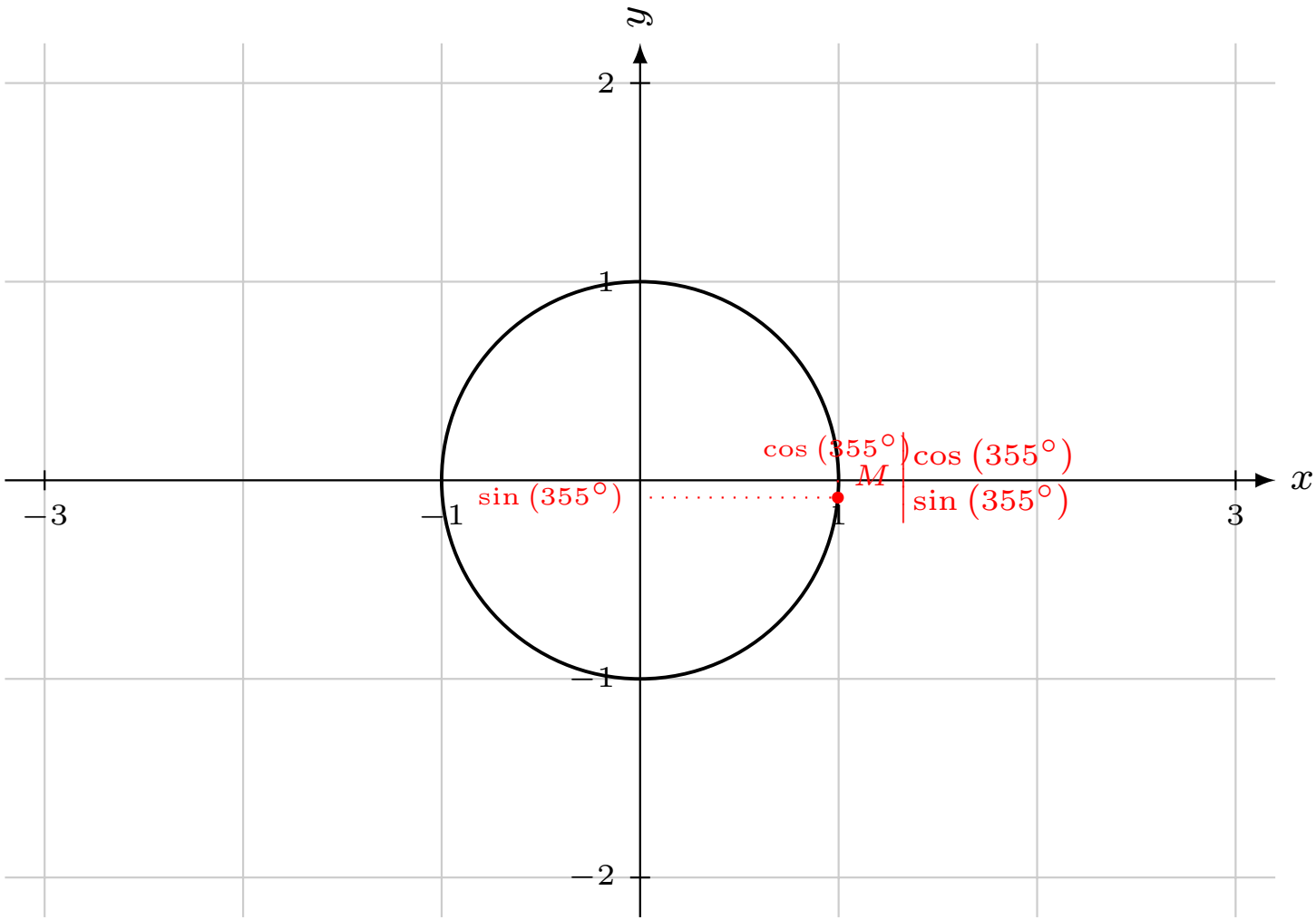
3. Représentation graphique d'une ellipse.



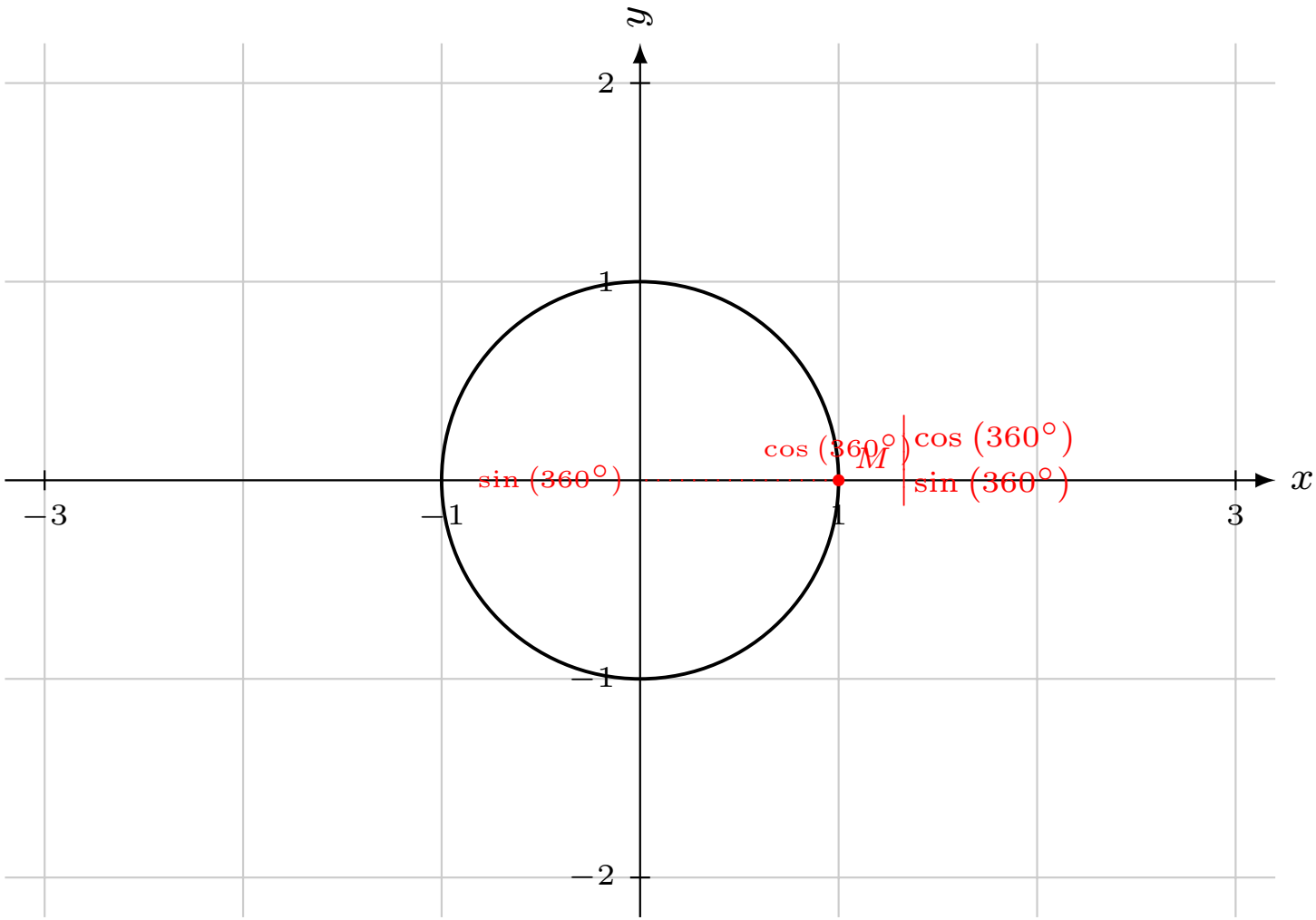
3. Représentation graphique d'une ellipse.



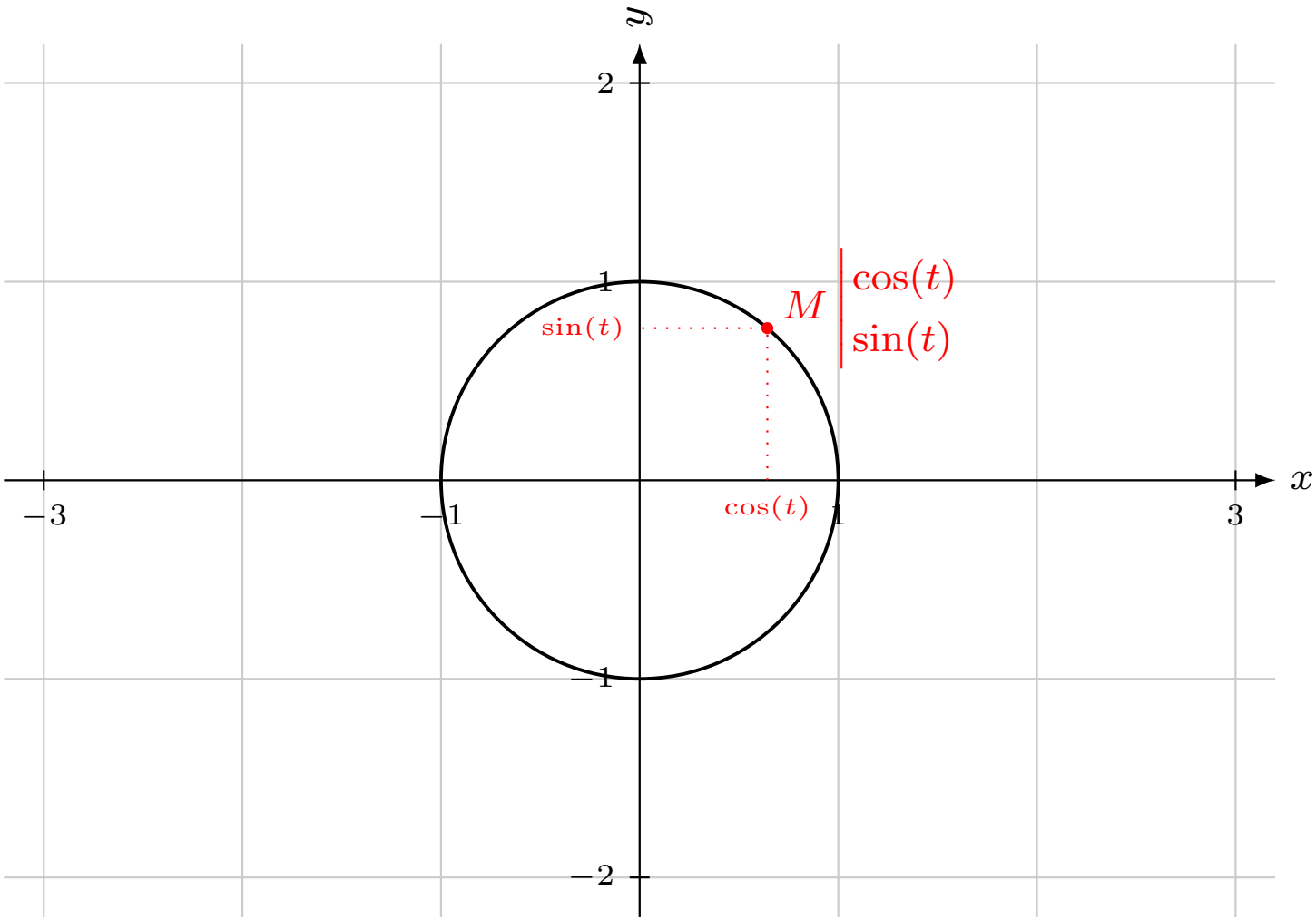
3. Représentation graphique d'une ellipse.



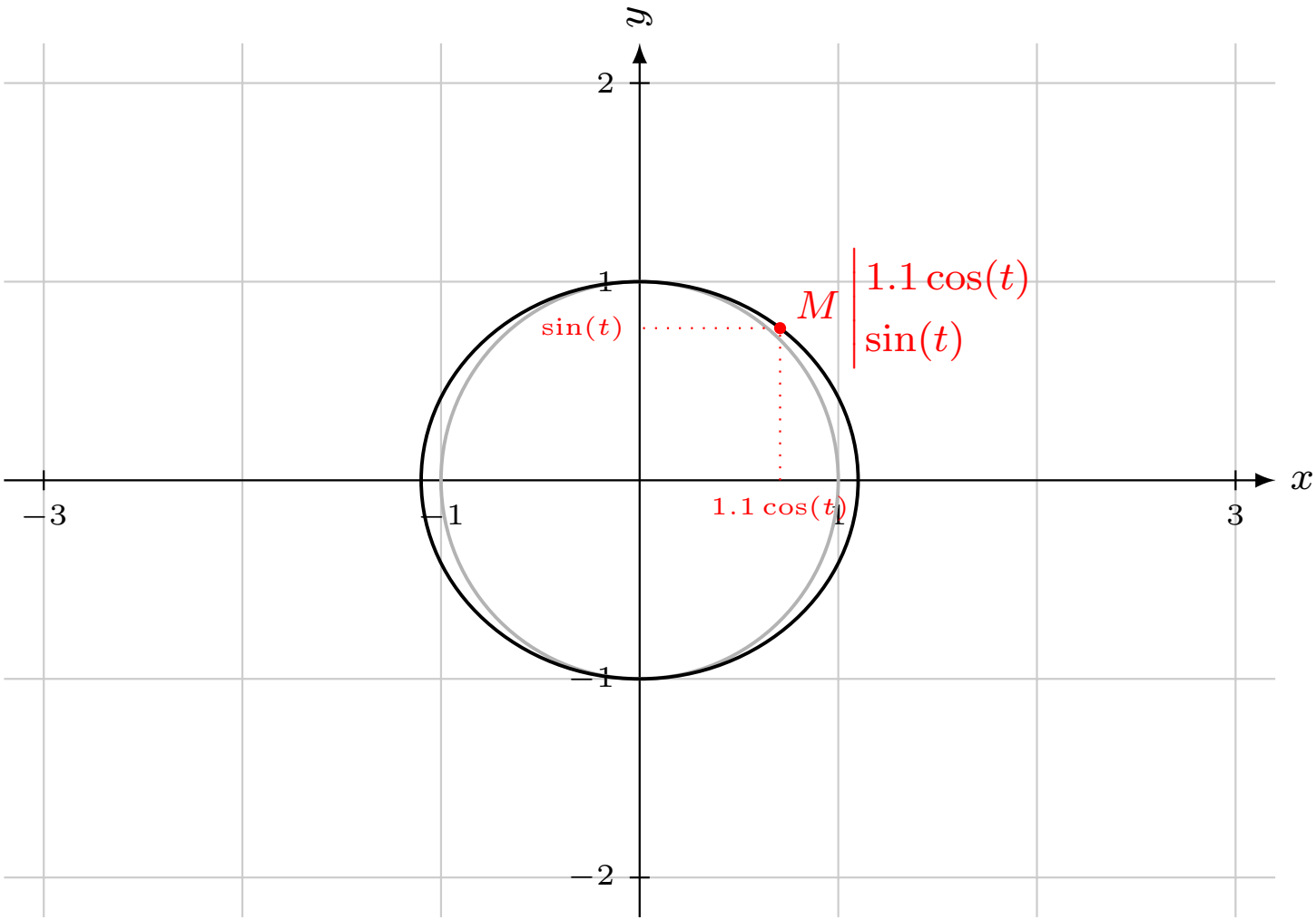
3. Représentation graphique d'une ellipse.



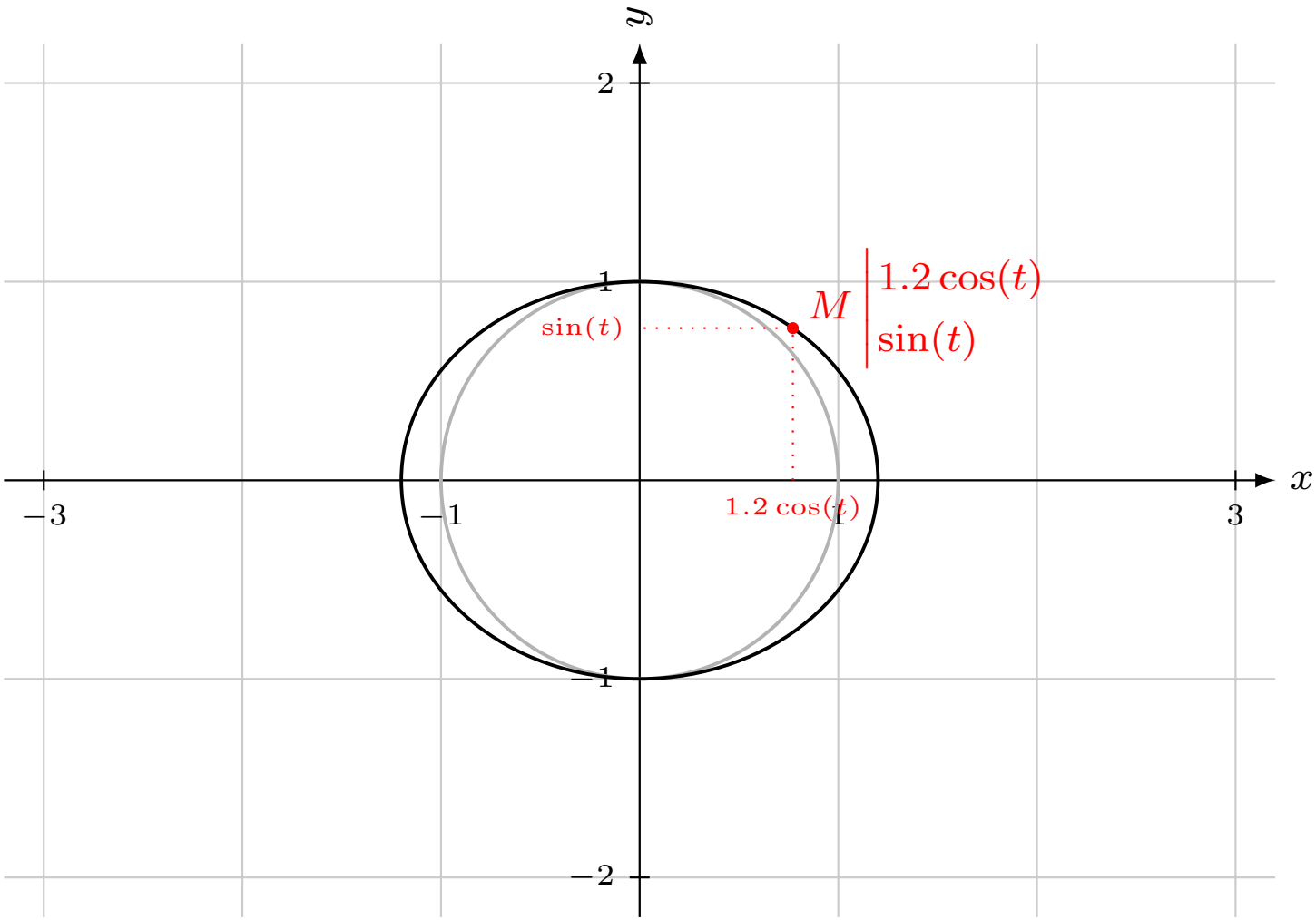
3. Représentation graphique d'une ellipse.



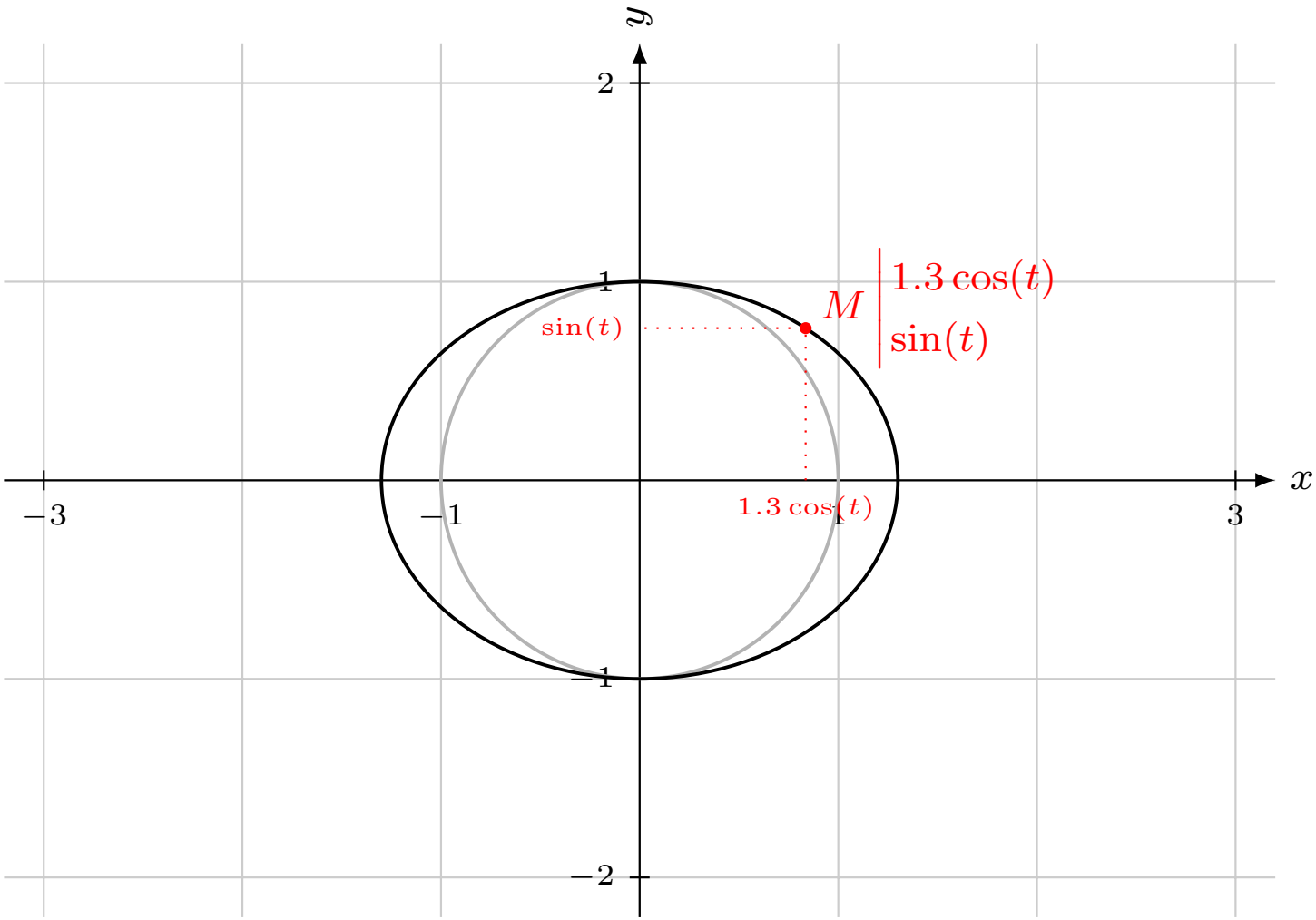
3. Représentation graphique d'une ellipse.



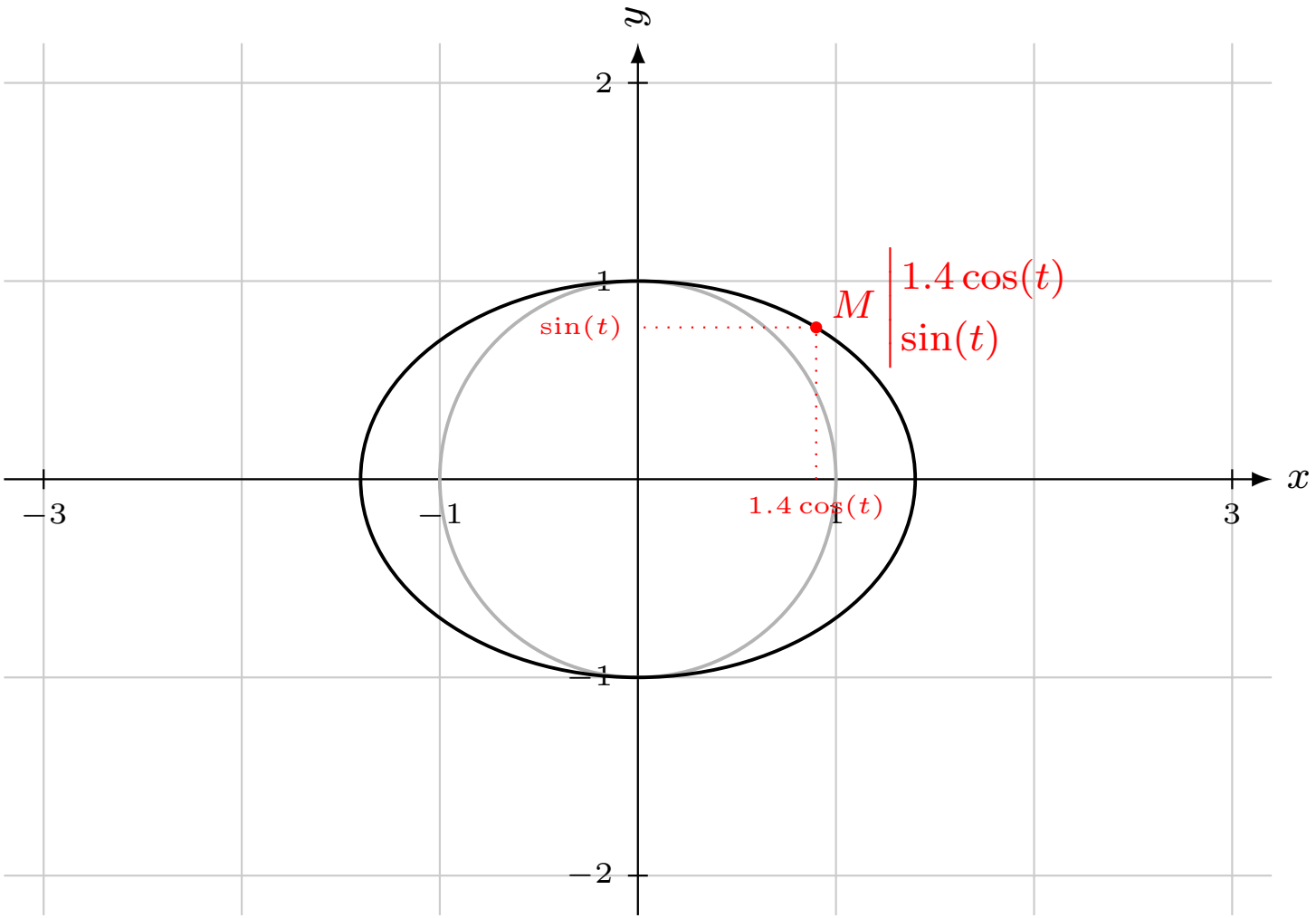
3. Représentation graphique d'une ellipse.



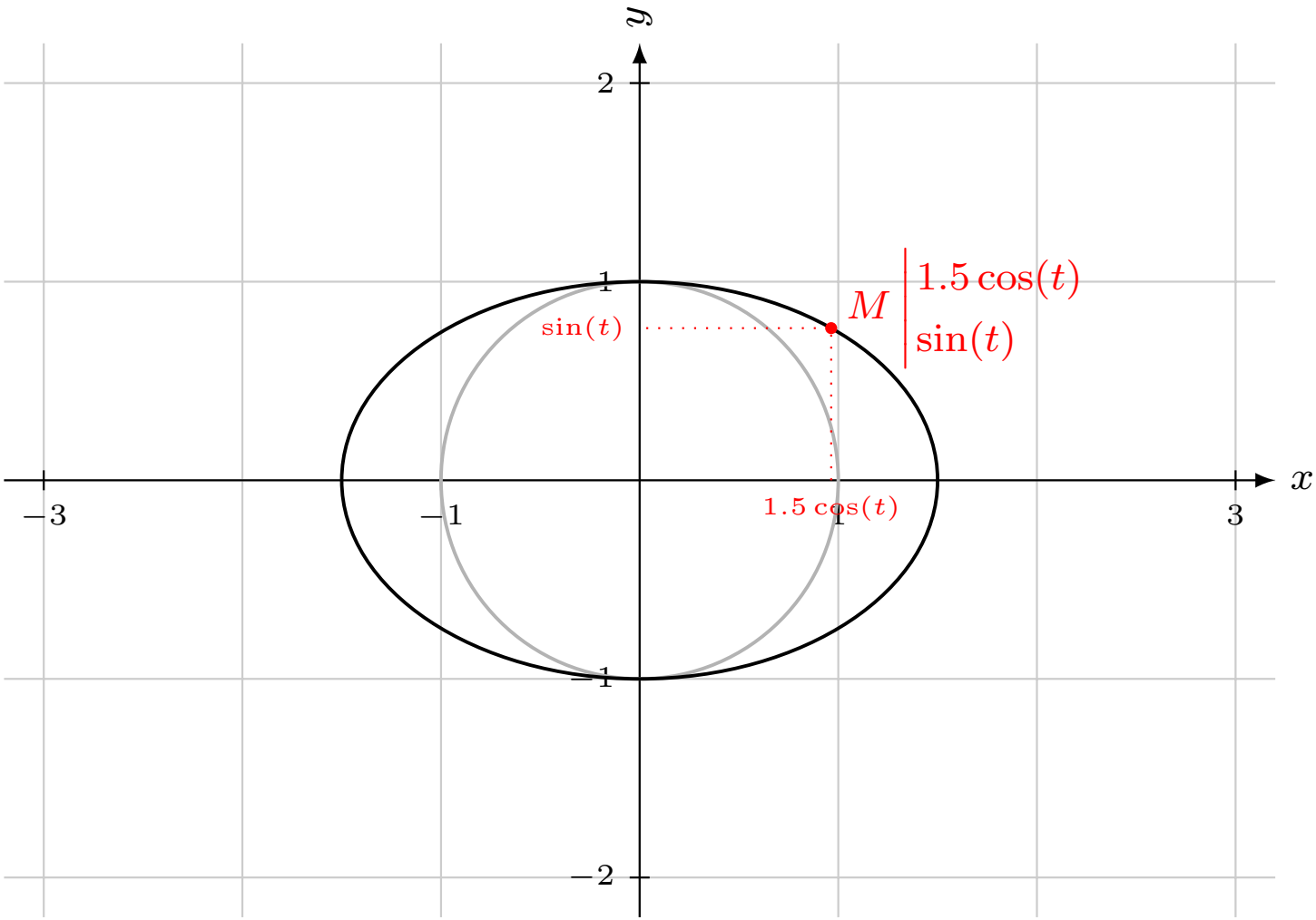
3. Représentation graphique d'une ellipse.



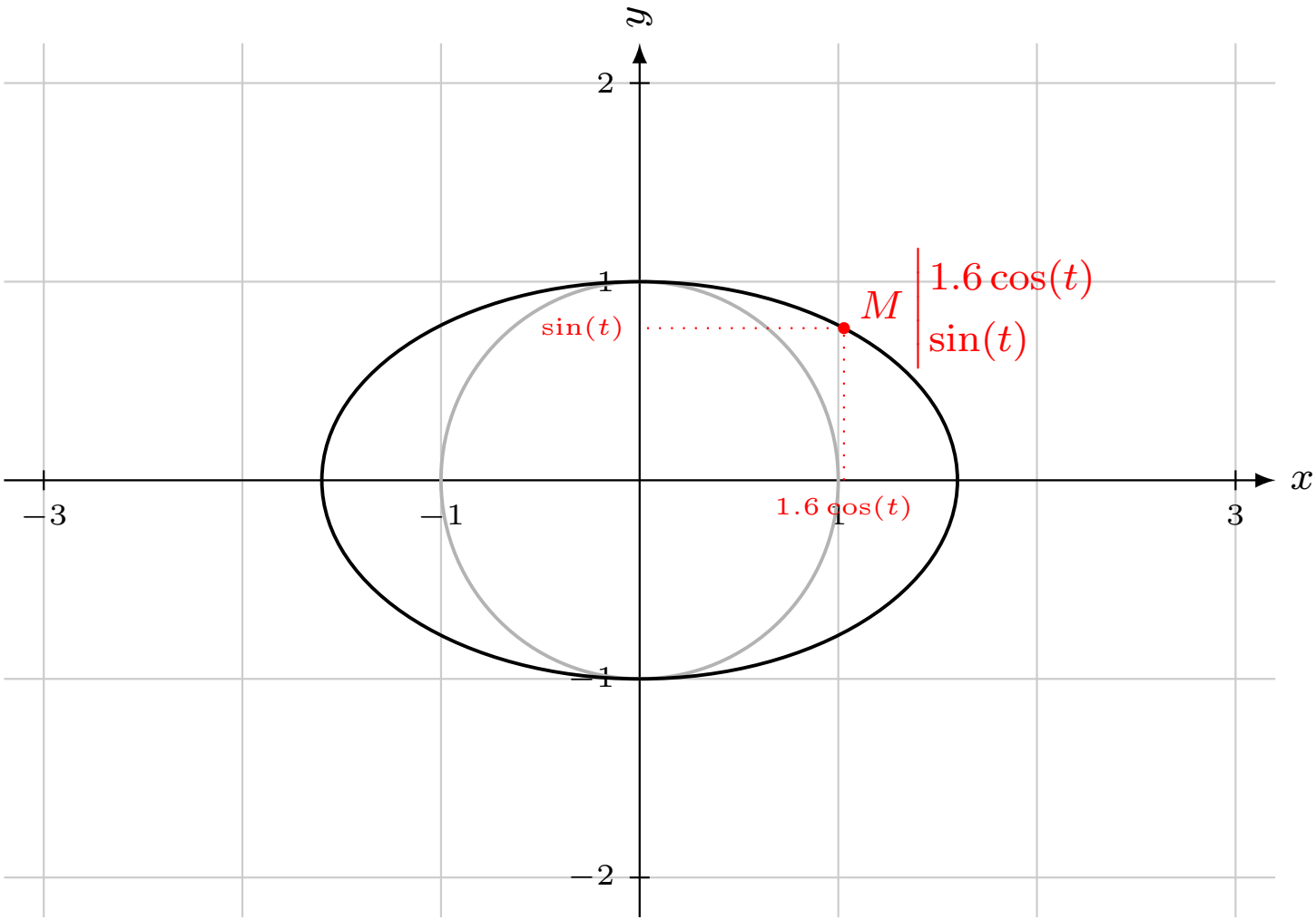
3. Représentation graphique d'une ellipse.



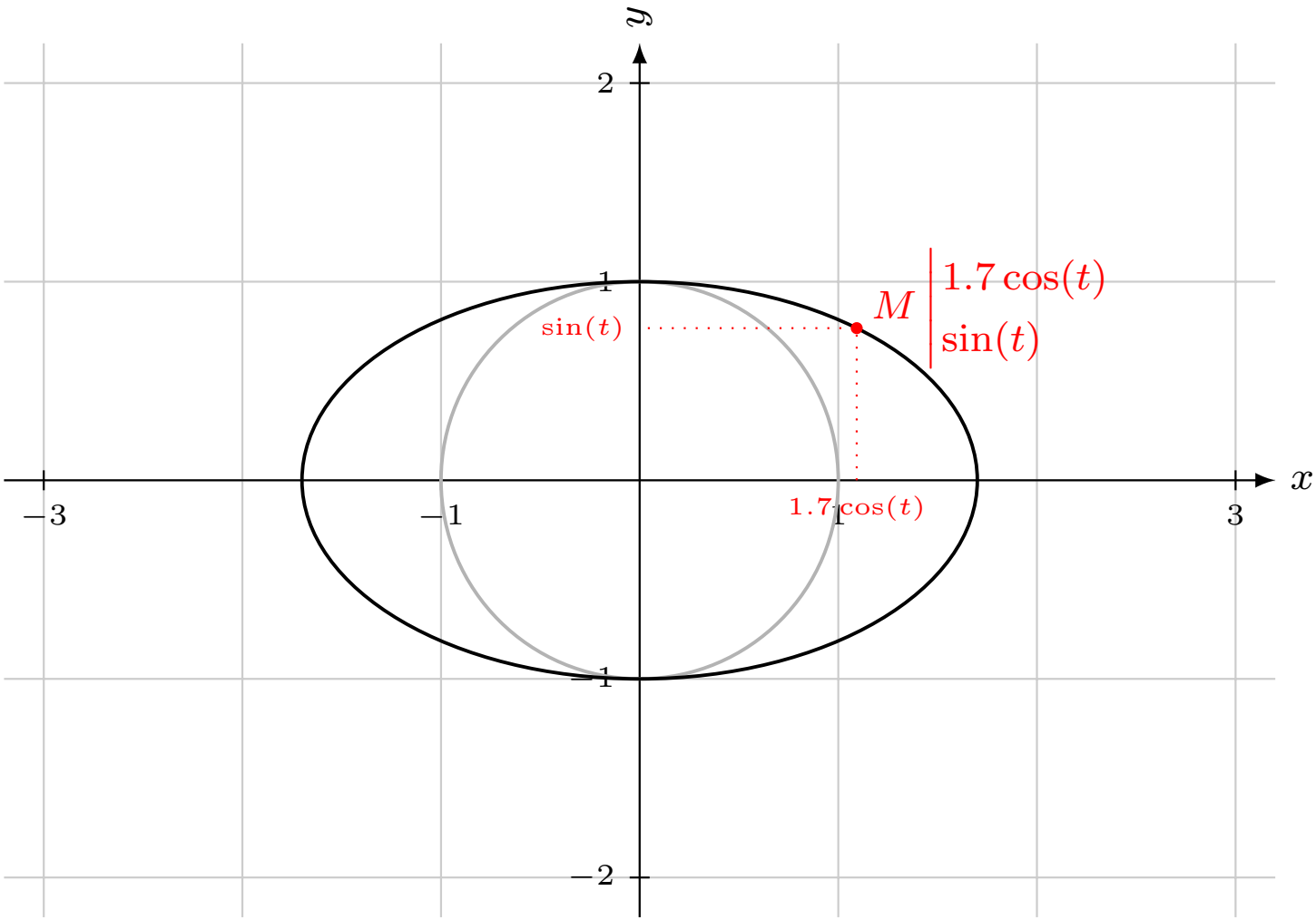
3. Représentation graphique d'une ellipse.



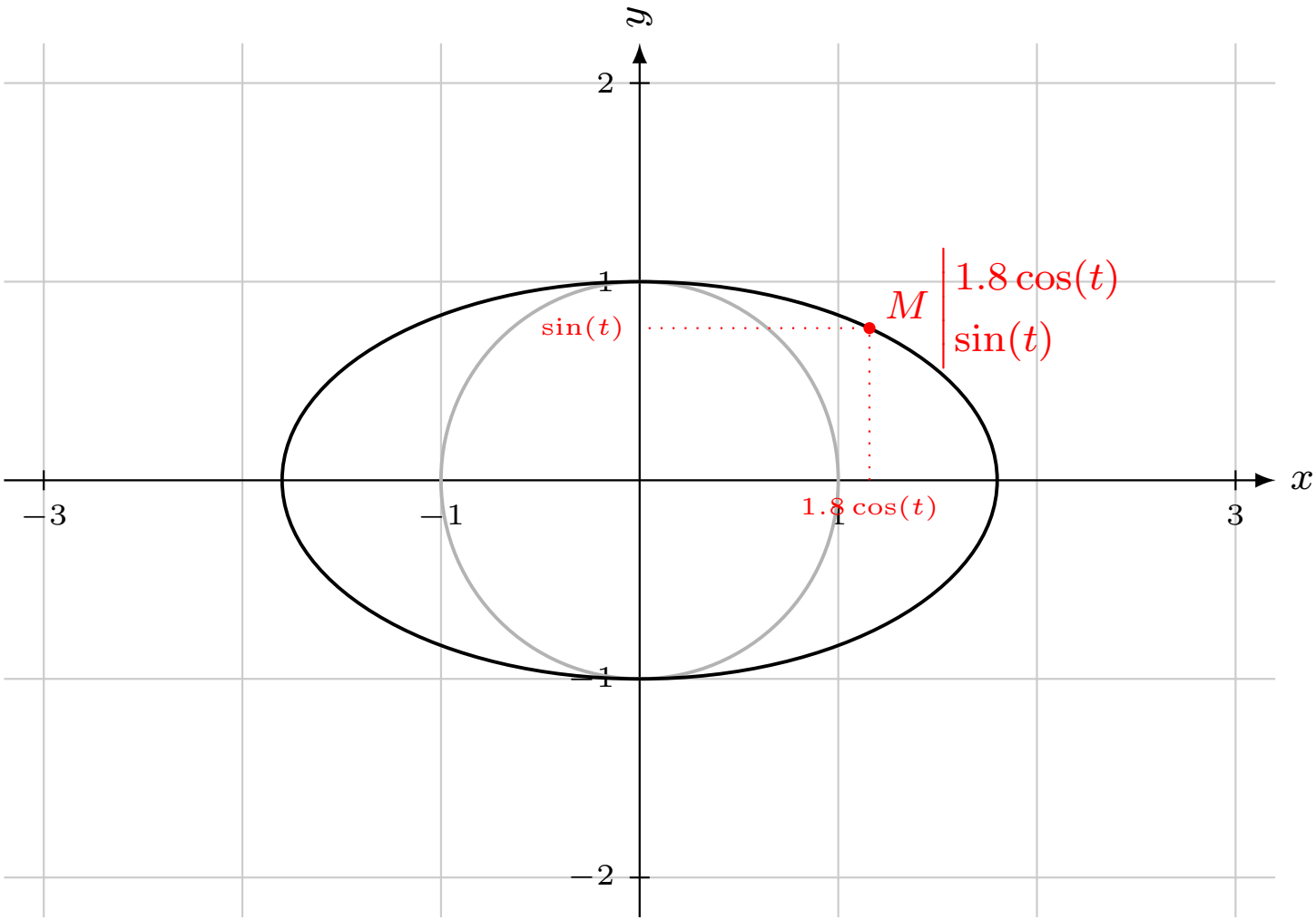
3. Représentation graphique d'une ellipse.



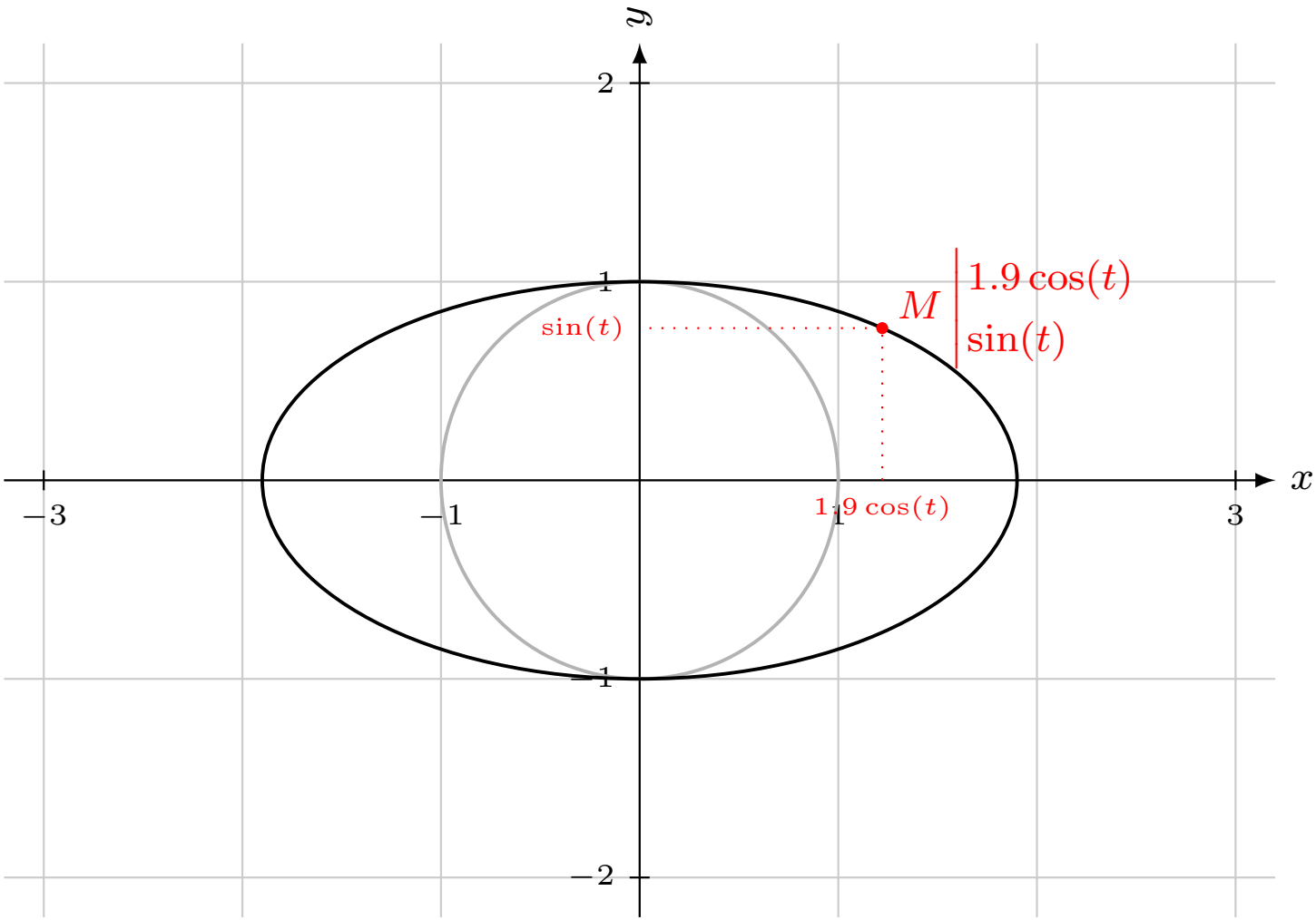
3. Représentation graphique d'une ellipse.



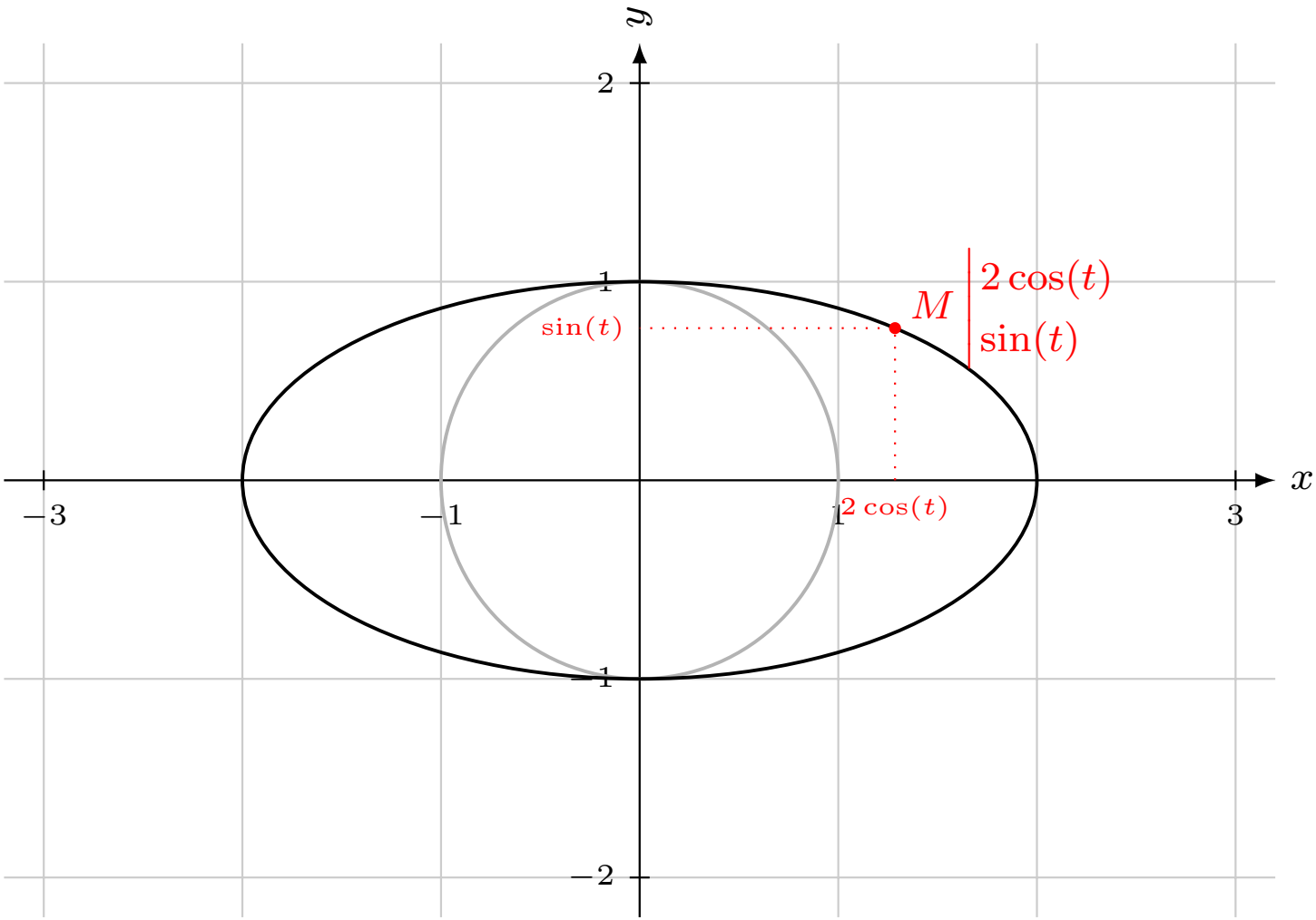
3. Représentation graphique d'une ellipse.



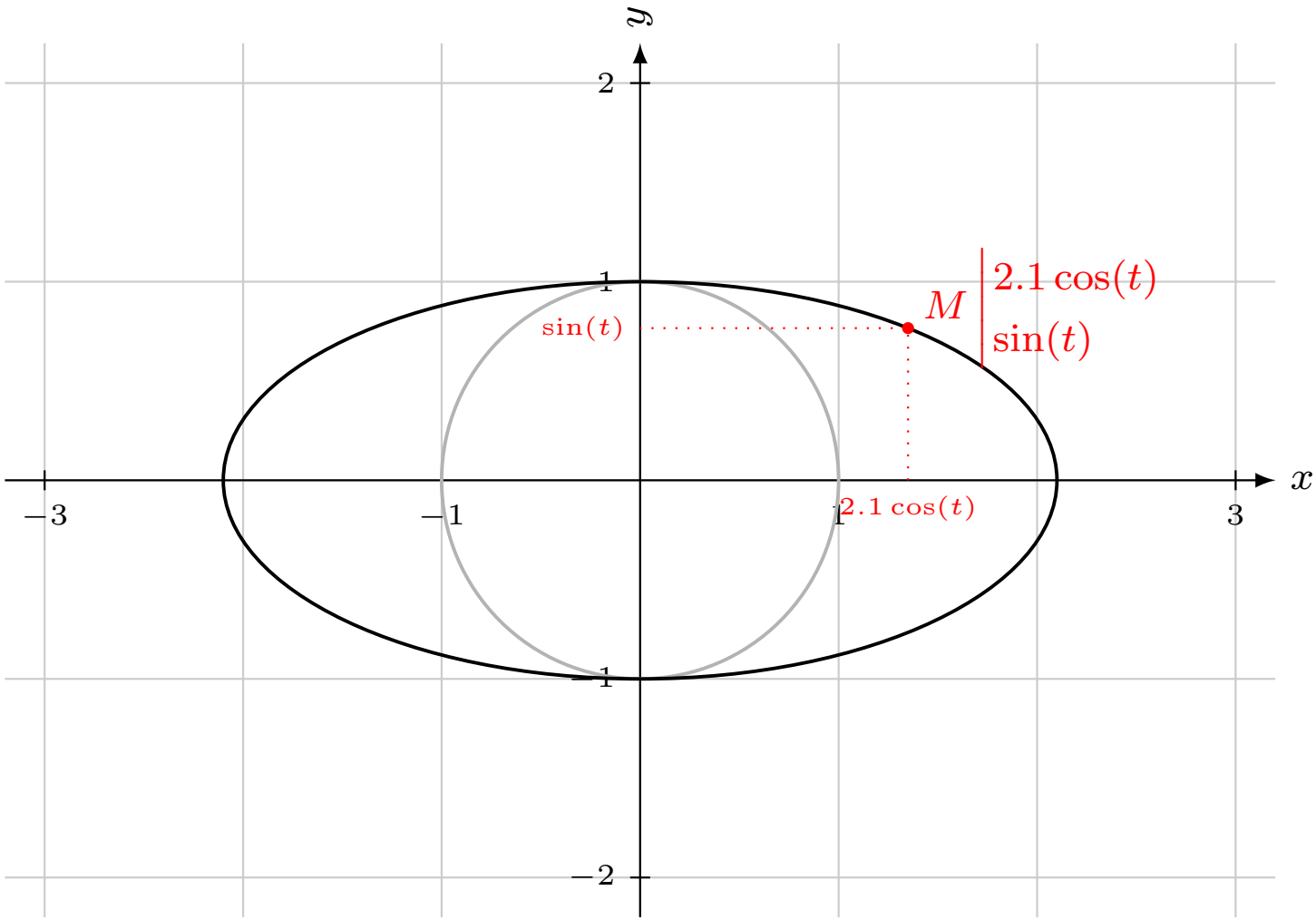
3. Représentation graphique d'une ellipse.



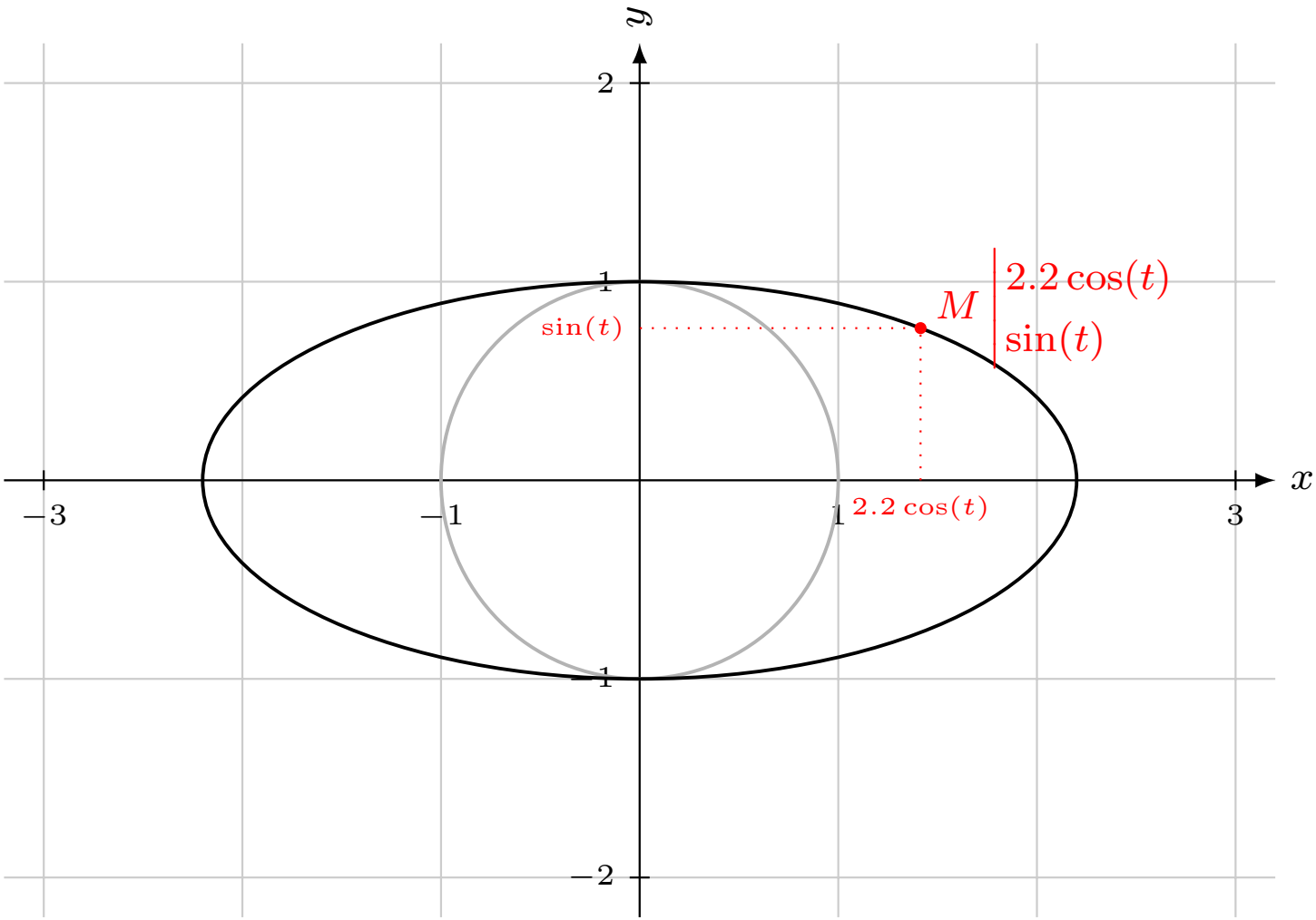
3. Représentation graphique d'une ellipse.



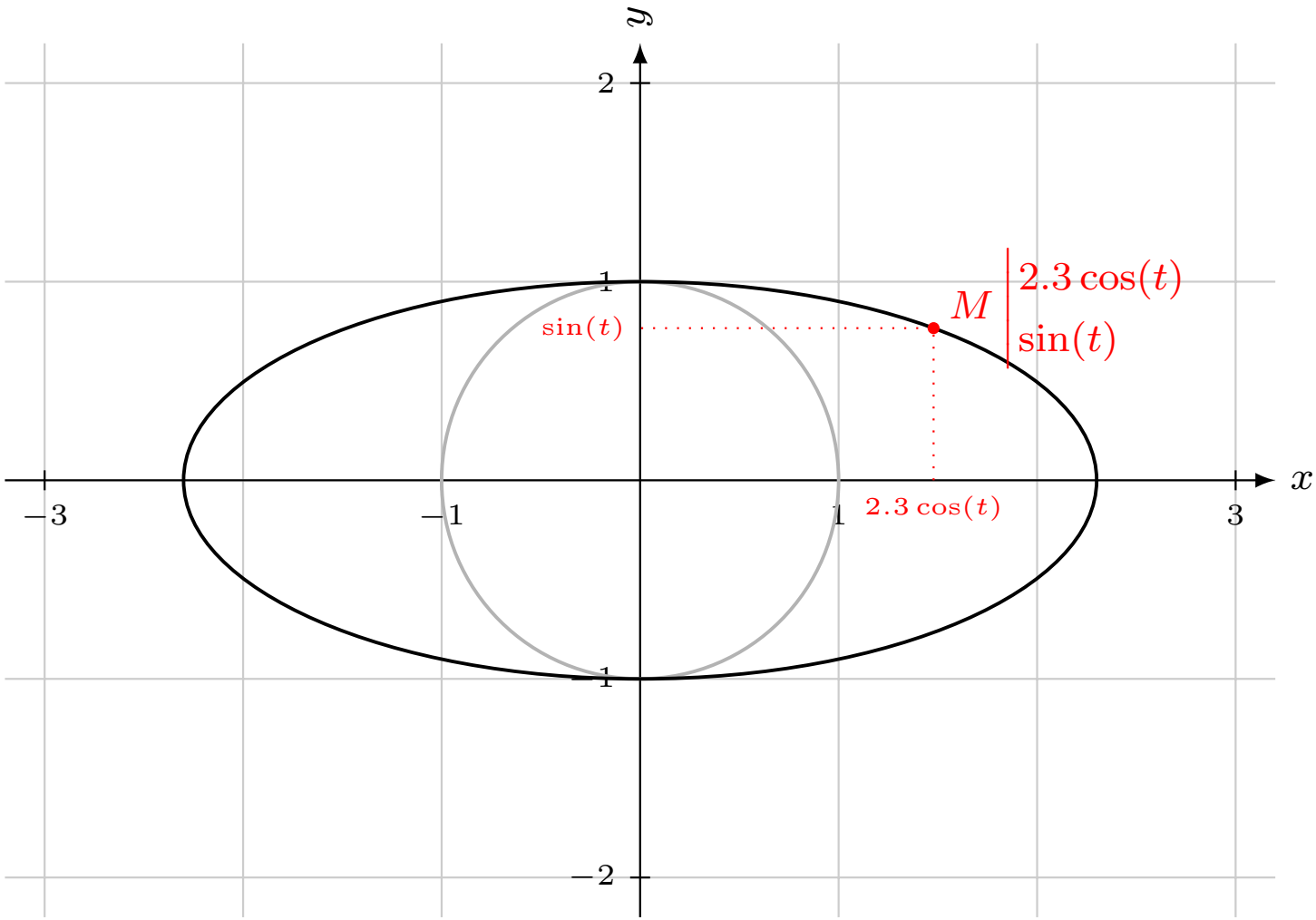
3. Représentation graphique d'une ellipse.



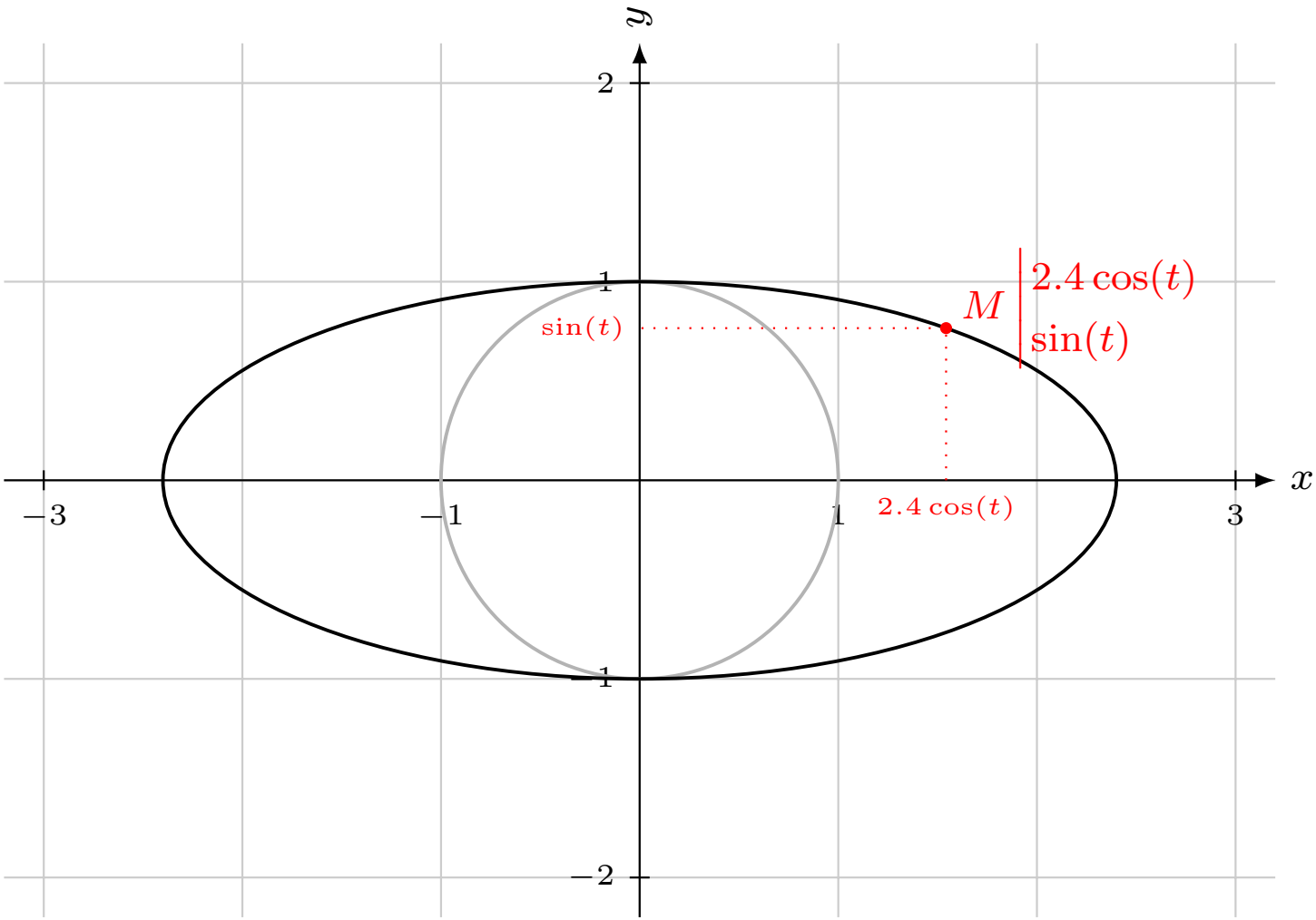
3. Représentation graphique d'une ellipse.



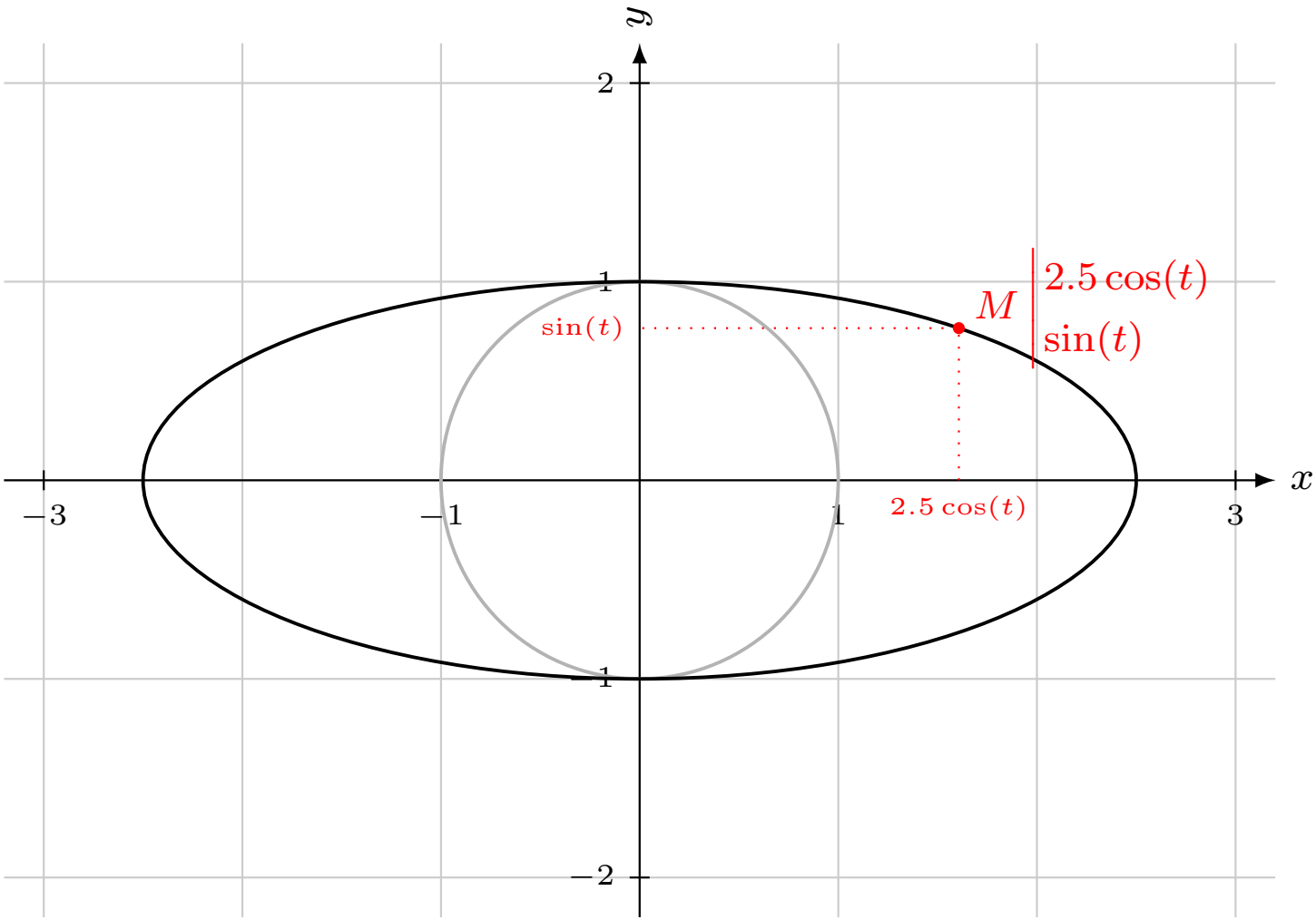
3. Représentation graphique d'une ellipse.



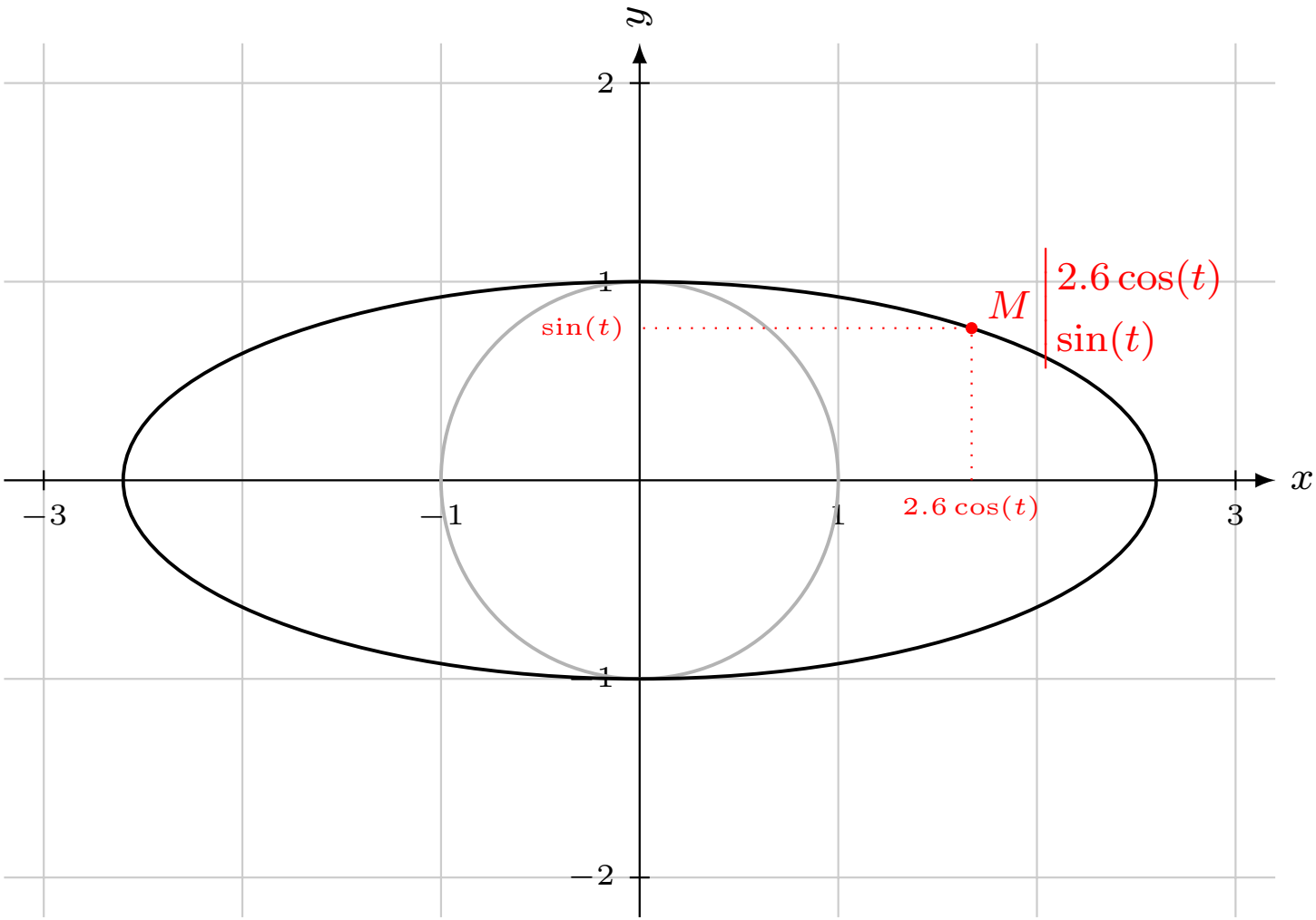
3. Représentation graphique d'une ellipse.



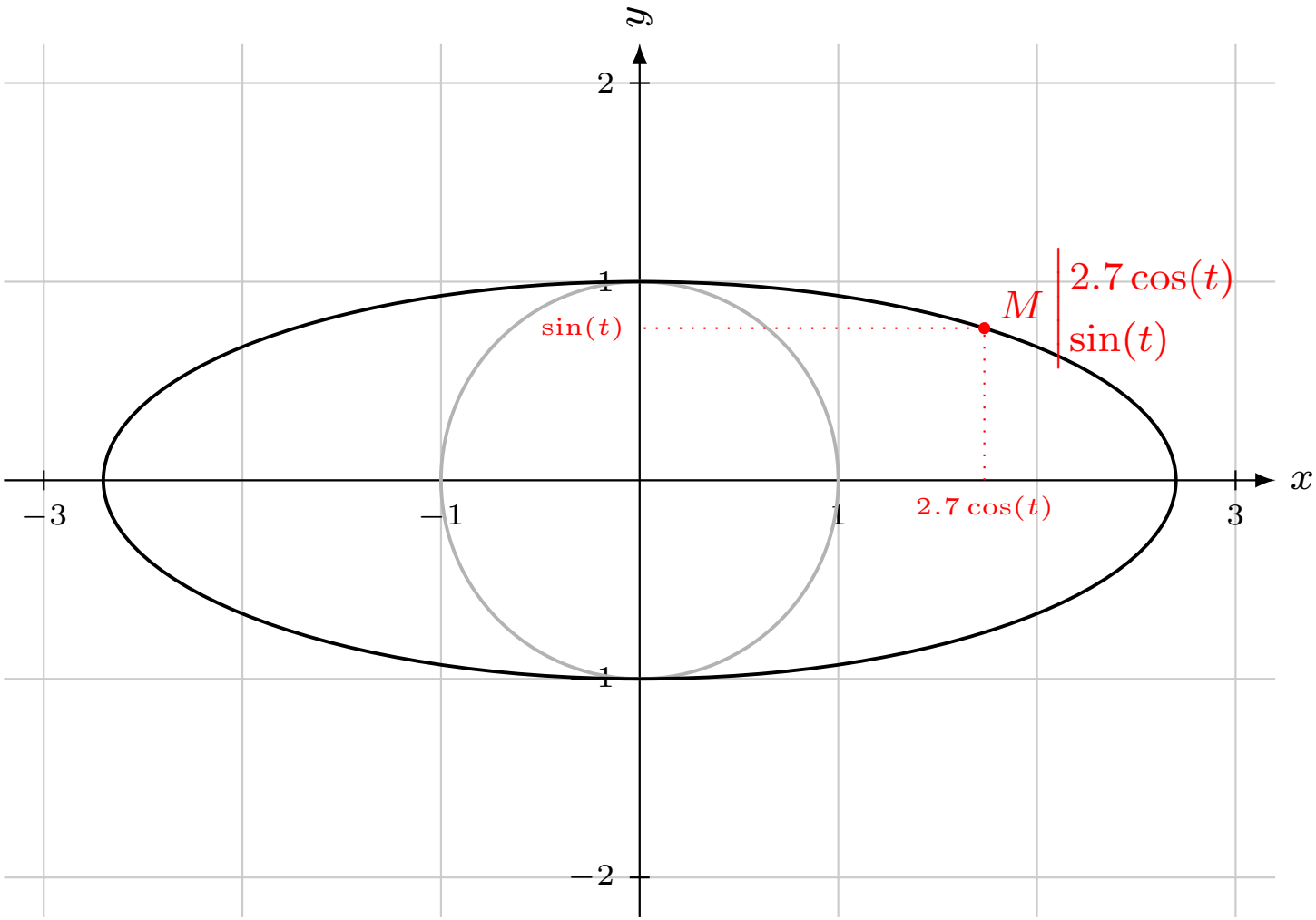
3. Représentation graphique d'une ellipse.



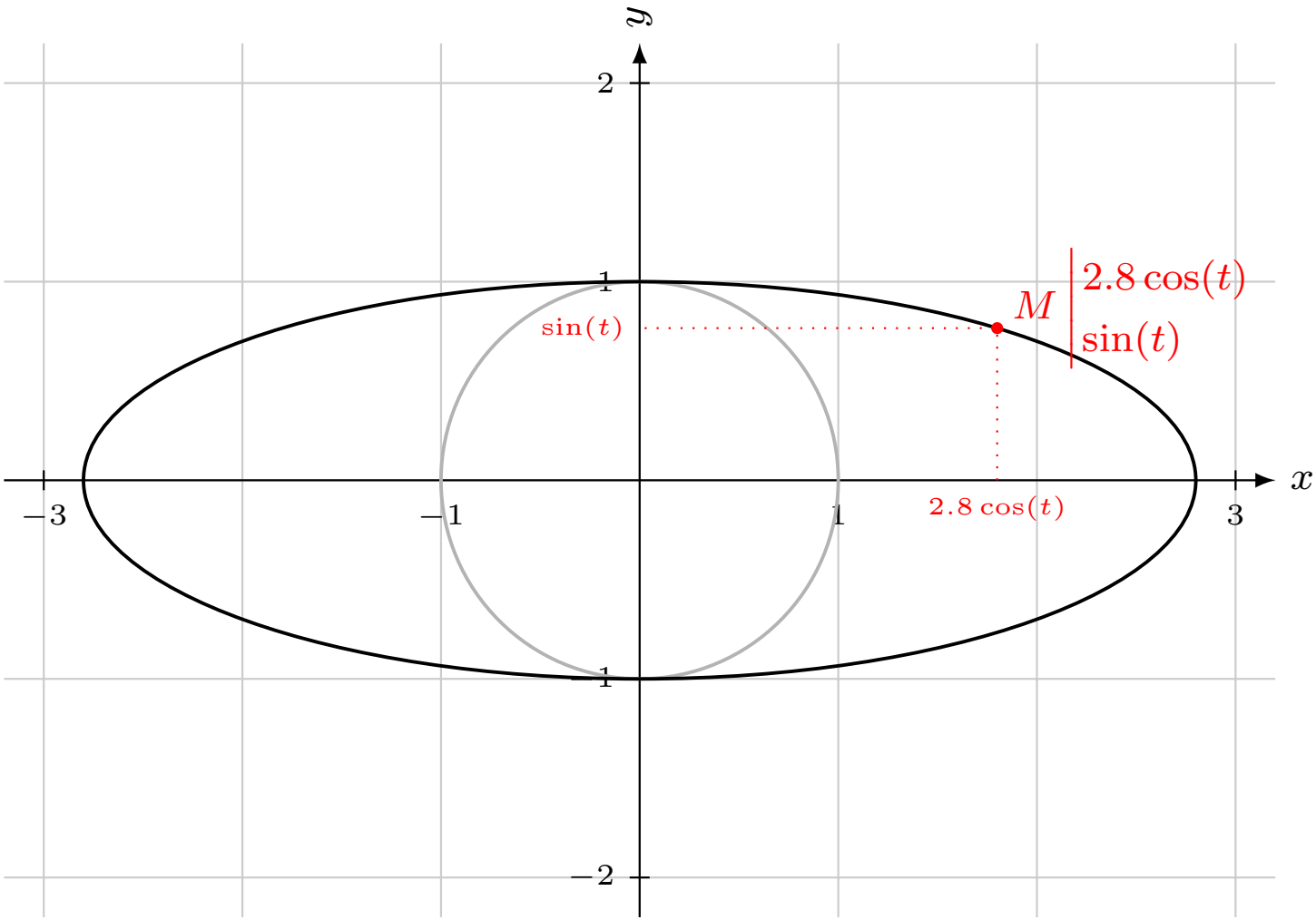
3. Représentation graphique d'une ellipse.



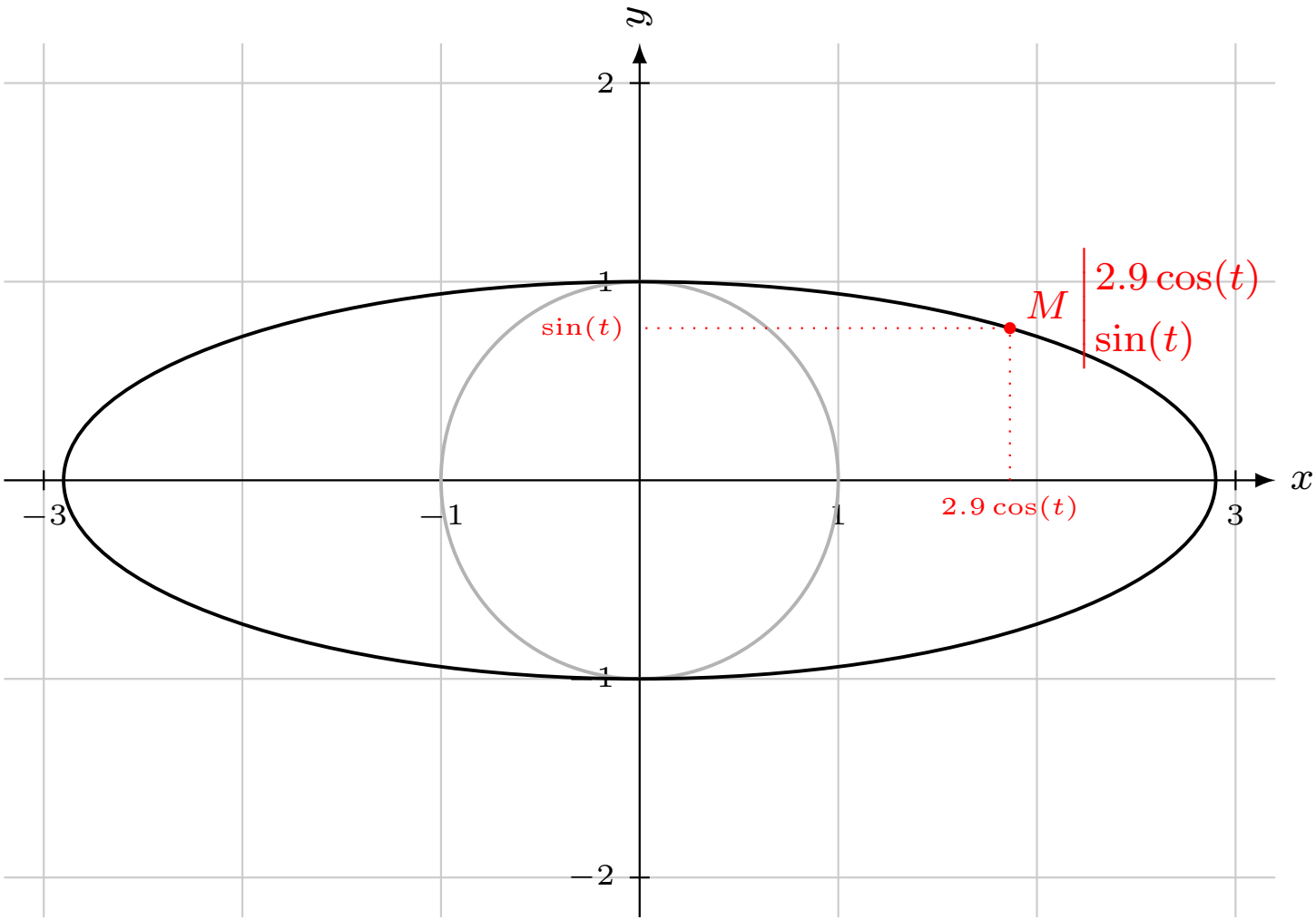
3. Représentation graphique d'une ellipse.



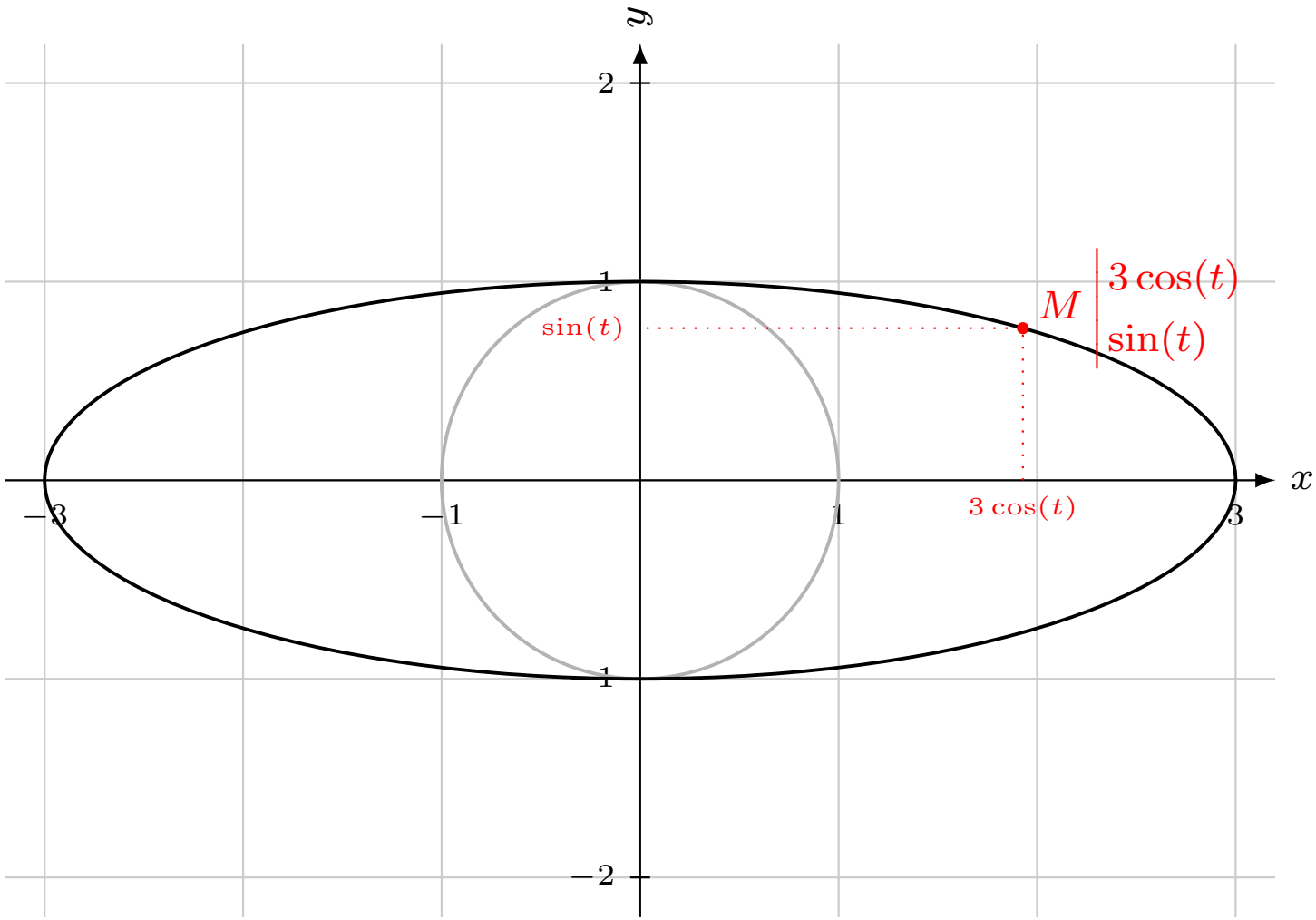
3. Représentation graphique d'une ellipse.



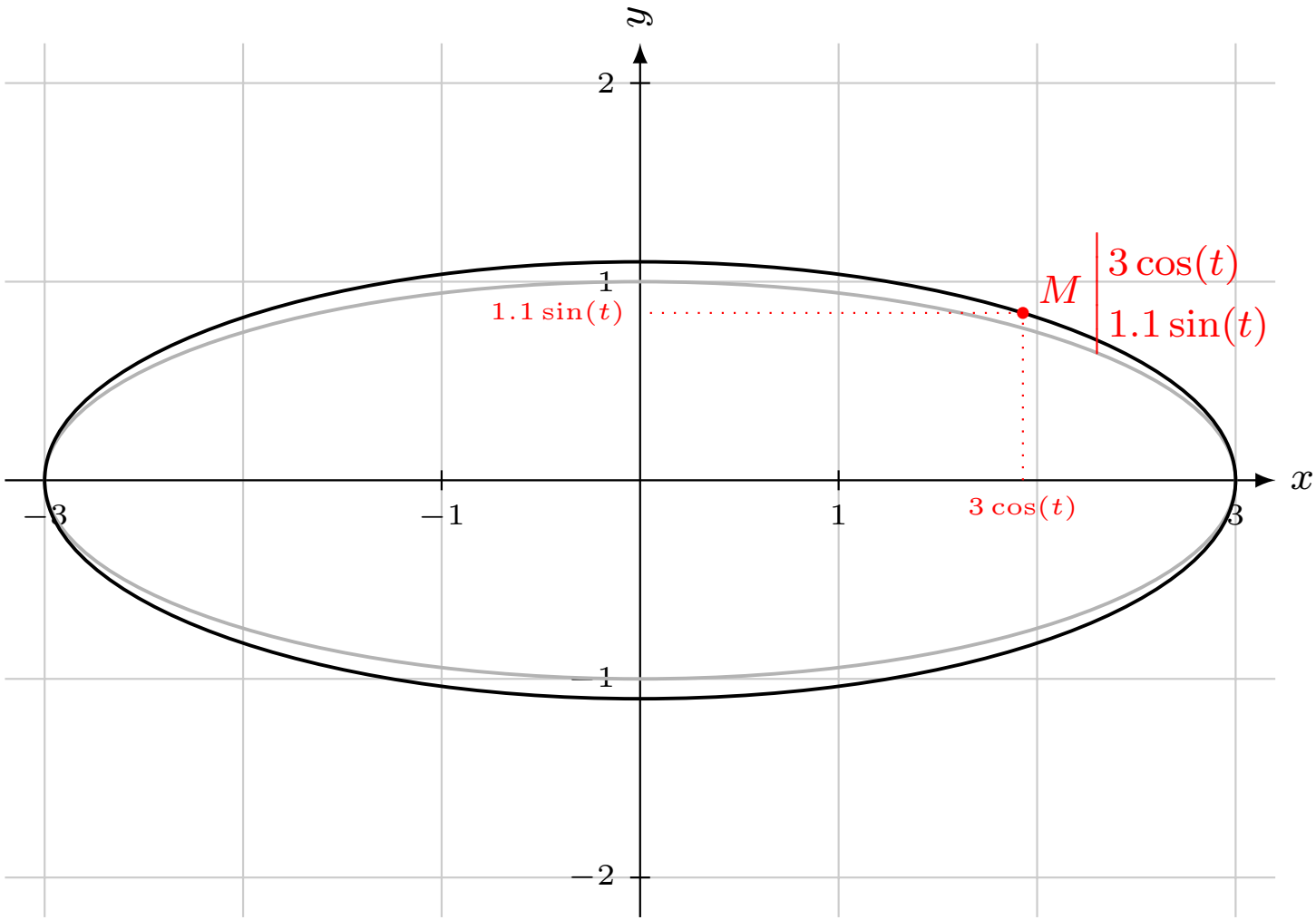
3. Représentation graphique d'une ellipse.



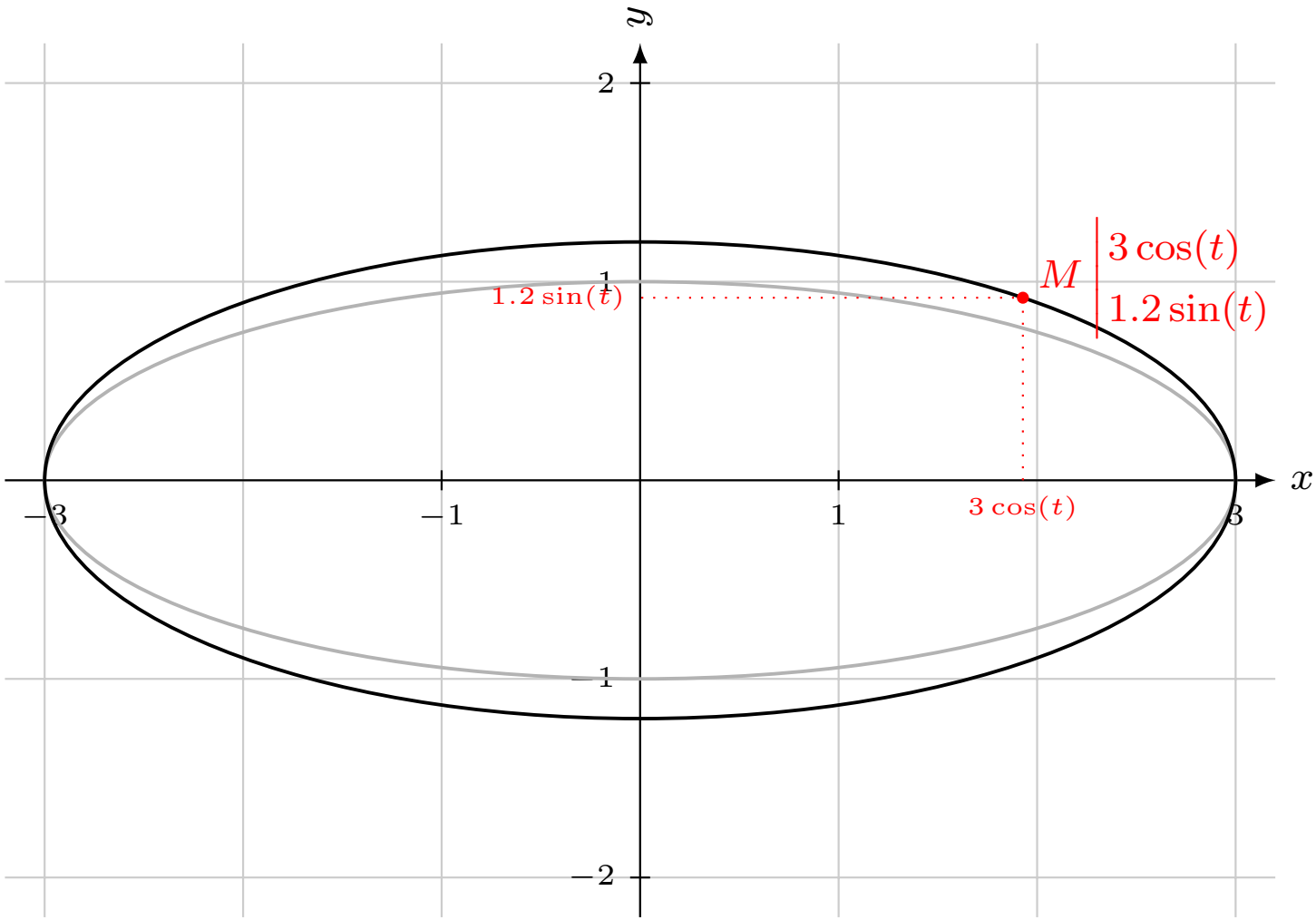
3. Représentation graphique d'une ellipse.



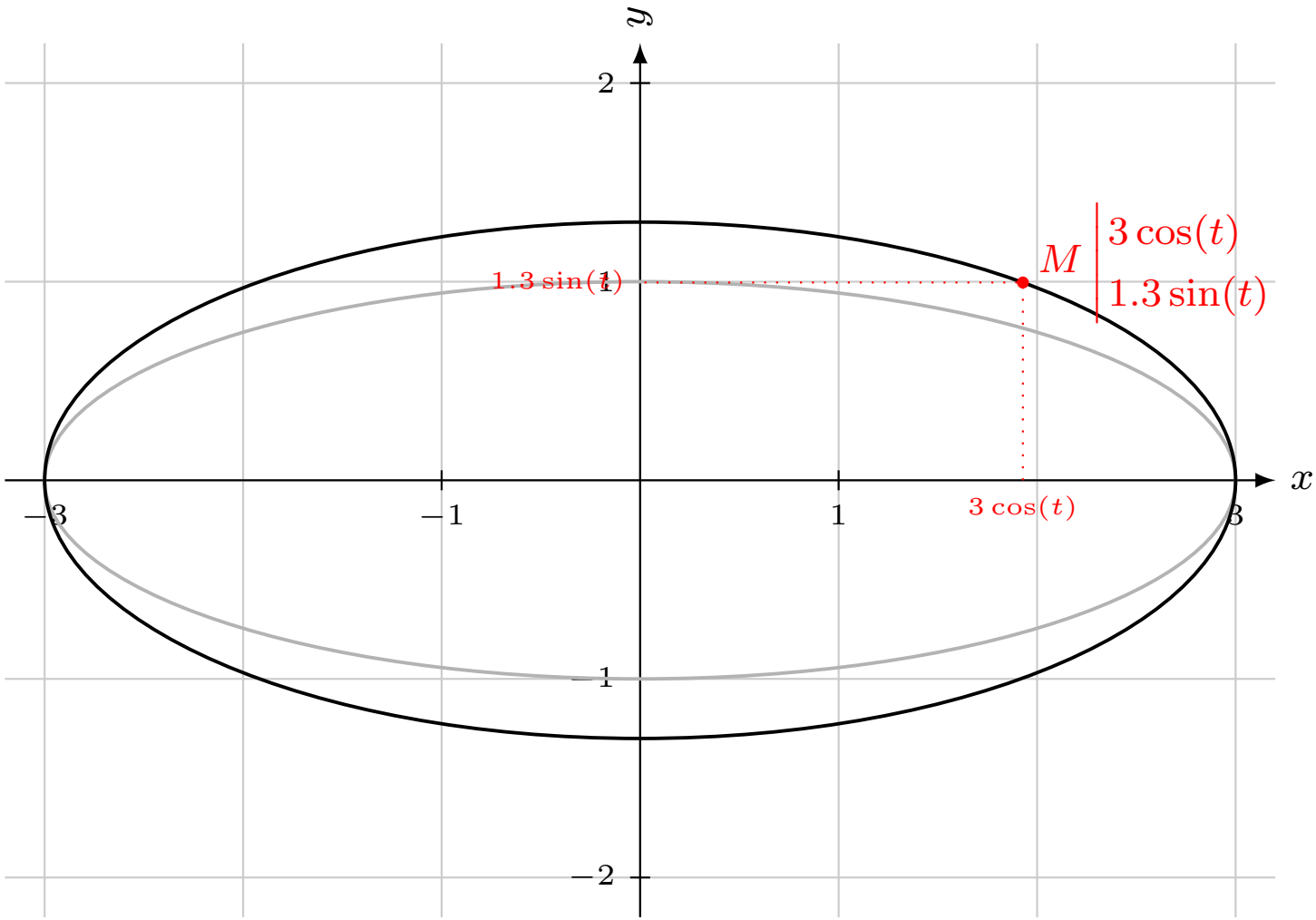
3. Représentation graphique d'une ellipse.



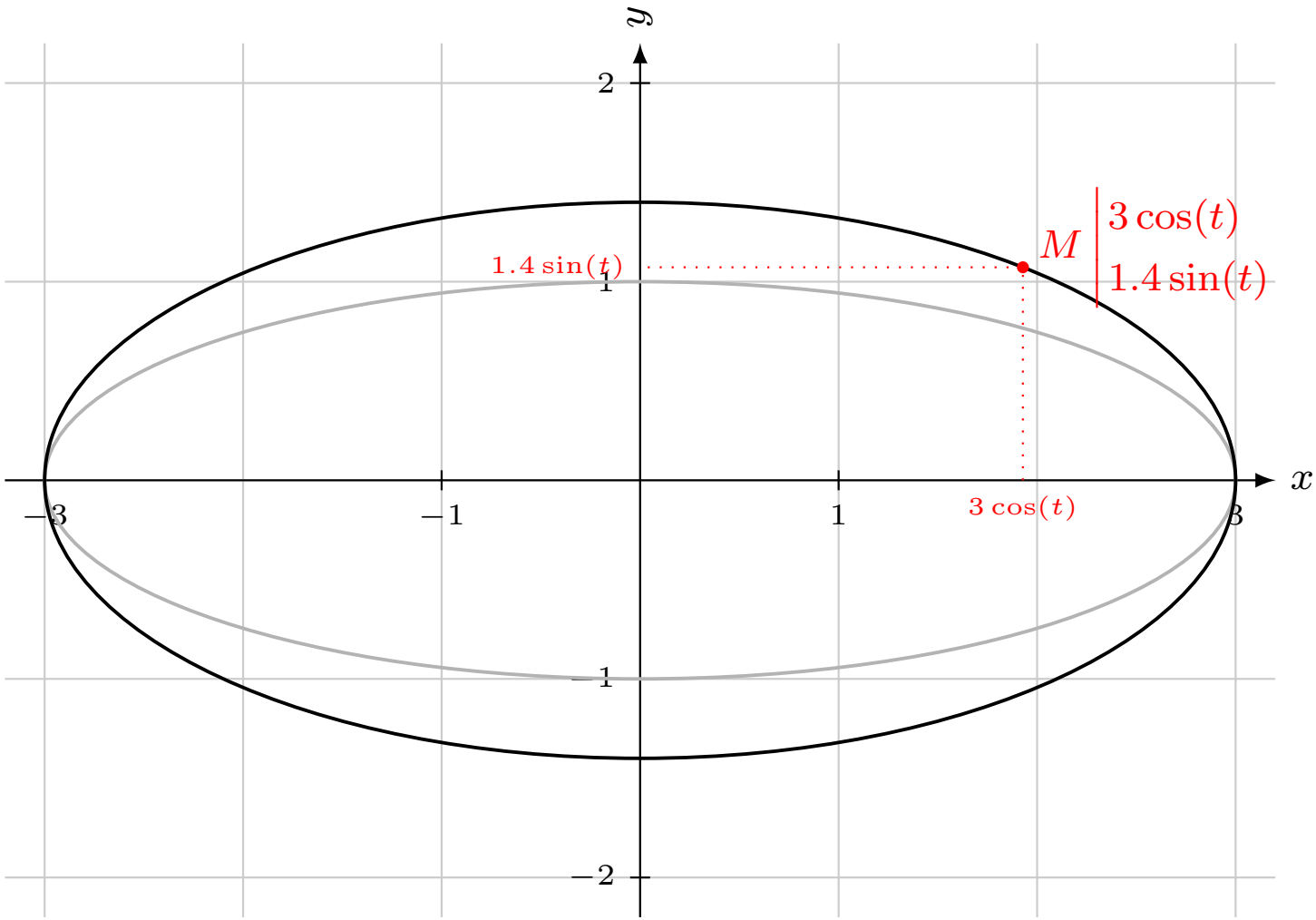
3. Représentation graphique d'une ellipse.



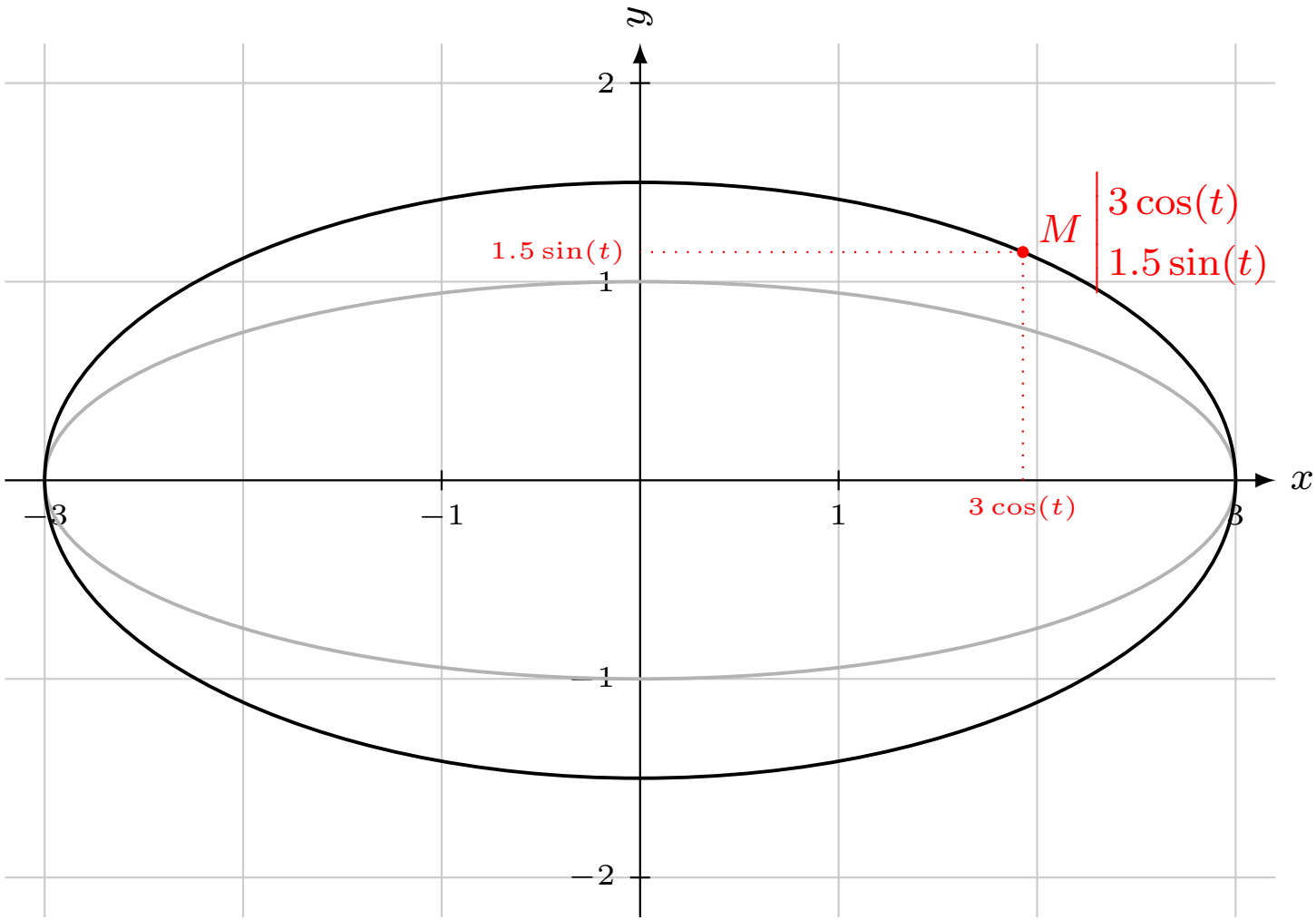
3. Représentation graphique d'une ellipse.



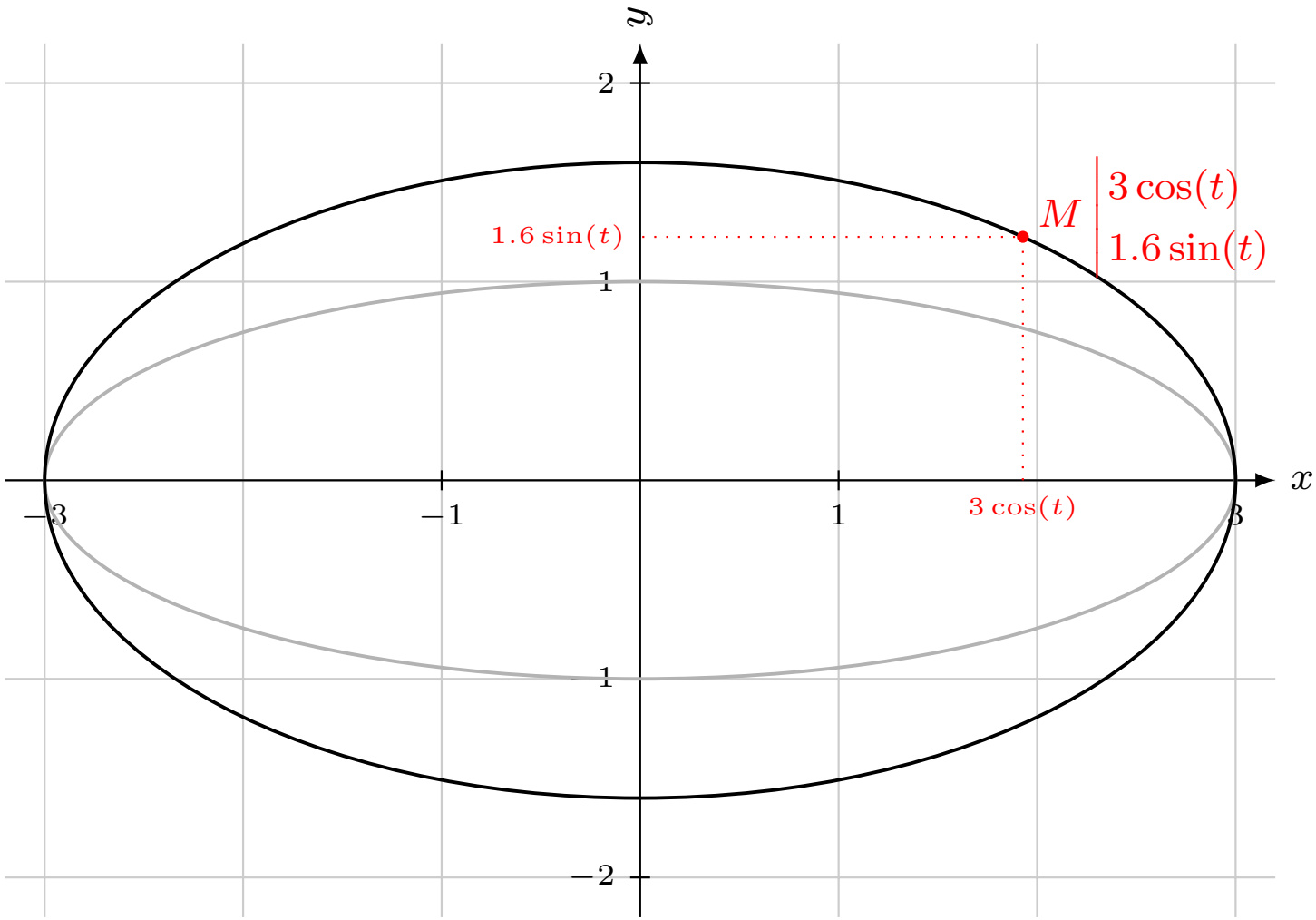
3. Représentation graphique d'une ellipse.



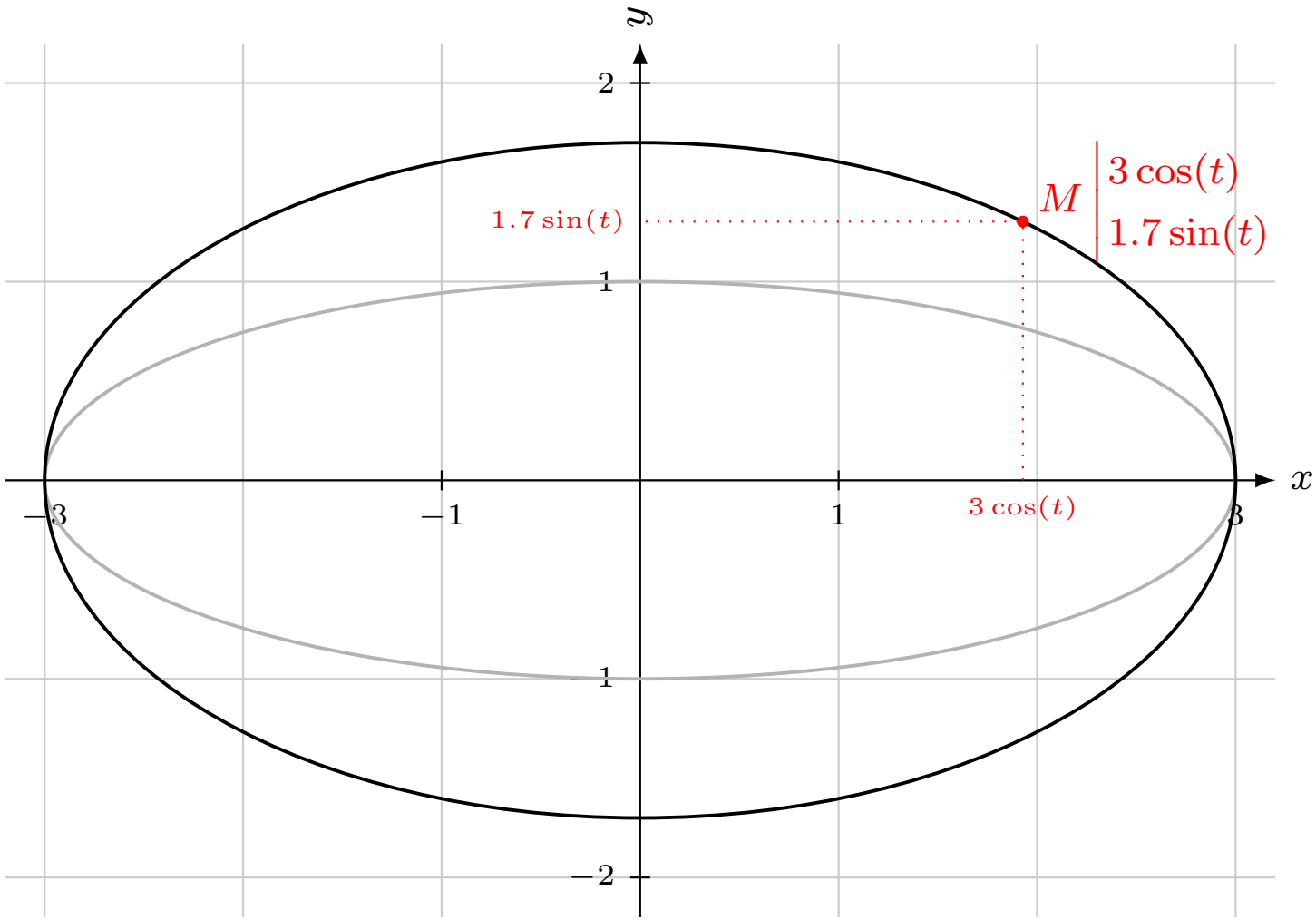
3. Représentation graphique d'une ellipse.



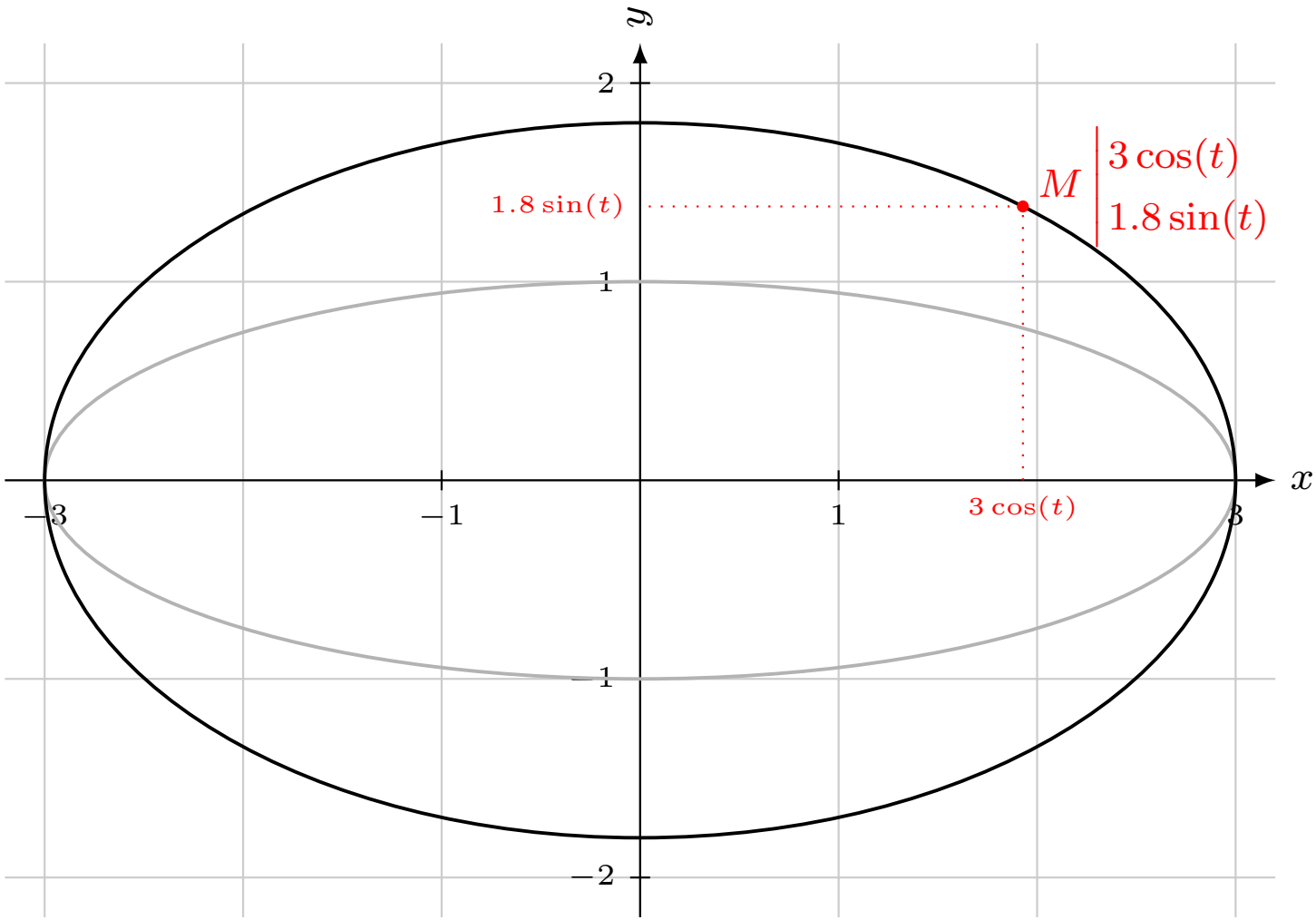
3. Représentation graphique d'une ellipse.



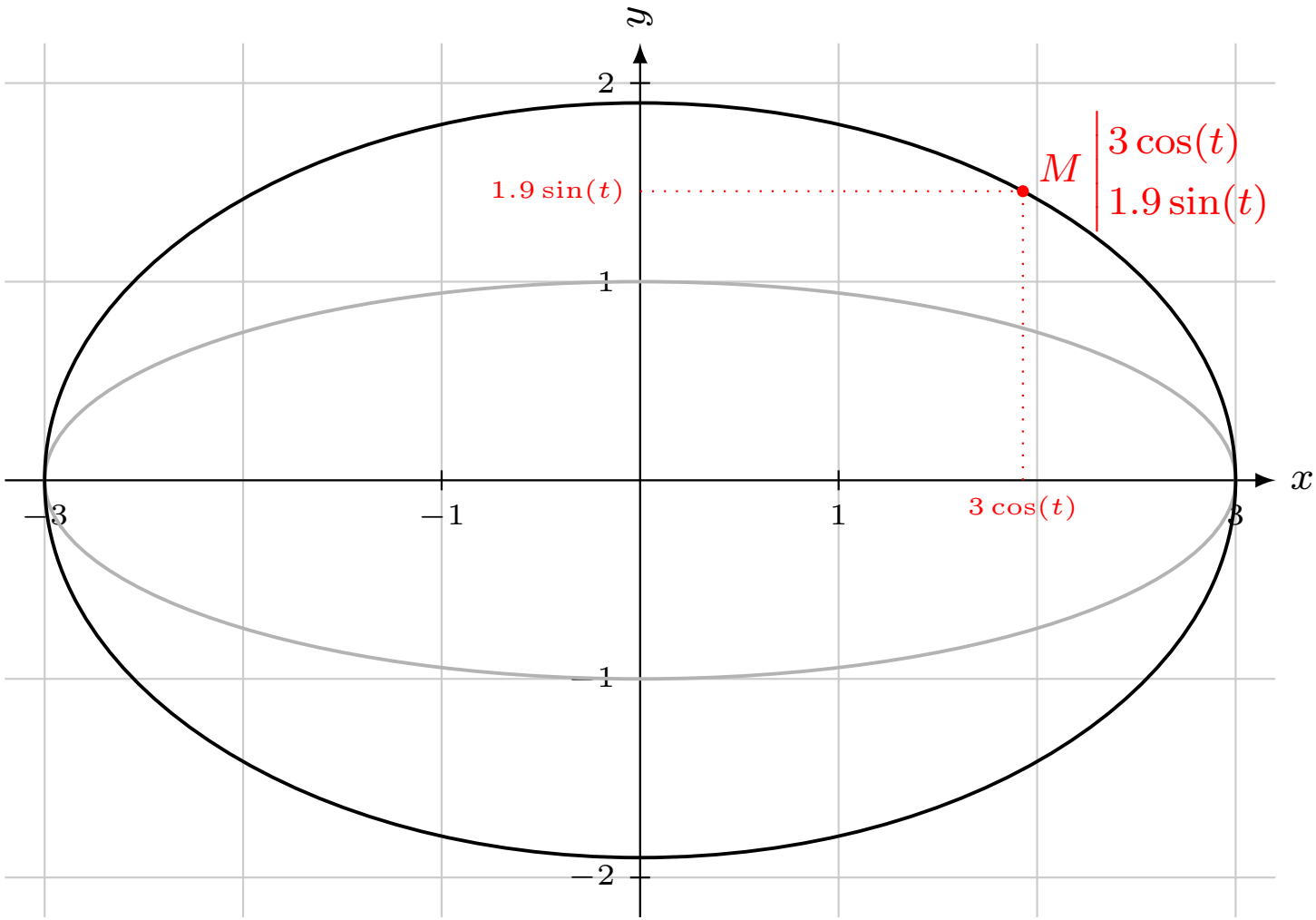
3. Représentation graphique d'une ellipse.



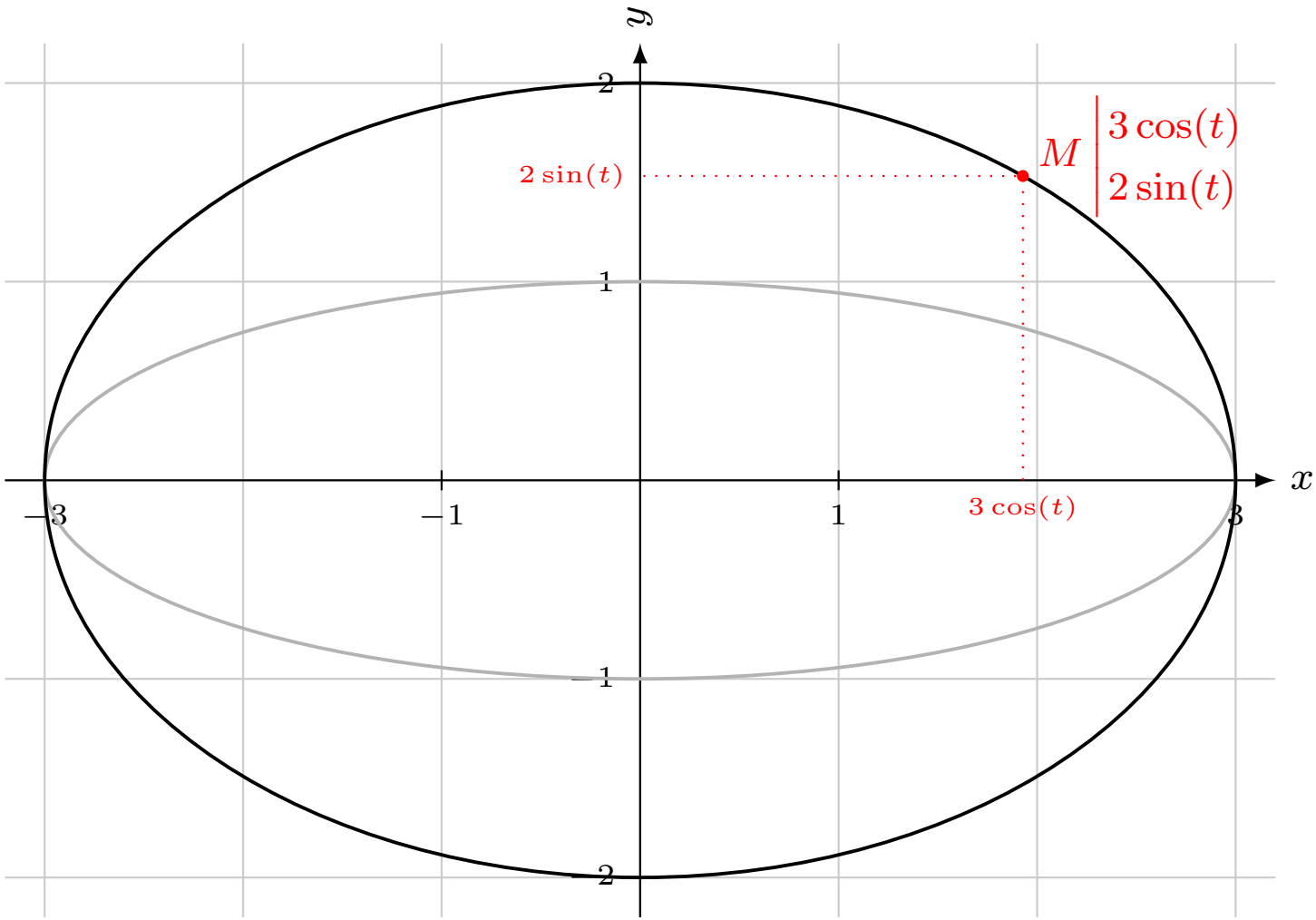
3. Représentation graphique d'une ellipse.



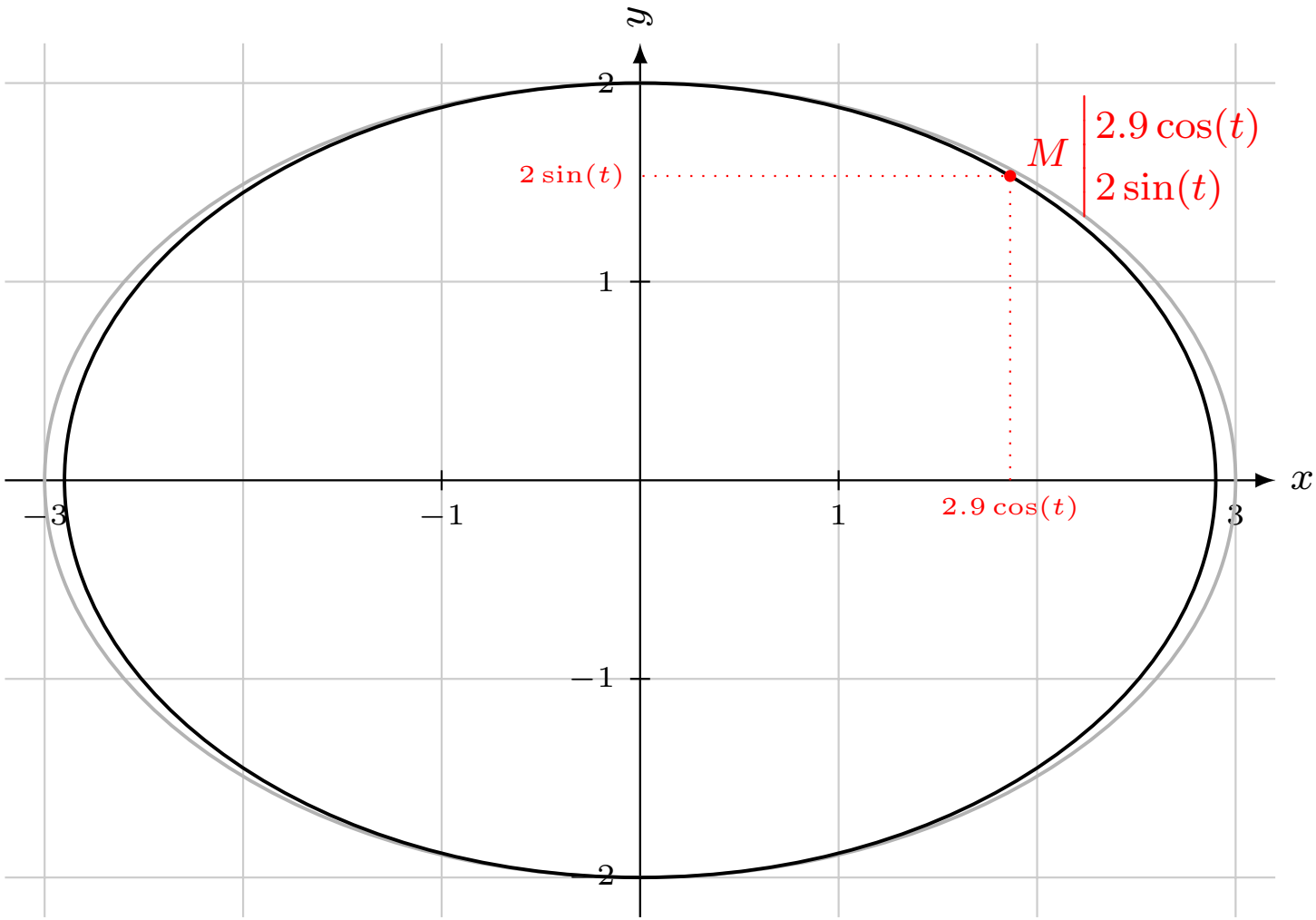
3. Représentation graphique d'une ellipse.



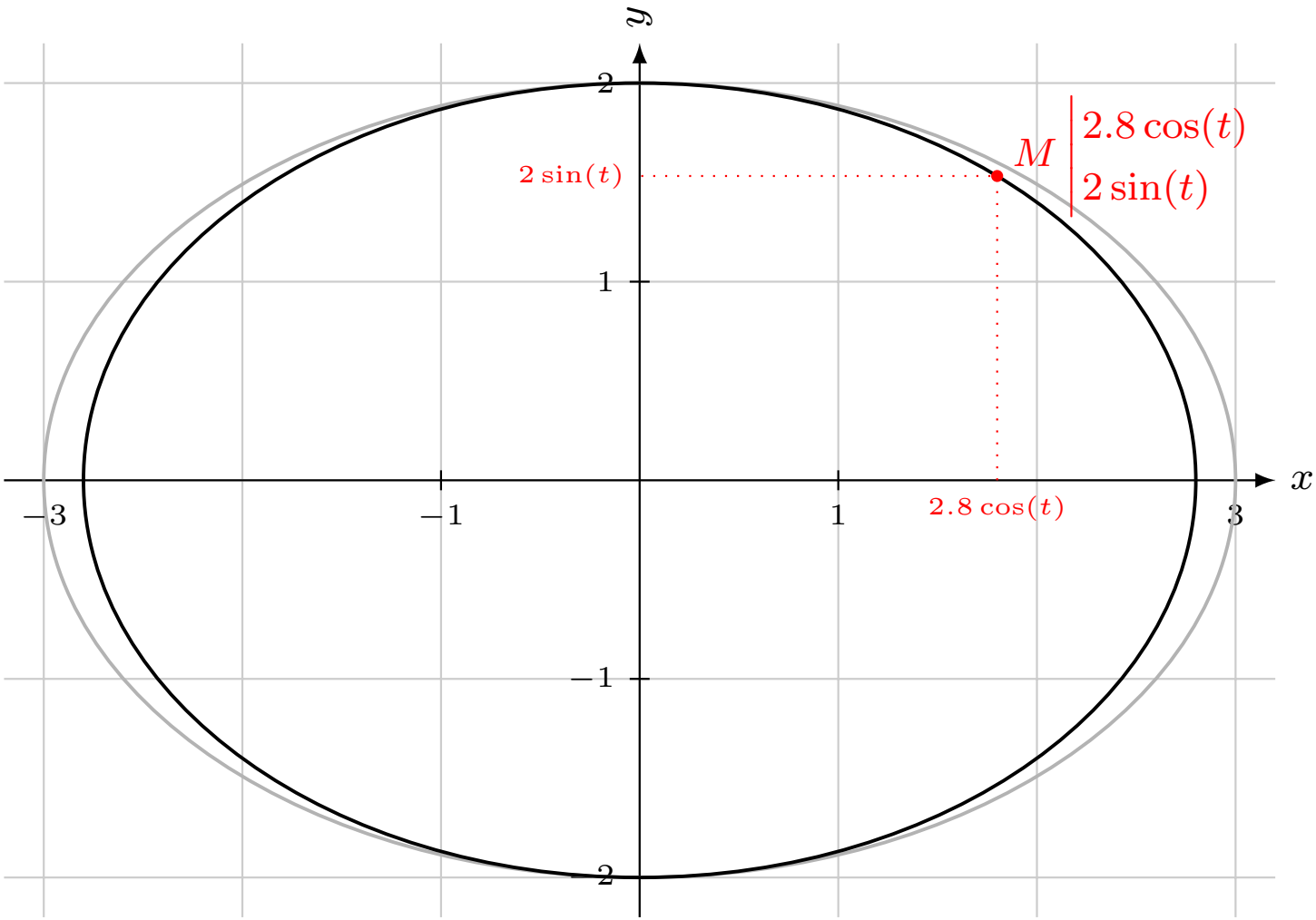
3. Représentation graphique d'une ellipse.



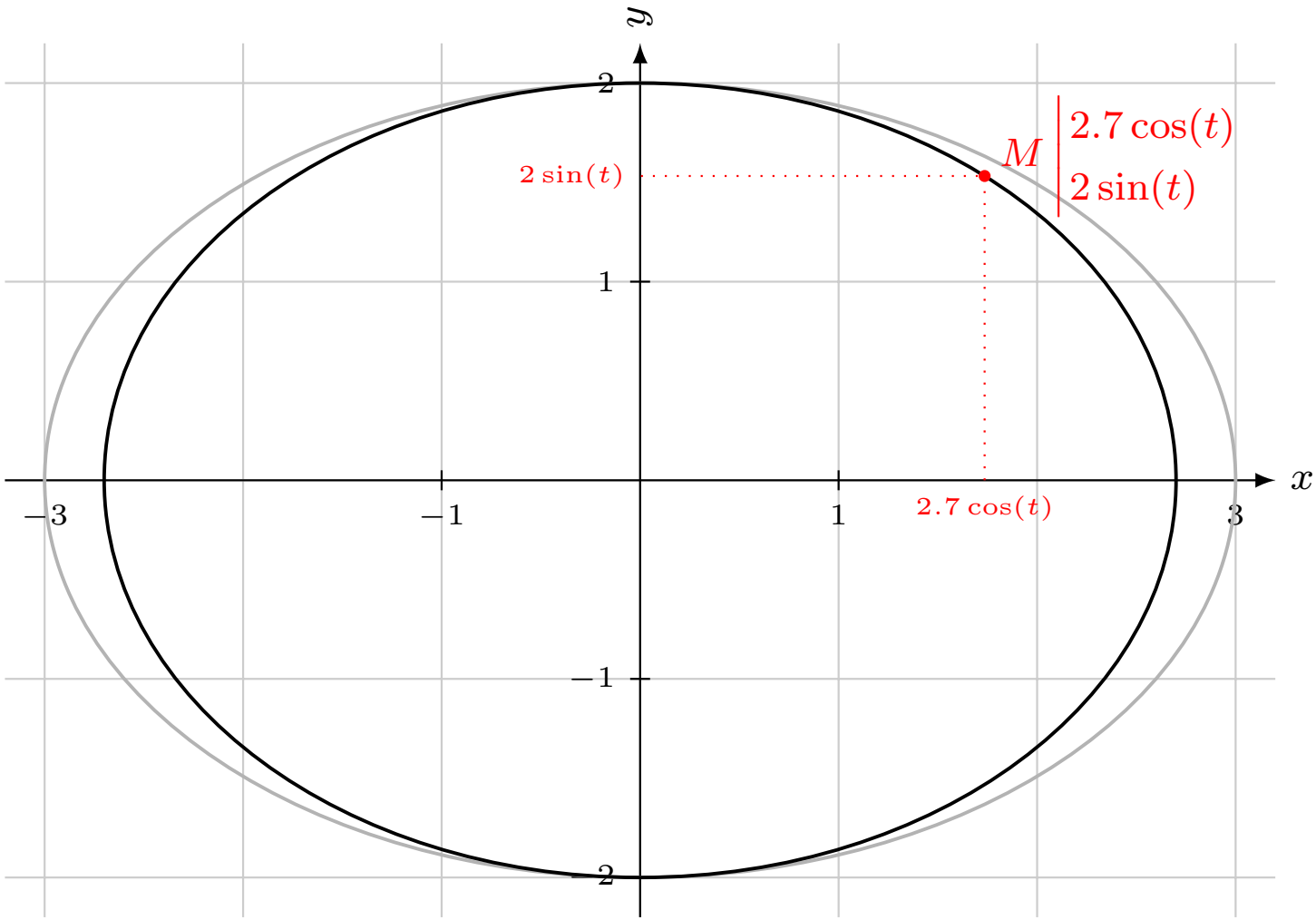
3. Représentation graphique d'une ellipse.



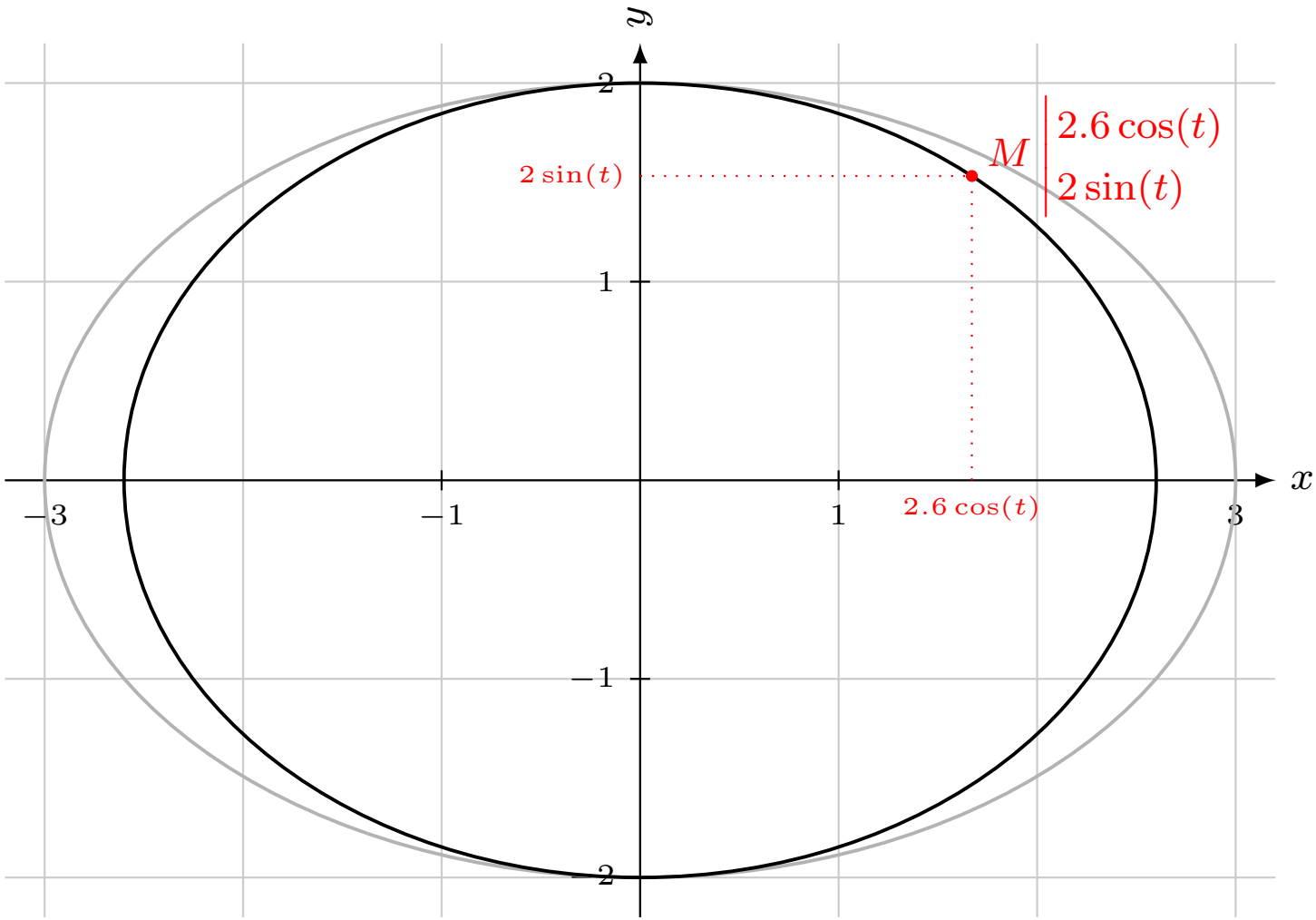
3. Représentation graphique d'une ellipse.



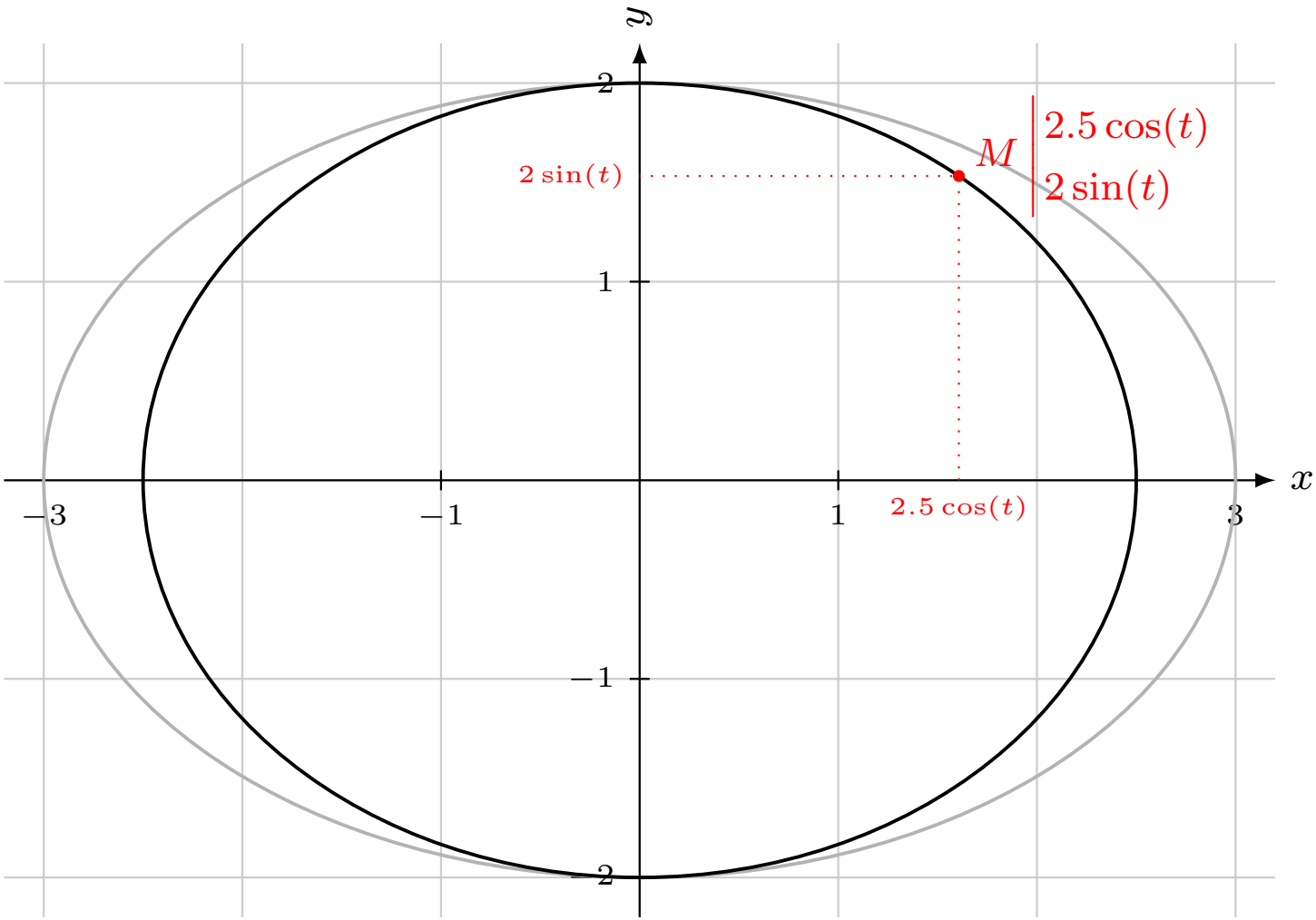
3. Représentation graphique d'une ellipse.



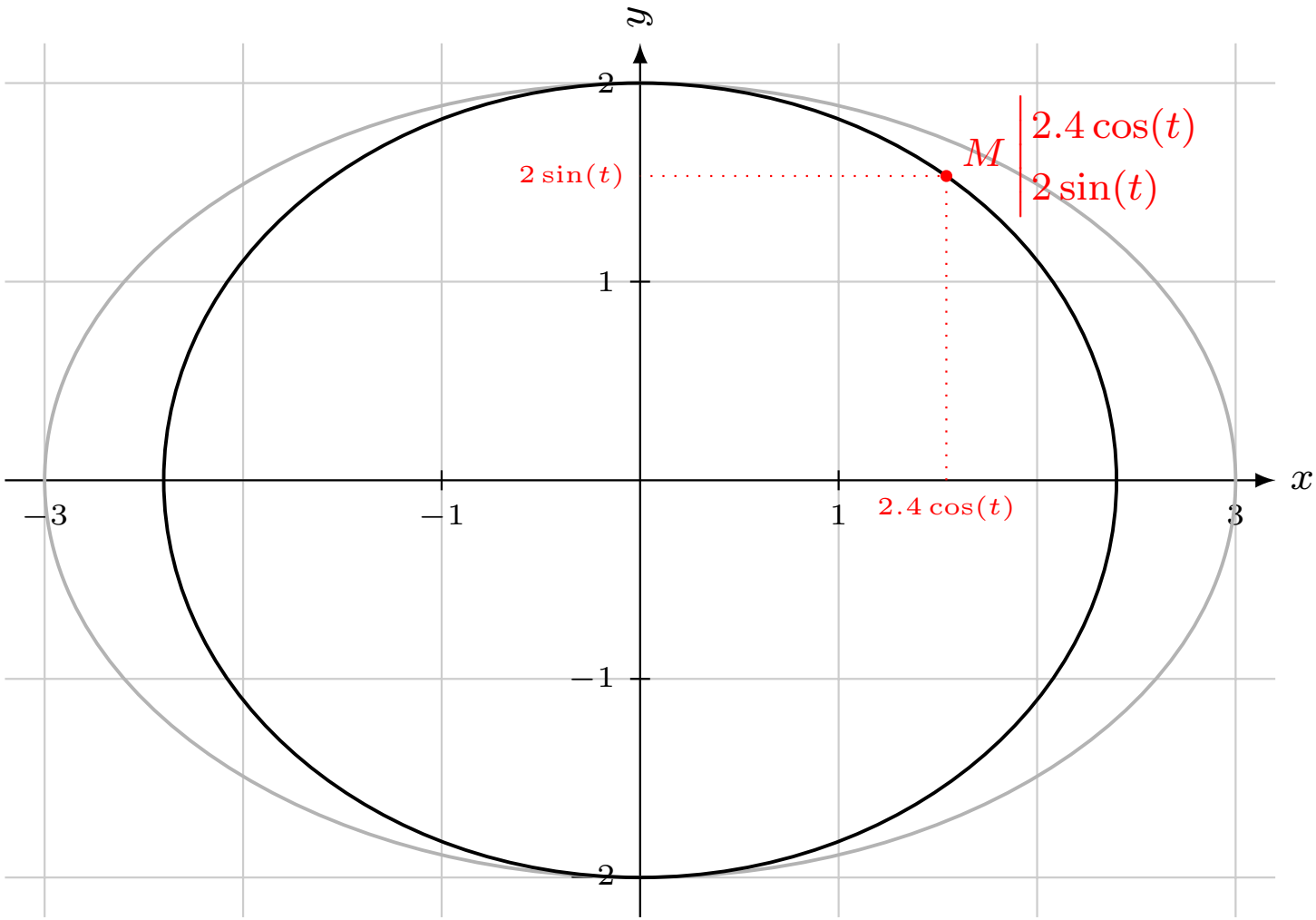
3. Représentation graphique d'une ellipse.



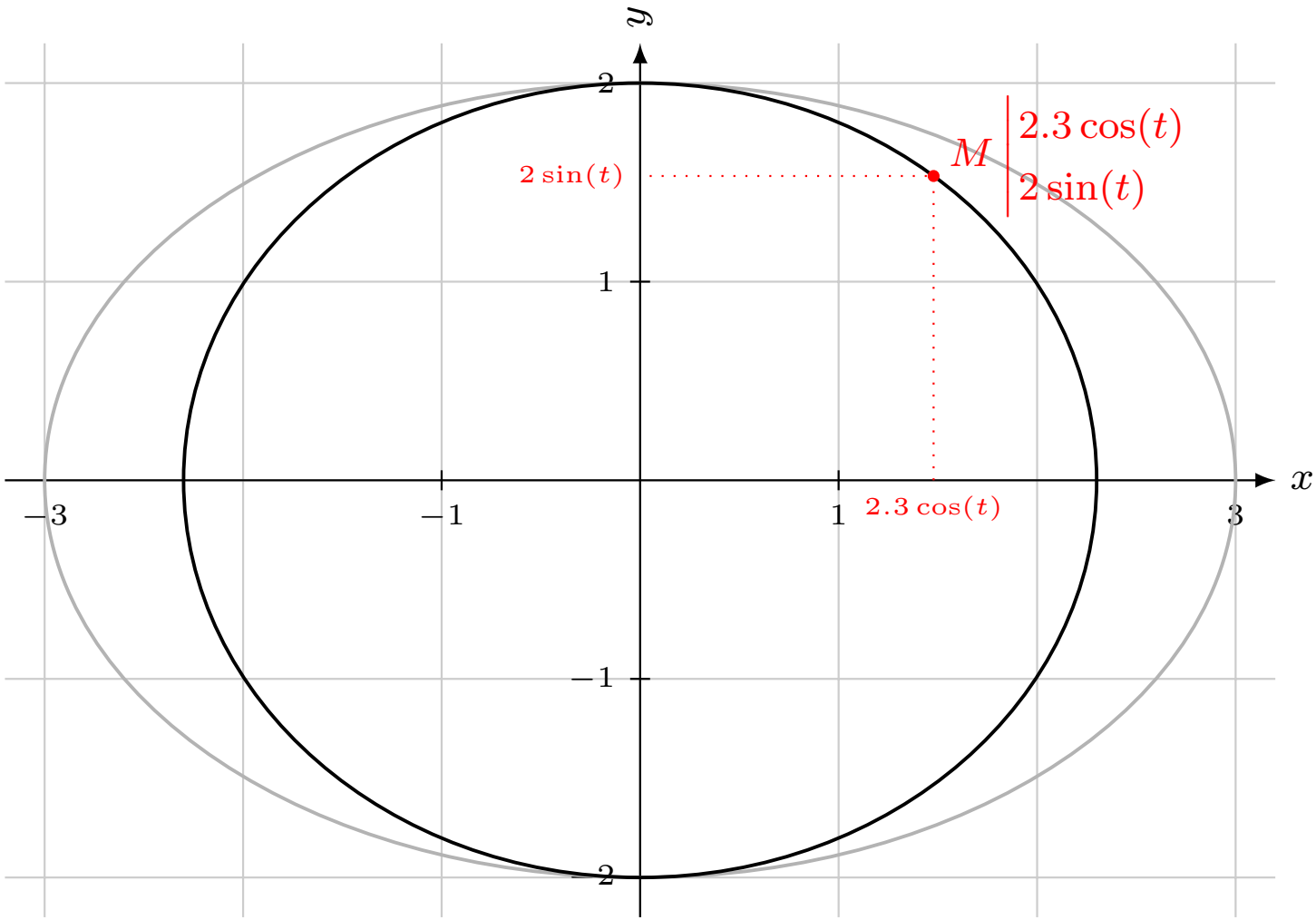
3. Représentation graphique d'une ellipse.



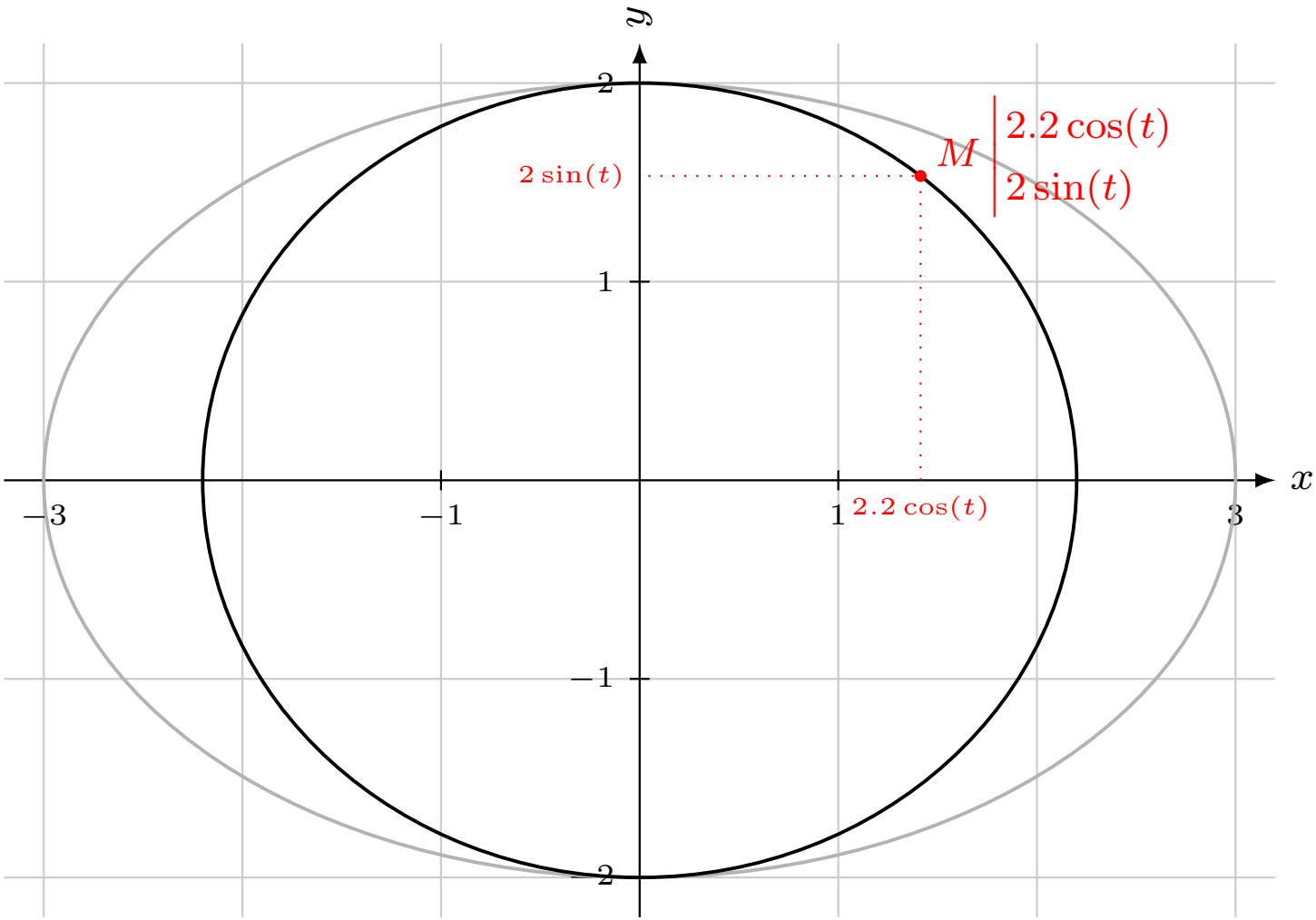
3. Représentation graphique d'une ellipse.



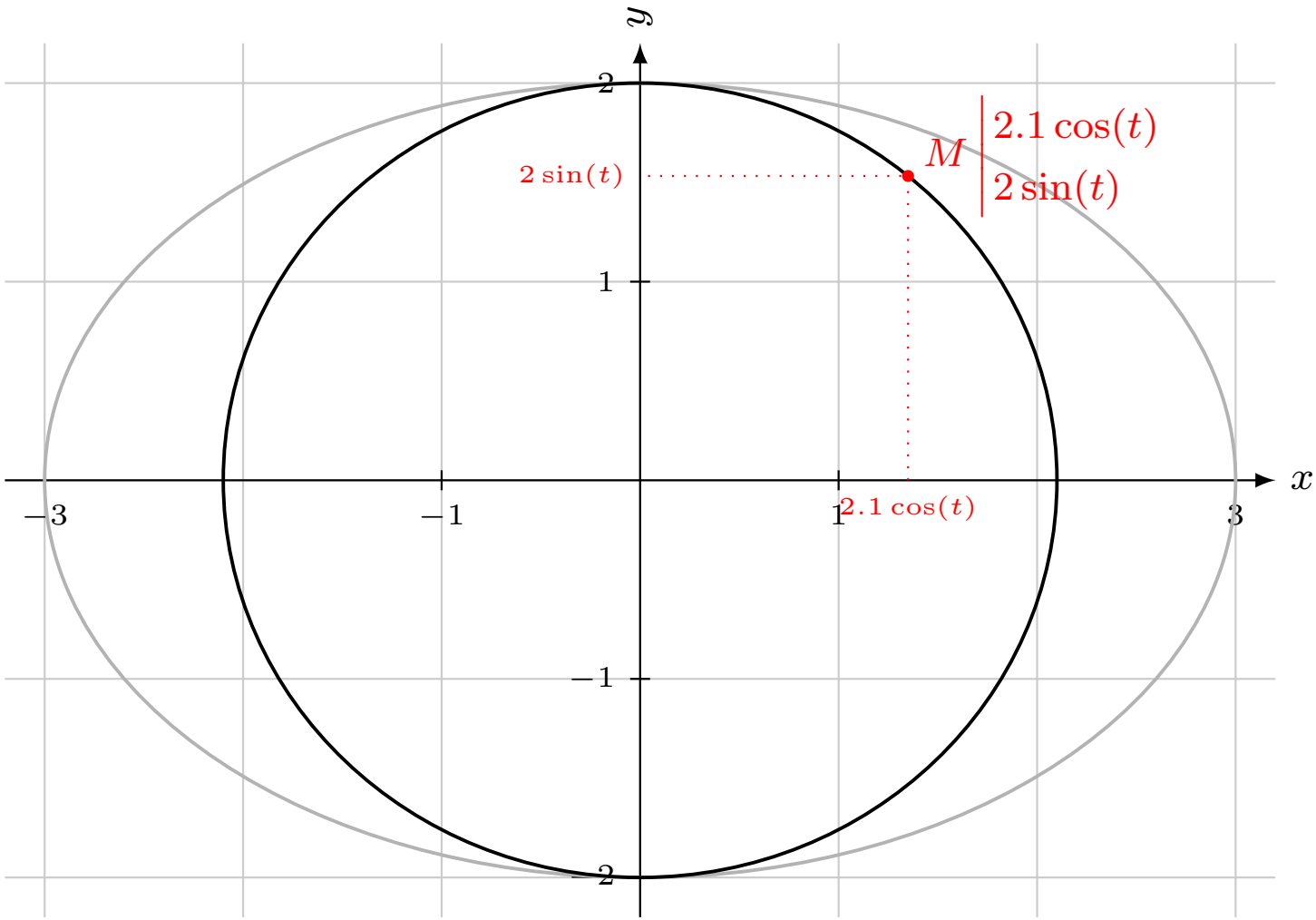
3. Représentation graphique d'une ellipse.



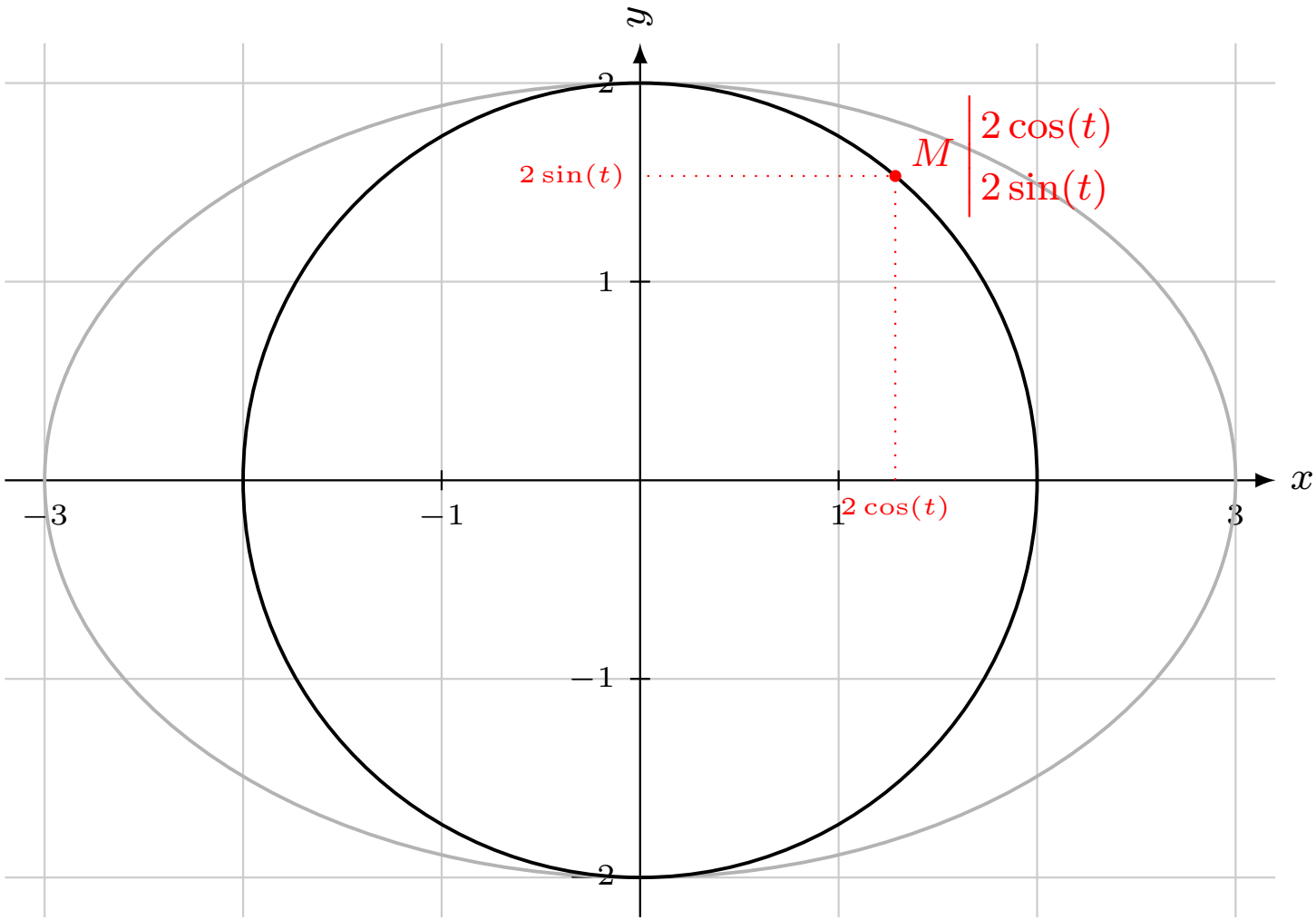
3. Représentation graphique d'une ellipse.



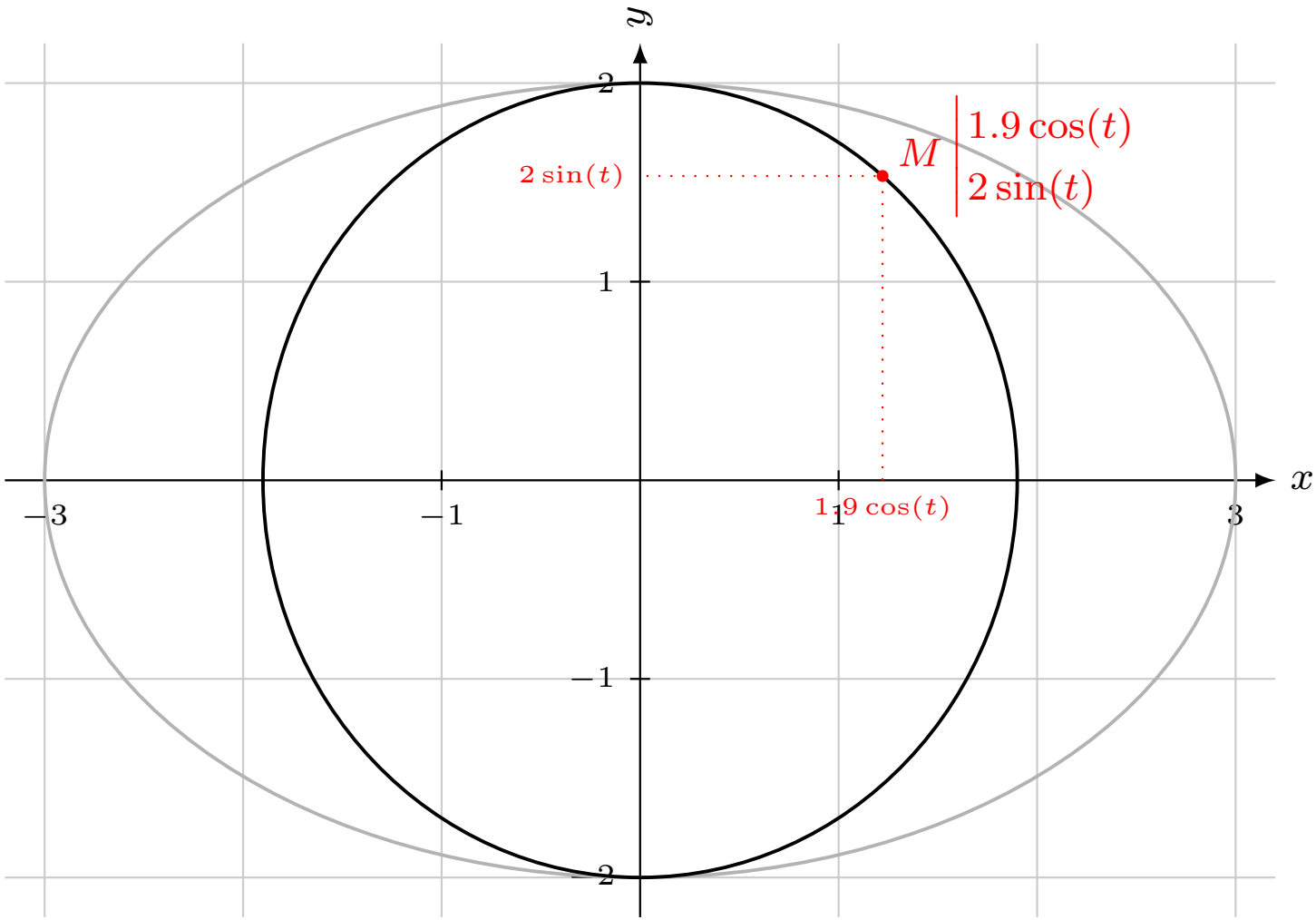
3. Représentation graphique d'une ellipse.



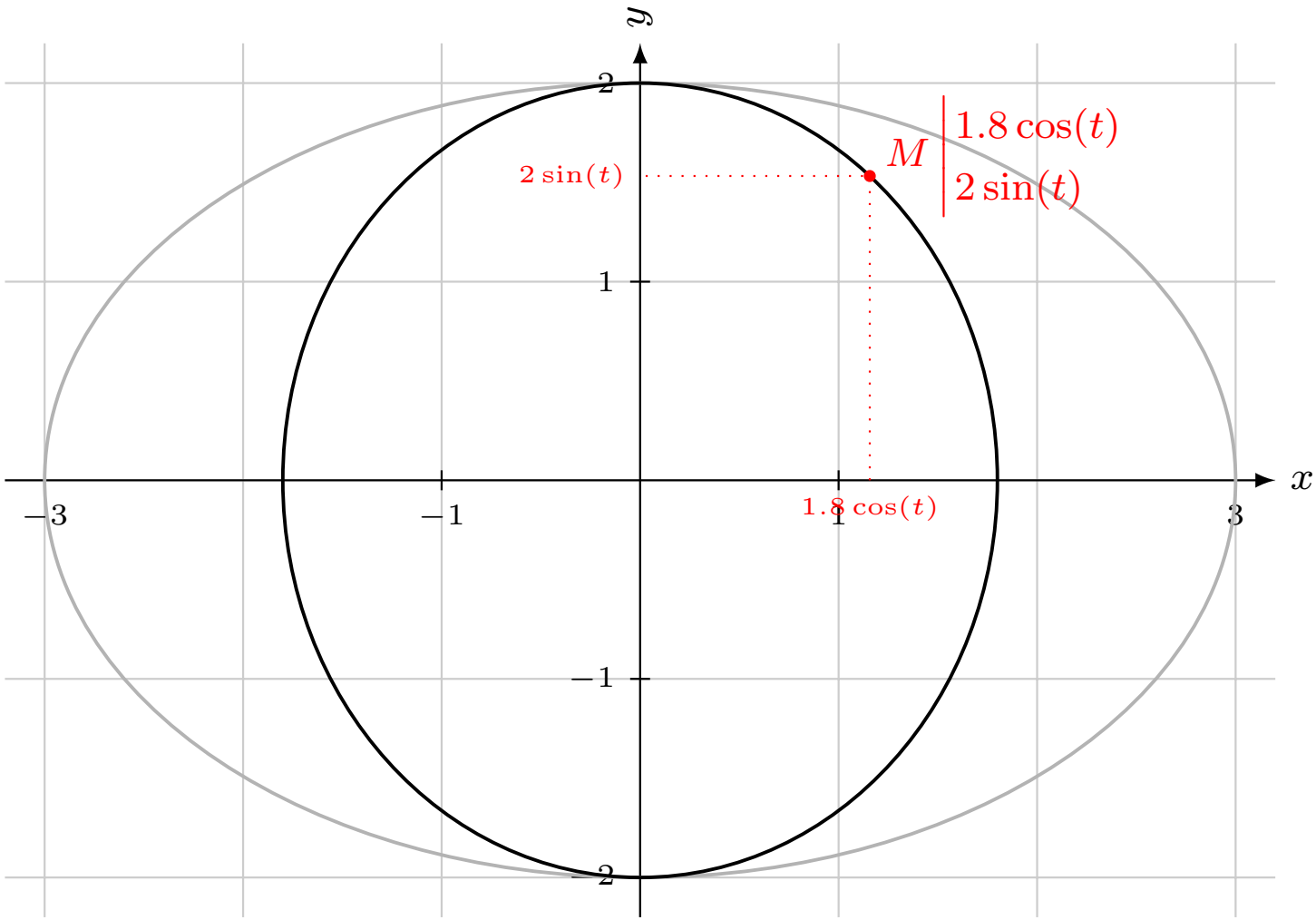
3. Représentation graphique d'une ellipse.



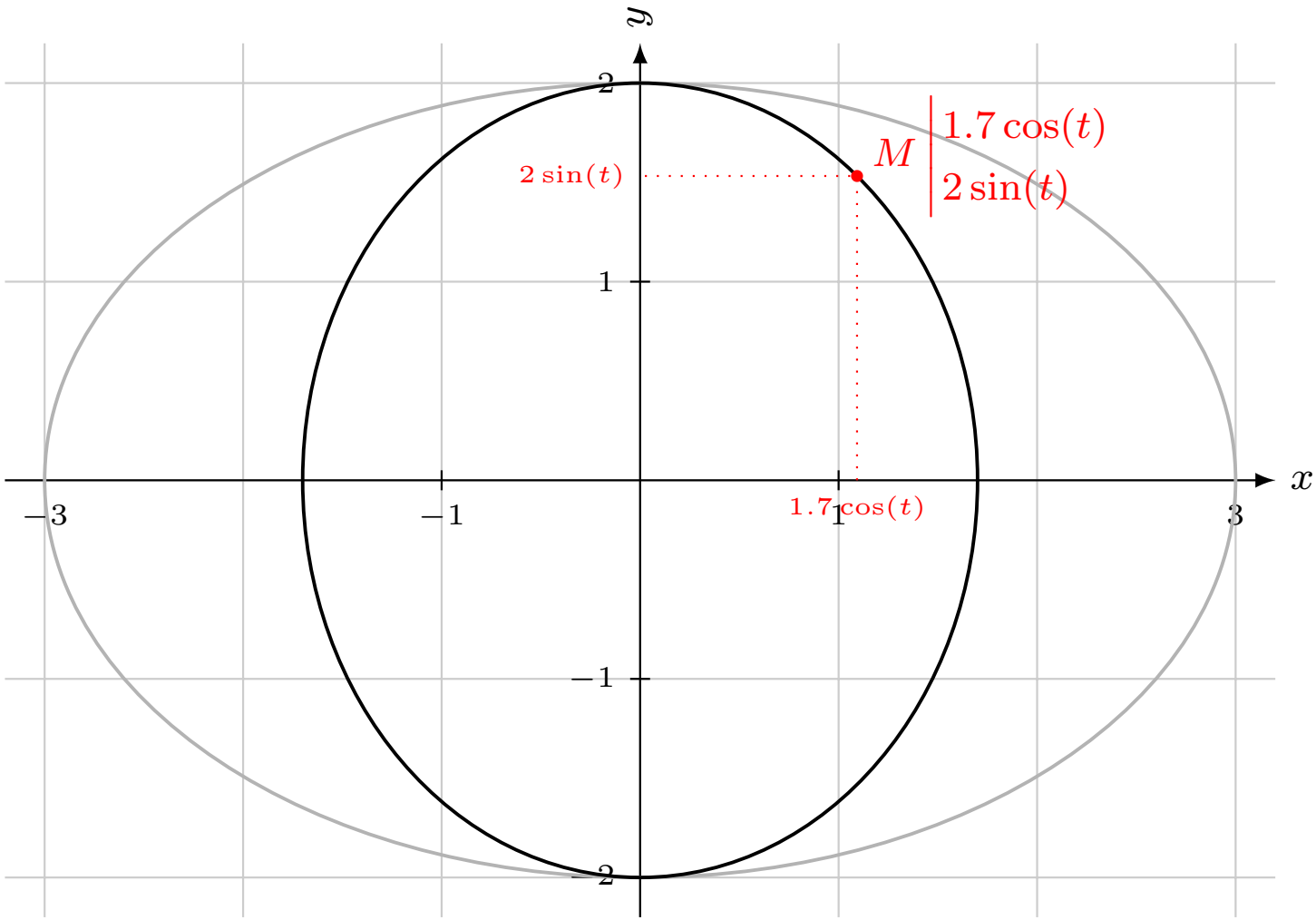
3. Représentation graphique d'une ellipse.



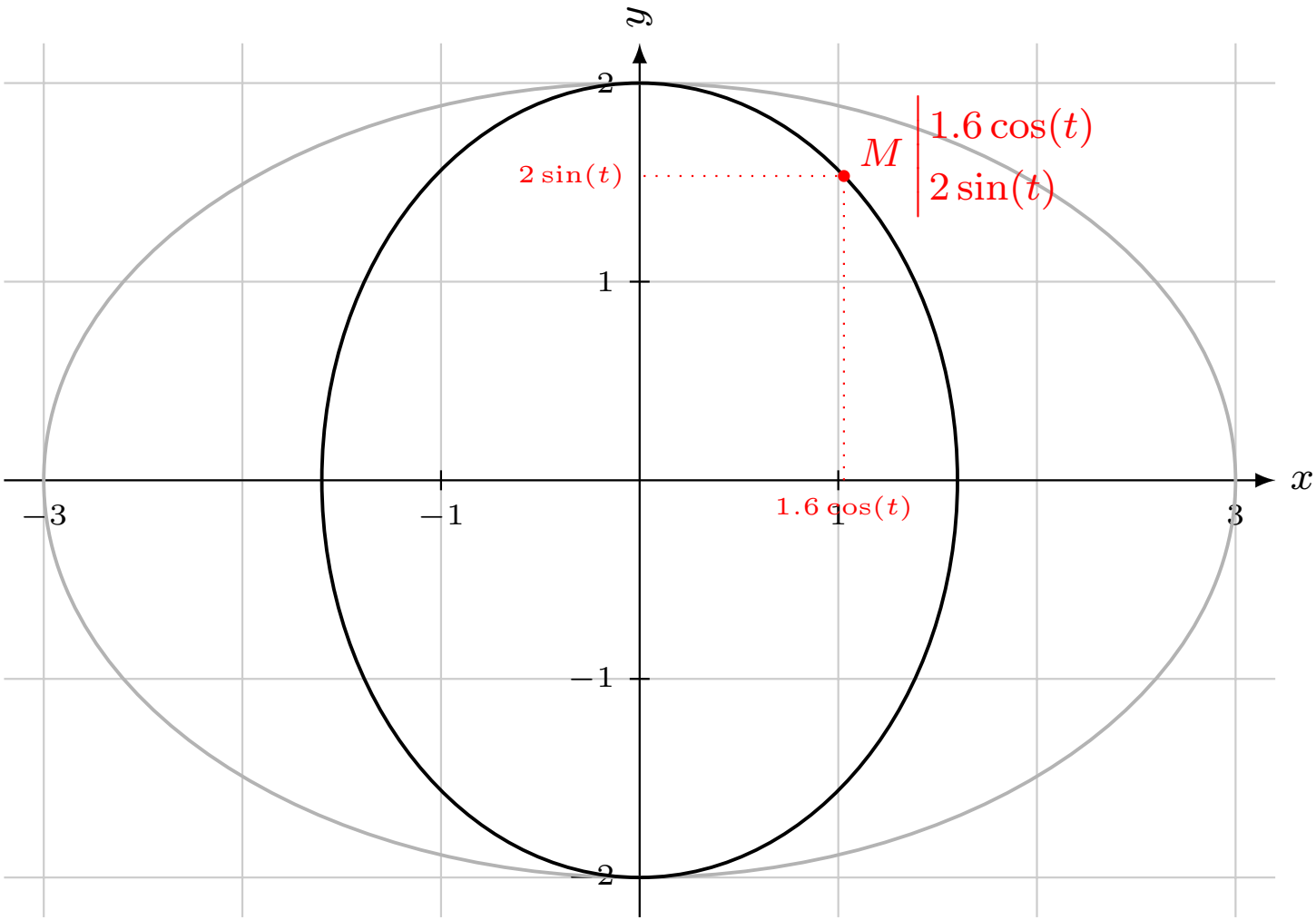
3. Représentation graphique d'une ellipse.



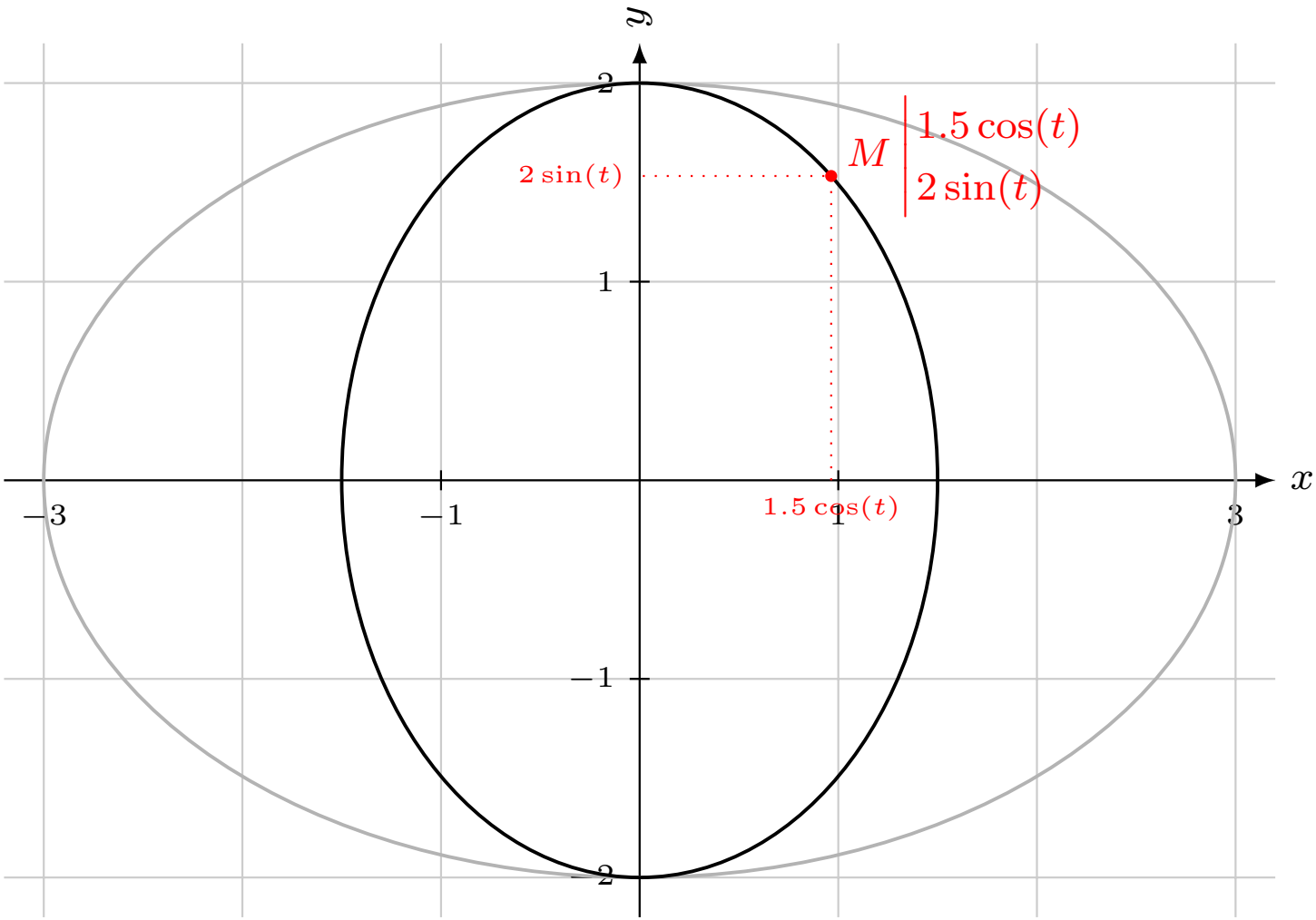
3. Représentation graphique d'une ellipse.



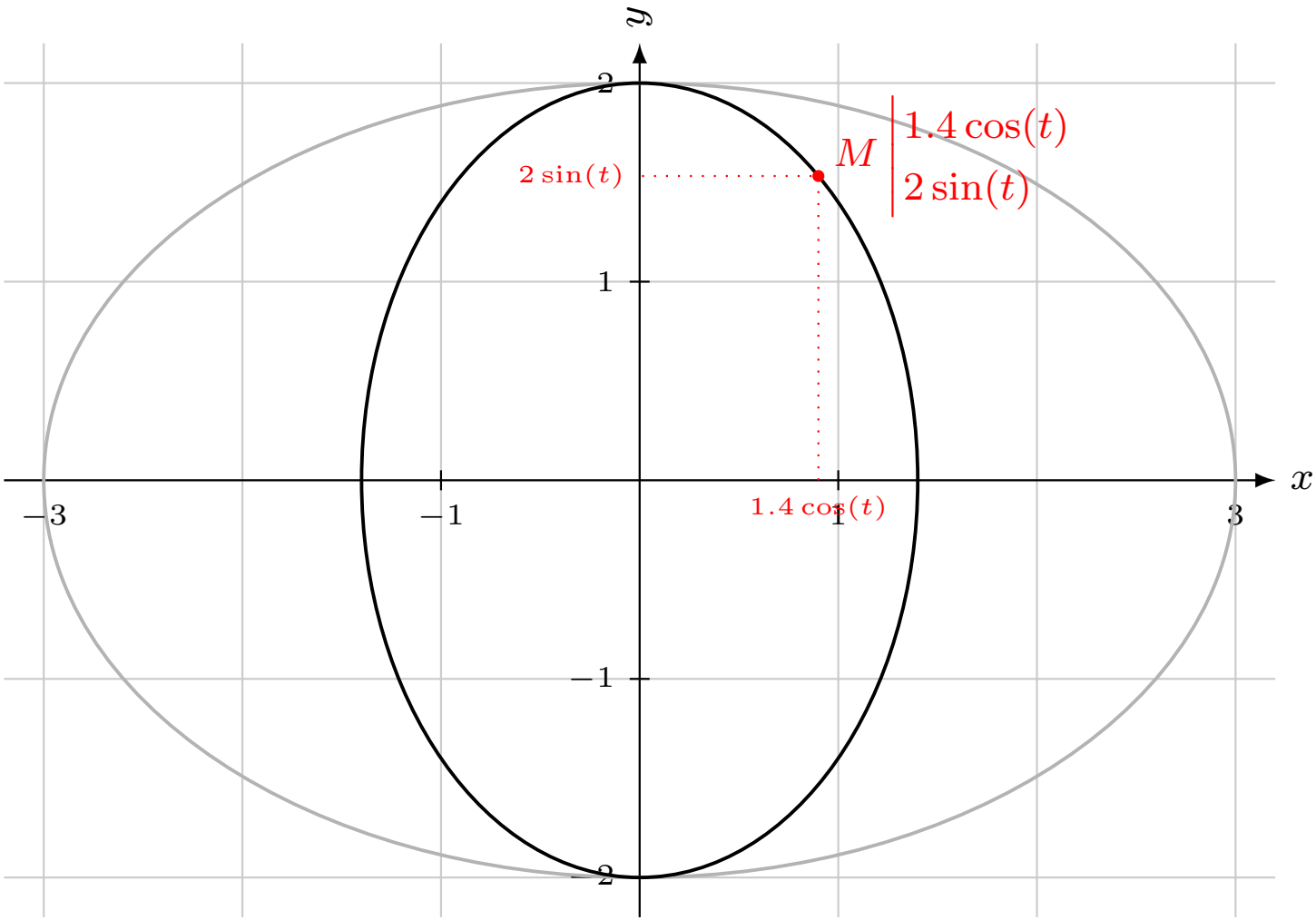
3. Représentation graphique d'une ellipse.



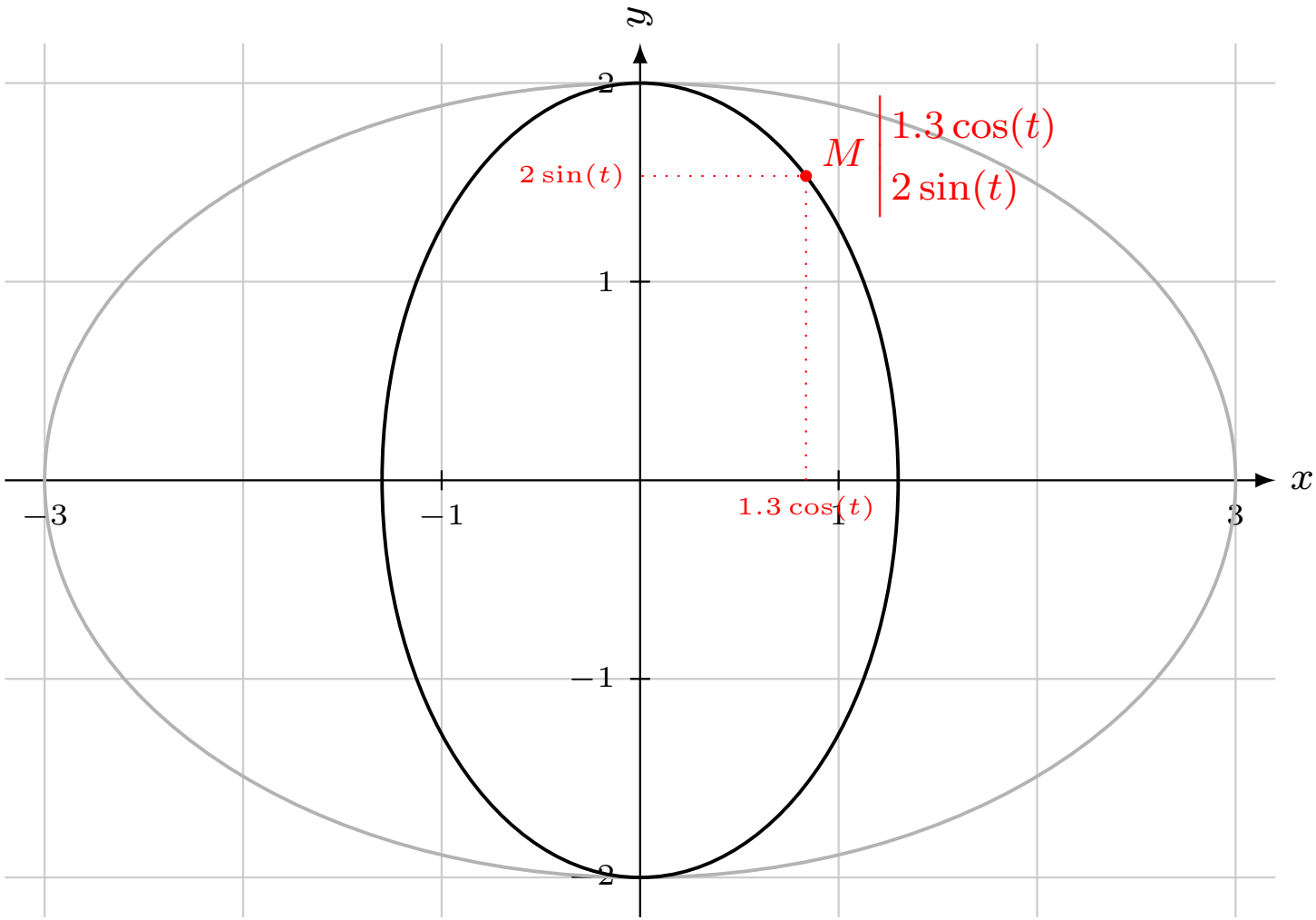
3. Représentation graphique d'une ellipse.



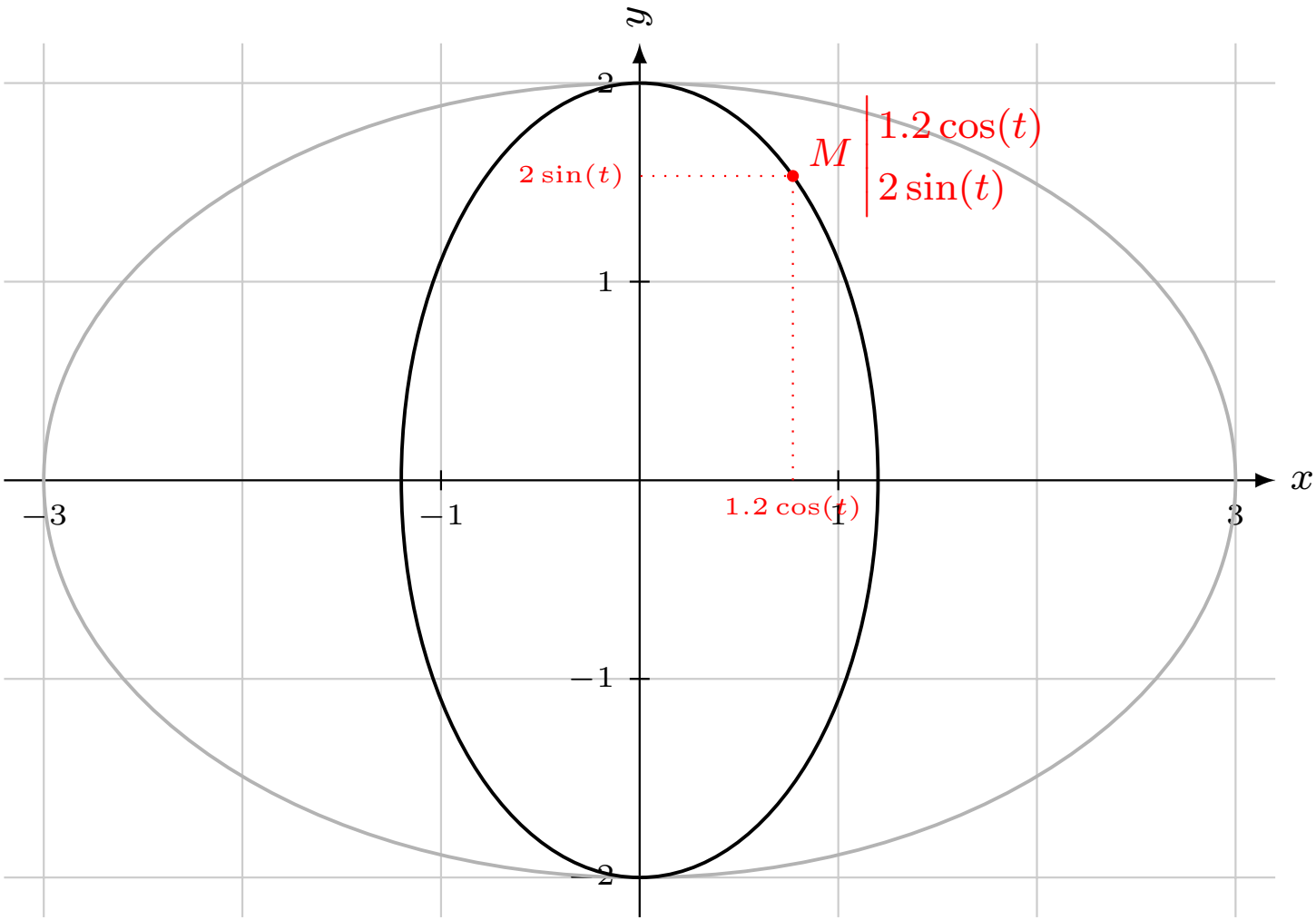
3. Représentation graphique d'une ellipse.



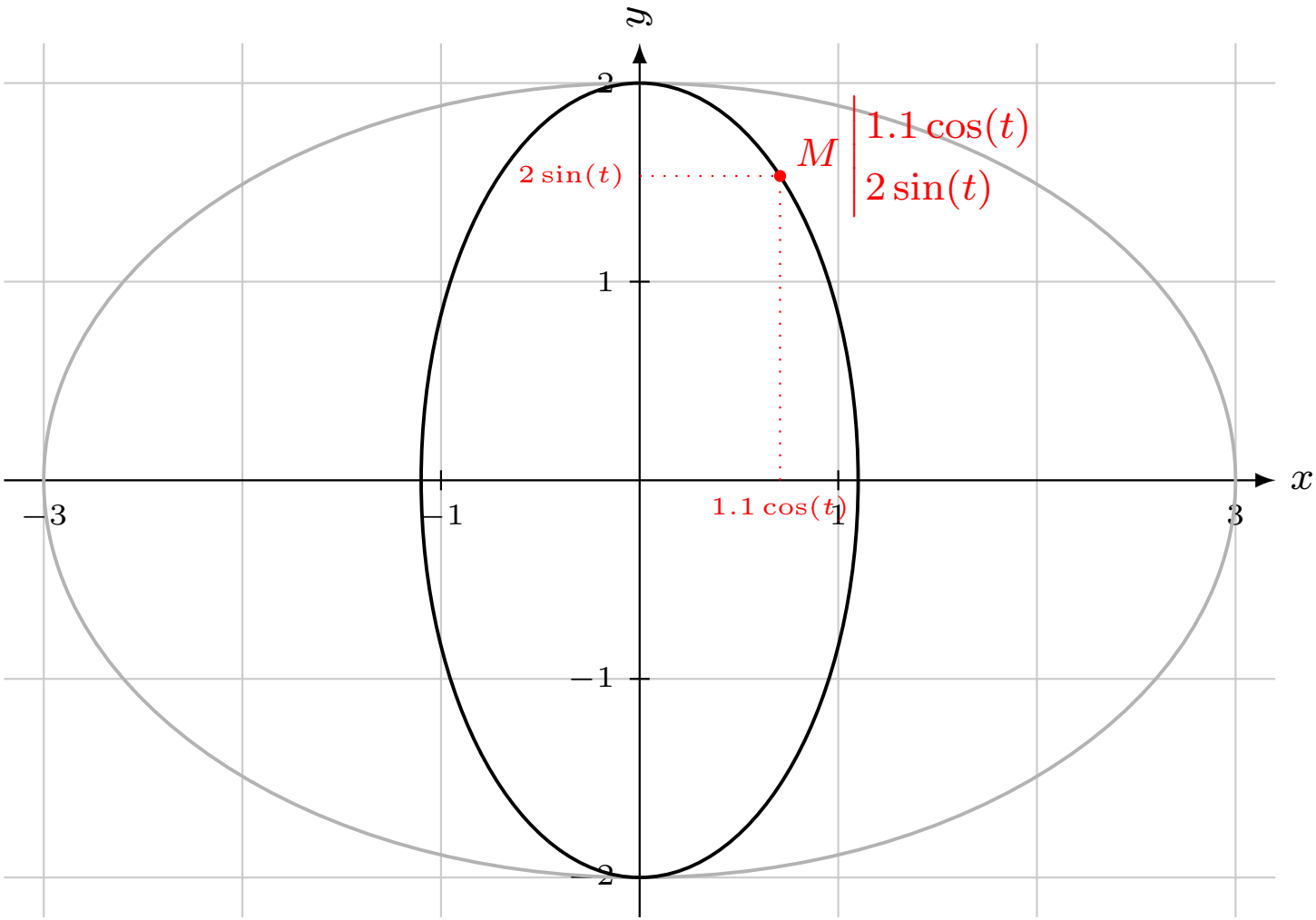
3. Représentation graphique d'une ellipse.



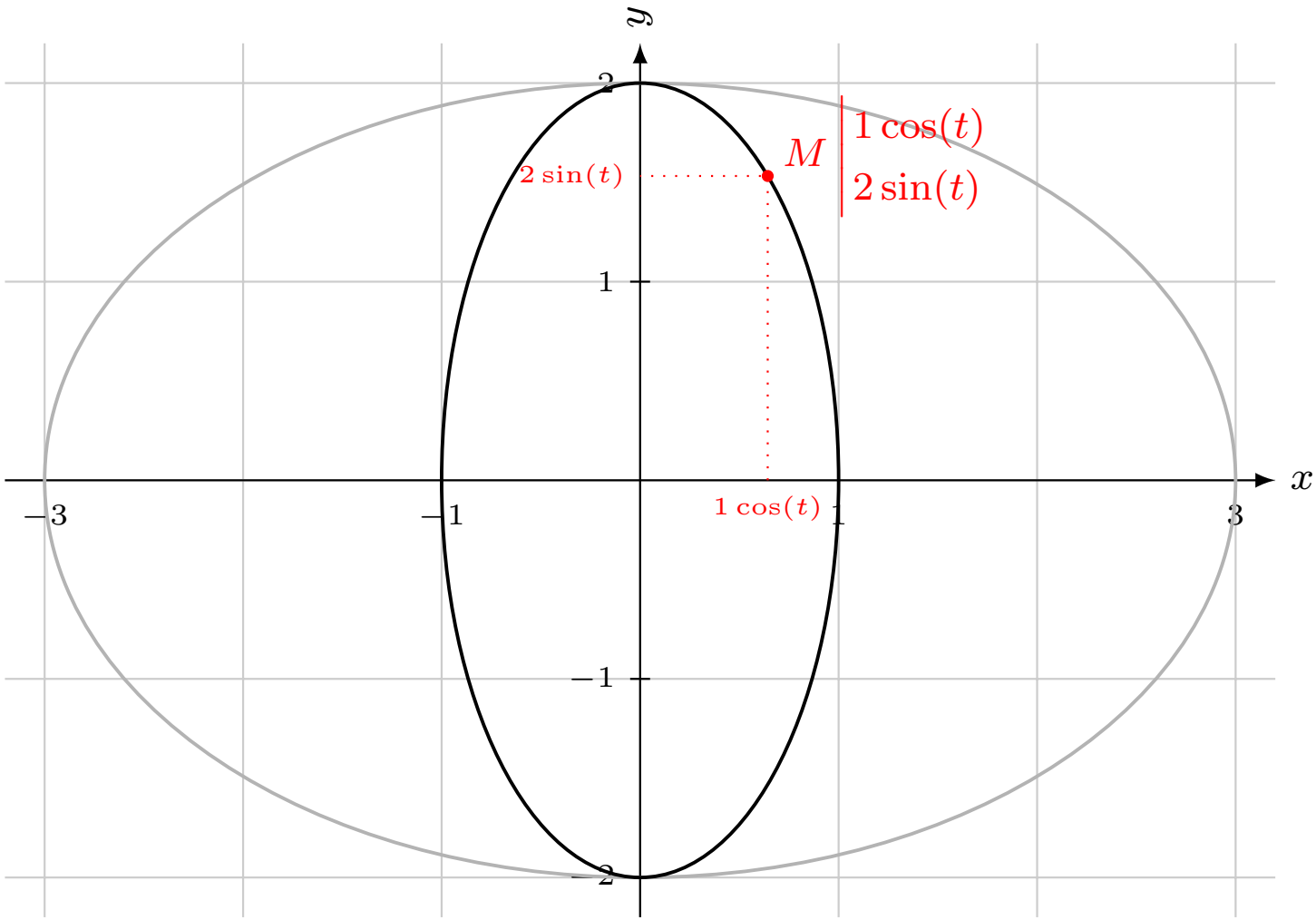
3. Représentation graphique d'une ellipse.



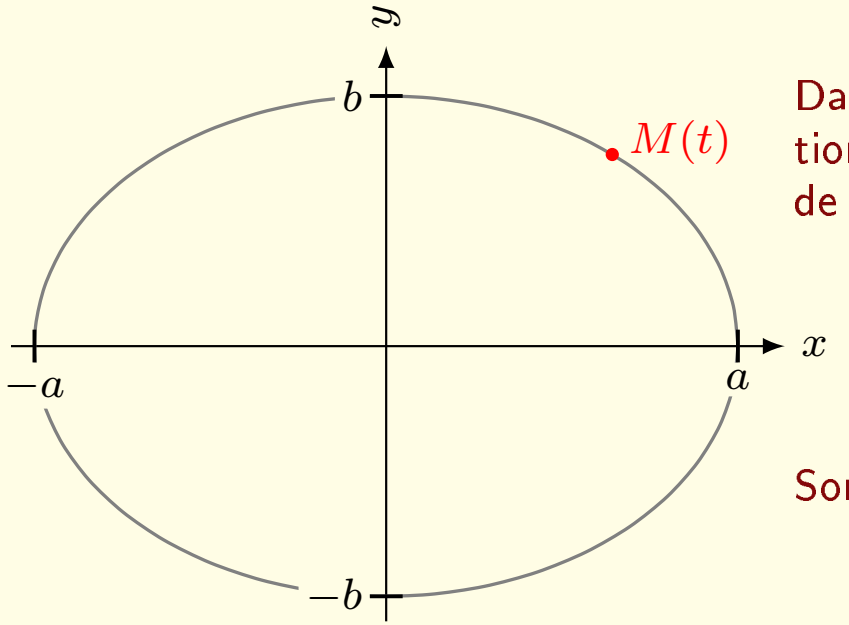
3. Représentation graphique d'une ellipse.



3. Représentation graphique d'une ellipse.



Théorème

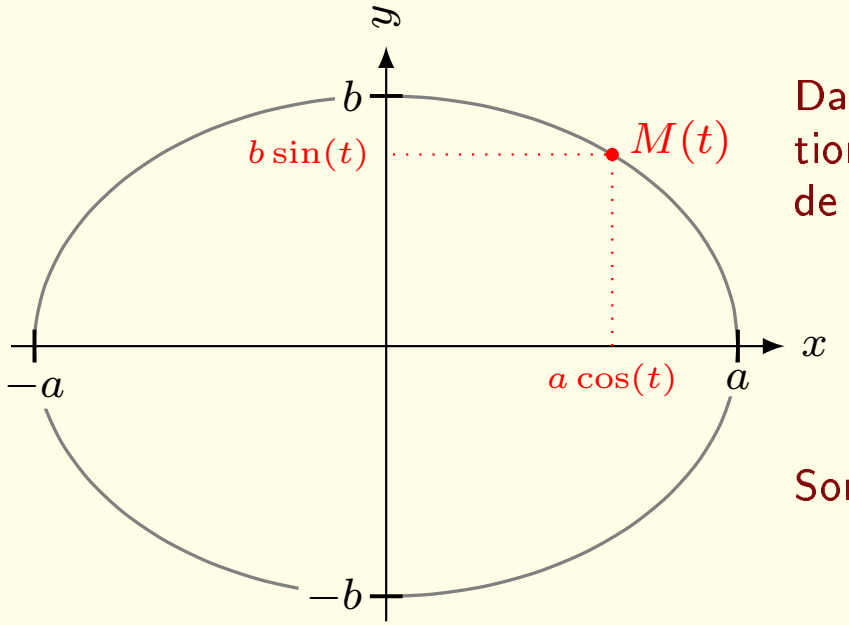


Dans une repère orthonormée, la paramétrisation cartésienne d'une ellipse centrée en $(0,0)$ de demi-grand axe $\boldsymbol{a}$ et de demi-petit axe $\boldsymbol{b}$ est

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\sin(t) \end{cases} \quad \text{où } t \in [0, 2\pi[$$

Son équation cartésienne est

Théorème

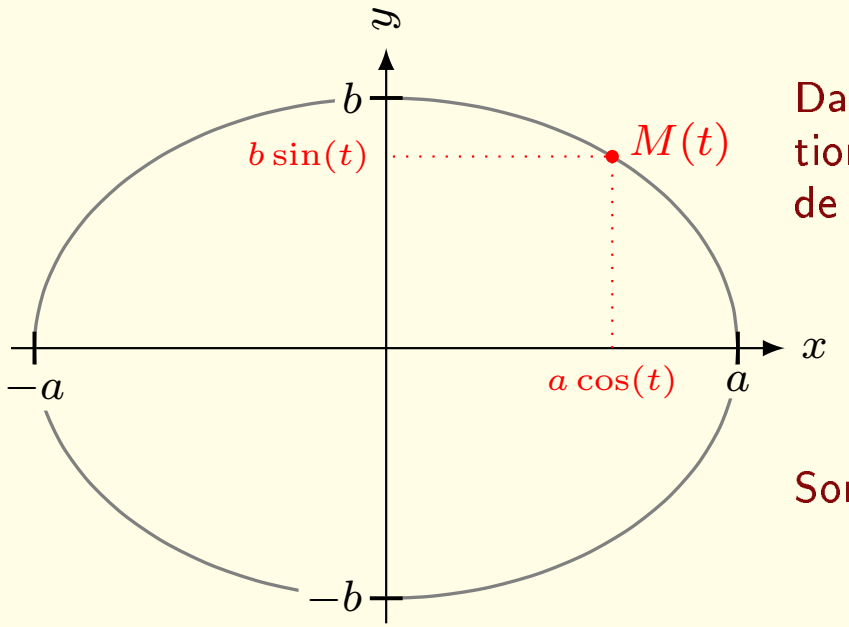


Dans une repère orthonormée, la paramétrisation cartésienne d'une ellipse centrée en $(0,0)$ de demi-grand axe $\boldsymbol{a}$ et de demi-petit axe $\boldsymbol{b}$ est

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\sin(t) \end{cases} \quad \text{où } t \in [0, 2\pi[$$

Son équation cartésienne est

Théorème



Dans une repère orthonormée, la paramétrisation cartésienne d'une ellipse centrée en $(0,0)$ de demi-grand axe $\boldsymbol{a}$ et de demi-petit axe $\boldsymbol{b}$ est

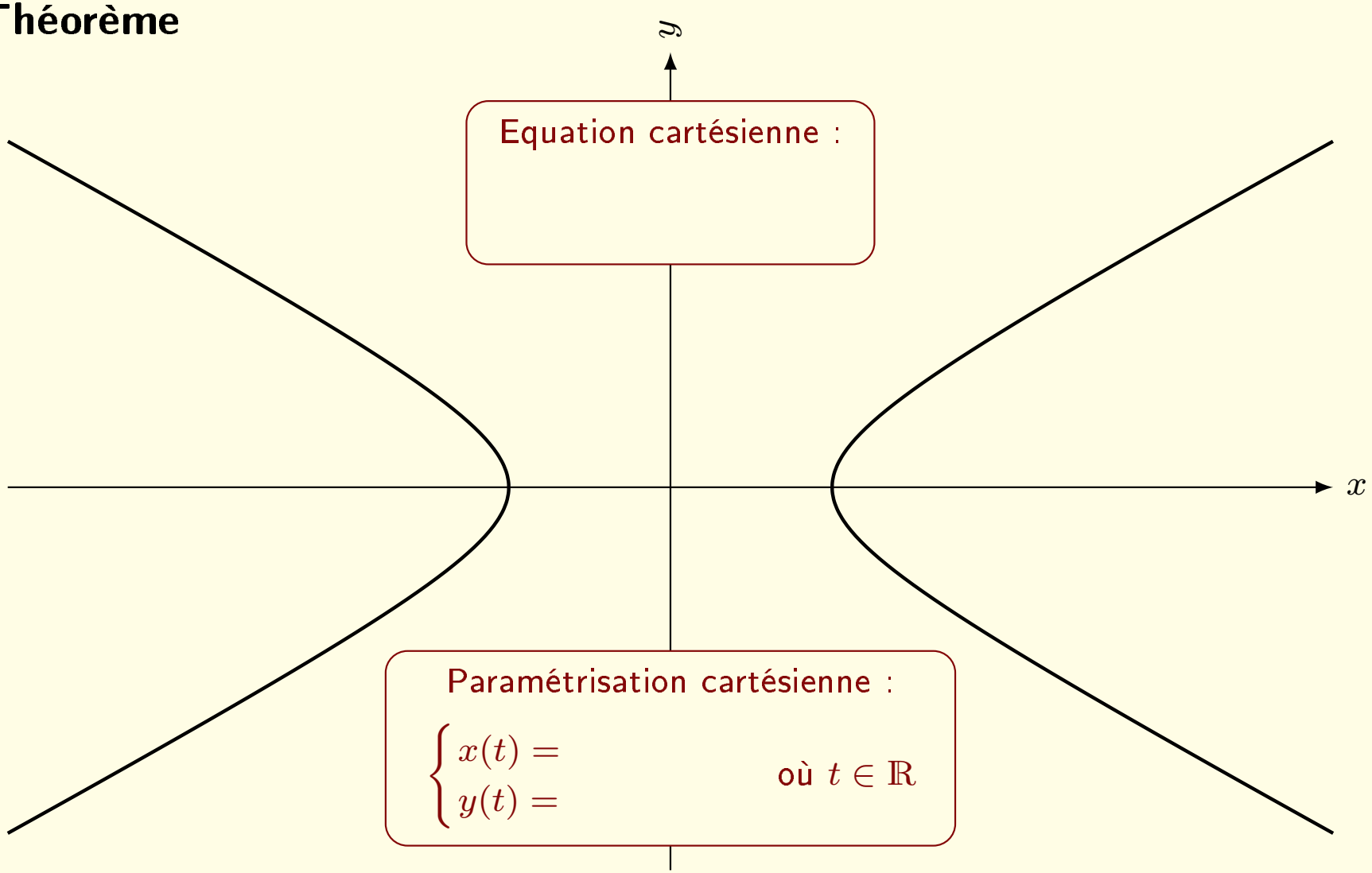
$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\sin(t) \end{cases} \quad \text{où } t \in [0, 2\pi[$$

Son équation cartésienne est $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

4. Représentation d'une hyperbole.

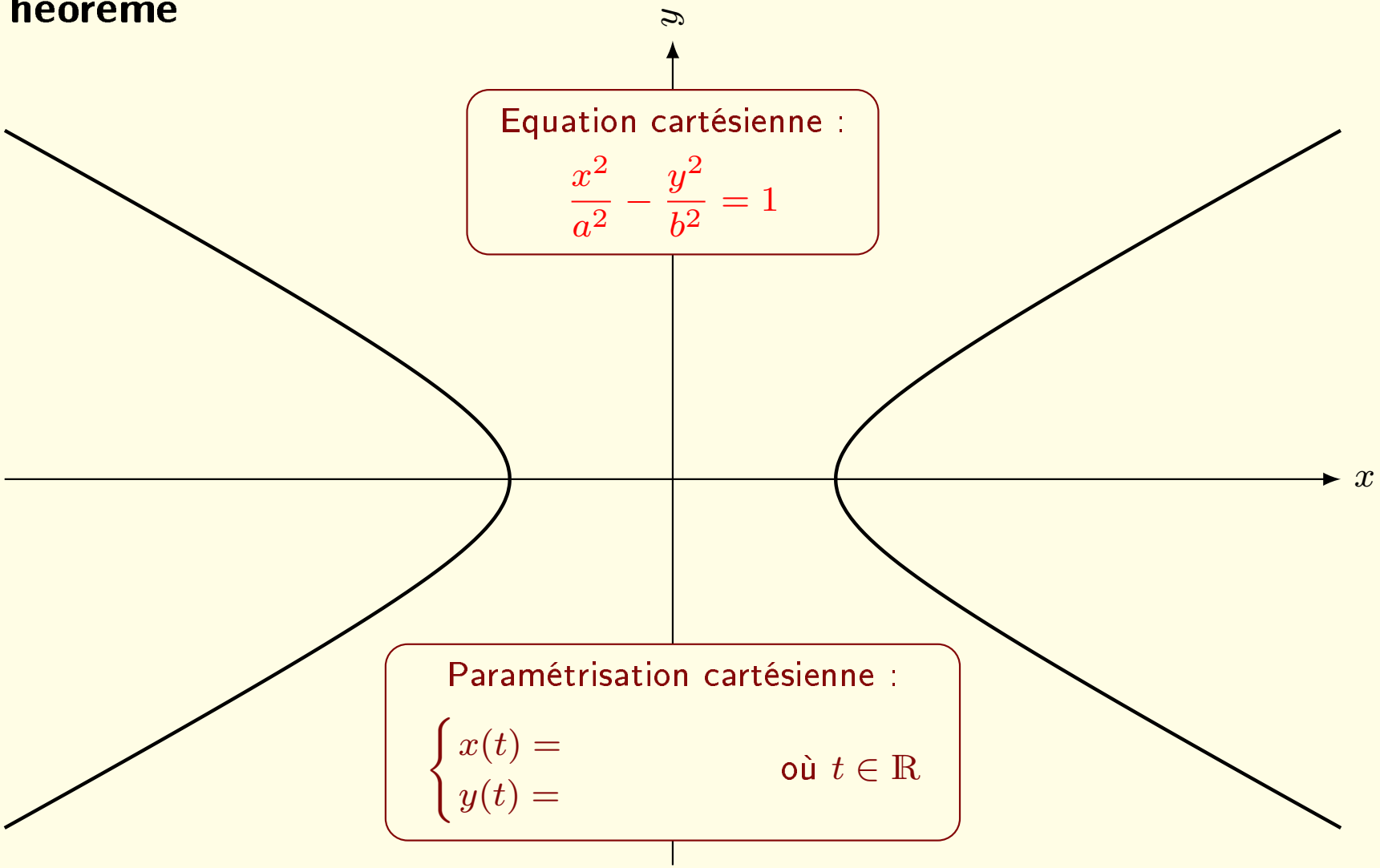
4. Représentation d'une hyperbole.

Théorème



4. Représentation d'une hyperbole.

Théorème



Equation cartésienne :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

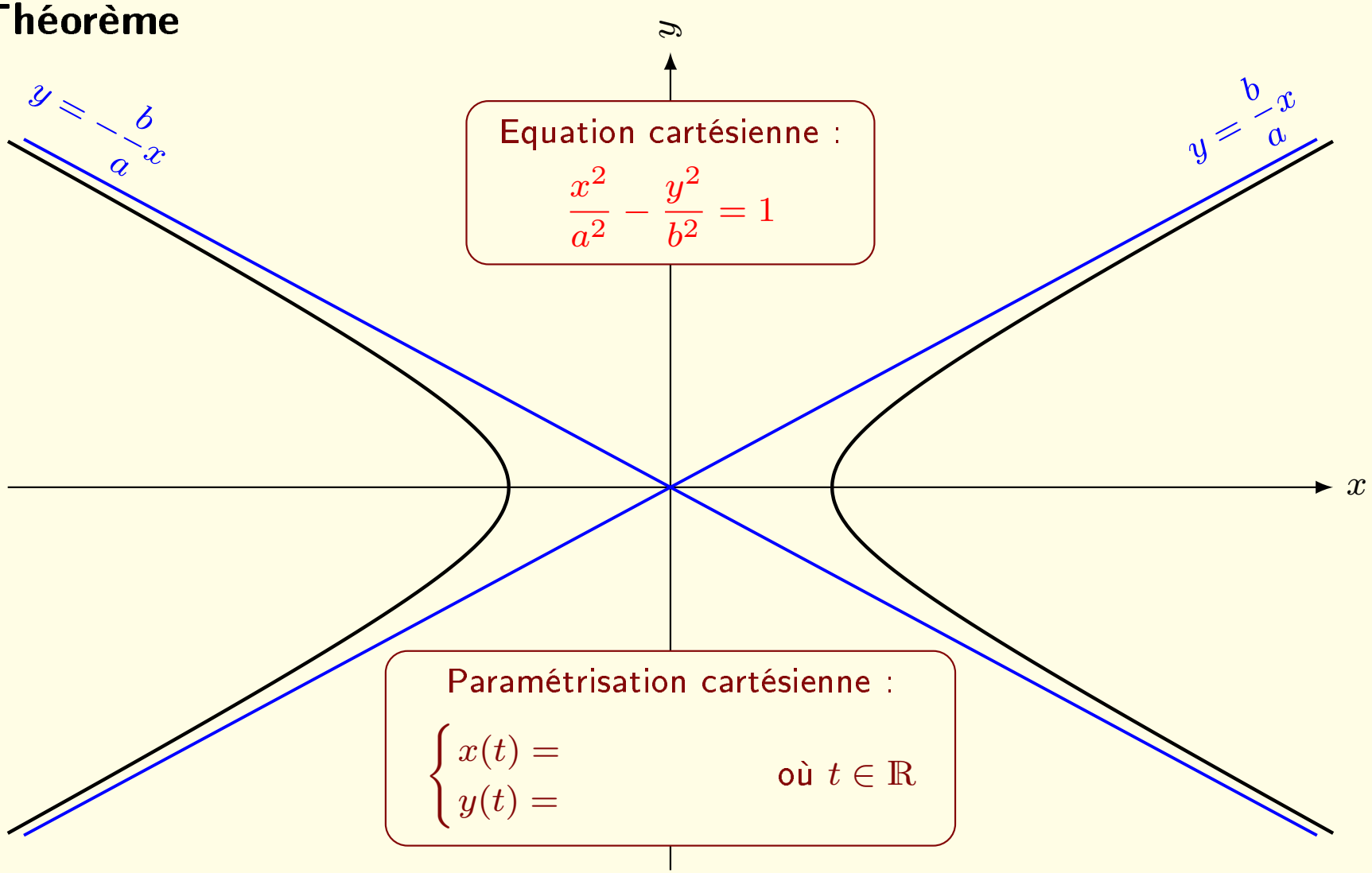
Paramétrisation cartésienne :

$$\begin{cases} x(t) = \\ y(t) = \end{cases}$$

où $t \in \mathbb{R}$

4. Représentation d'une hyperbole.

Théorème



Equation cartésienne :

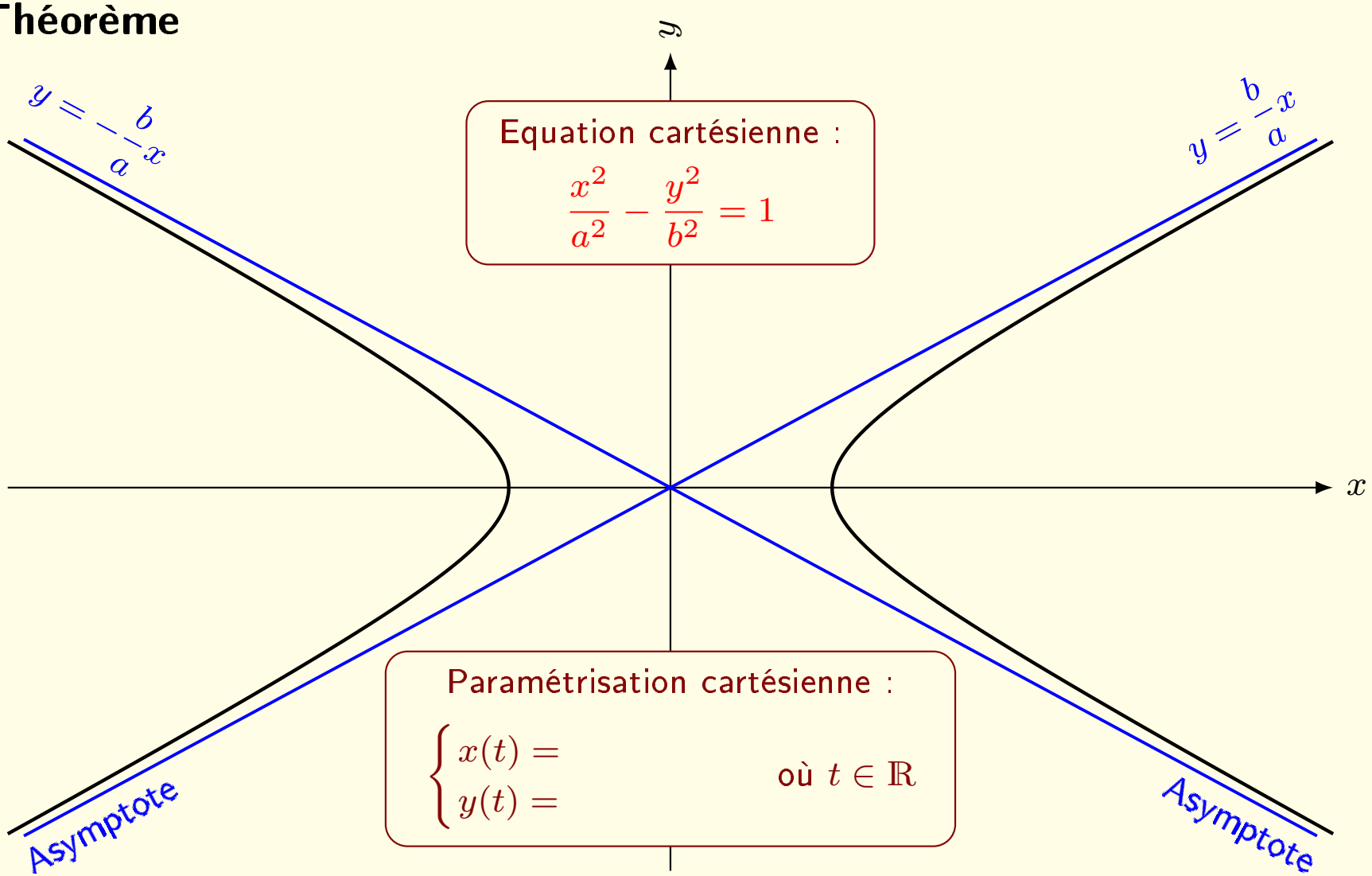
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Paramétrisation cartésienne :

$$\begin{cases} x(t) = \\ y(t) = \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

4. Représentation d'une hyperbole.

Théorème



Equation cartésienne :

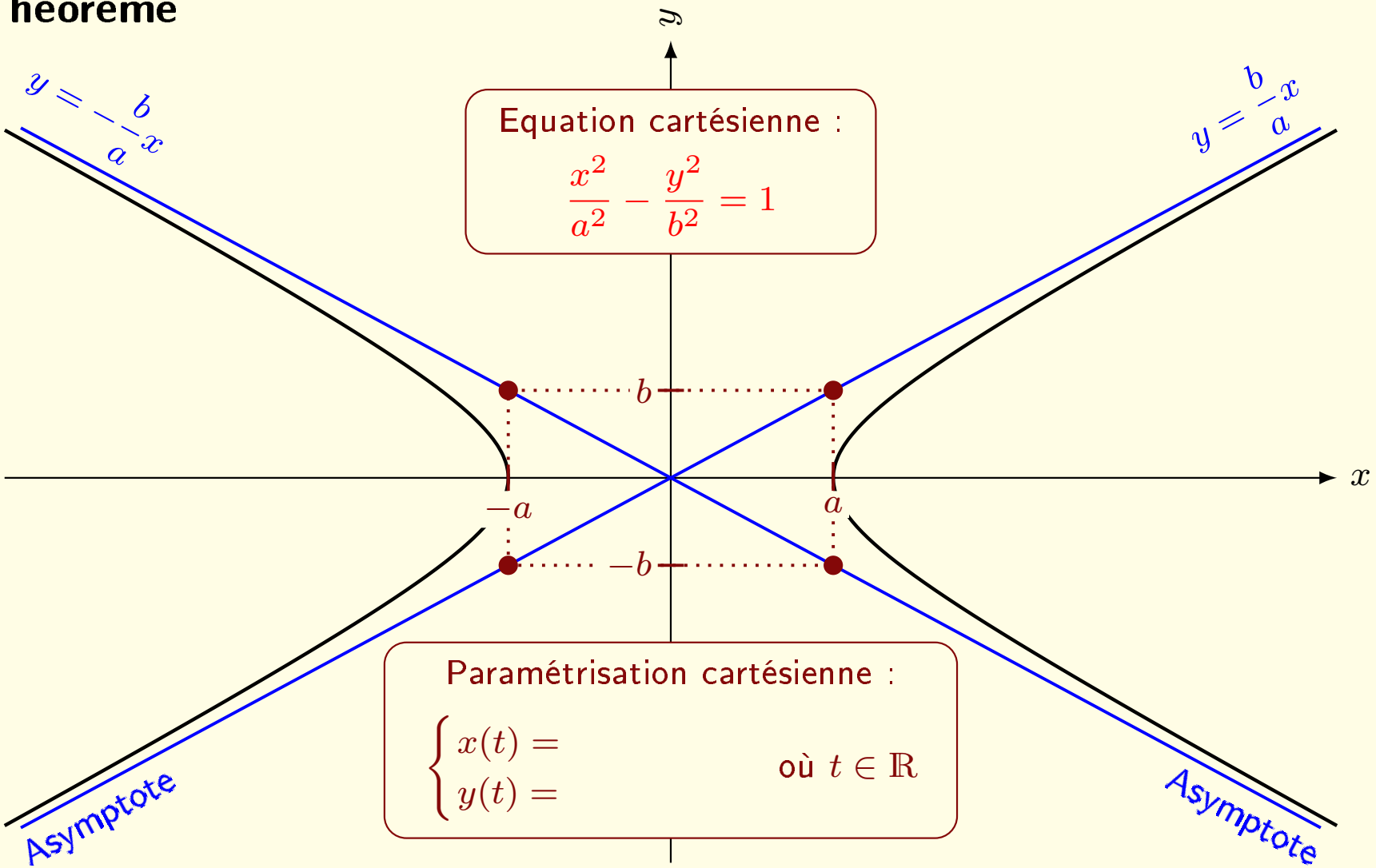
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Paramétrisation cartésienne :

$$\begin{cases} x(t) = \\ y(t) = \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

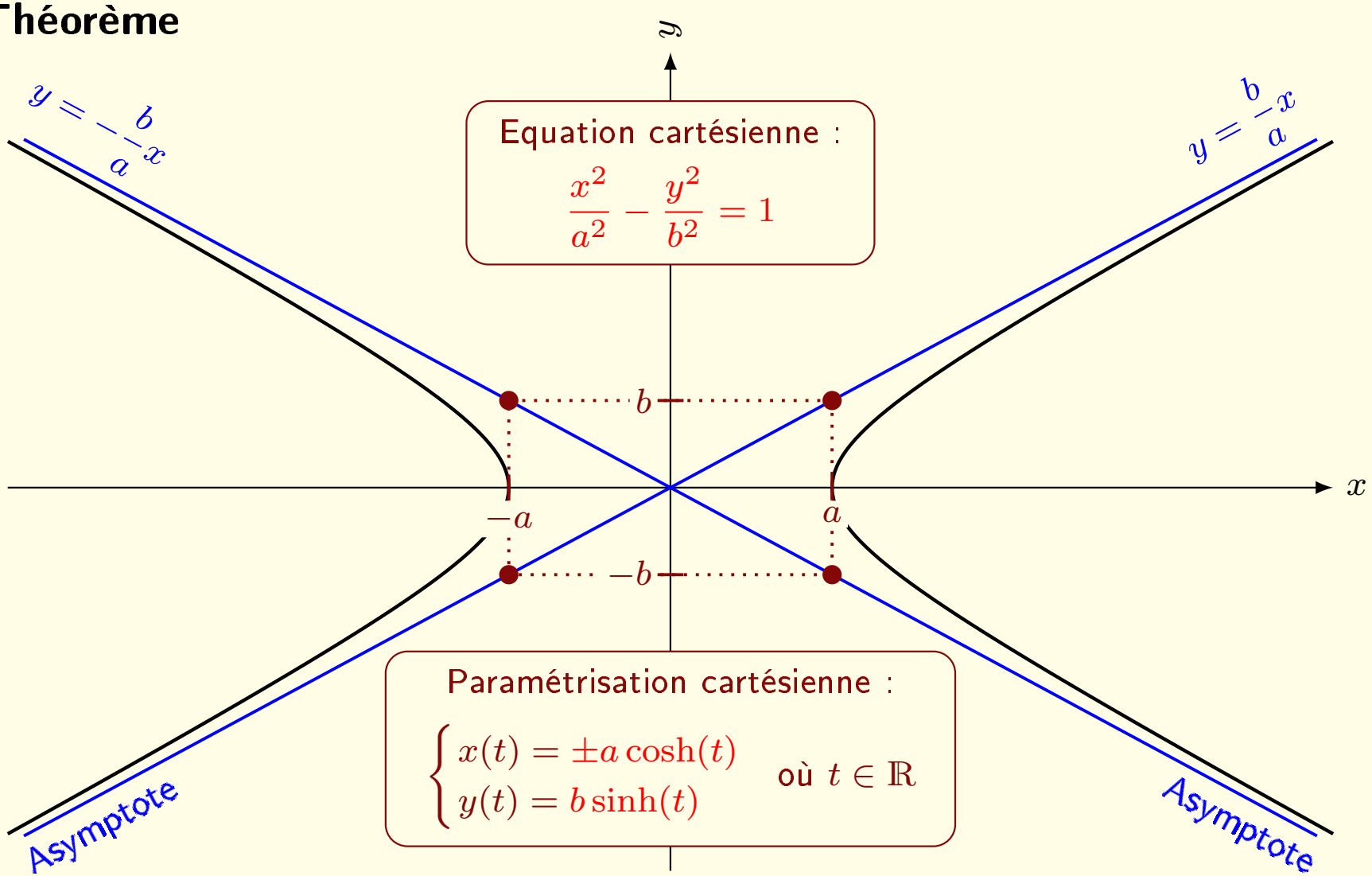
4. Représentation d'une hyperbole.

Théorème



4. Représentation d'une hyperbole.

Théorème



5. Forme quadratiques binaire : les coniques.

5. Forme quadratiques binaire : les coniques.

Une forme quadratiques binaires est une forme quadratique à **deux** variables, autrement dit, un polynôme homogène de degré 2 à **deux** variables. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, elles sont représentées par des courbes appelées **coniques.**

5. Forme quadratiques binaire : les coniques.

Une forme quadratiques binaires est une forme quadratique à **deux** variables, autrement dit, un polynôme homogène de degré 2 à **deux** variables. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, elles sont représentées par des courbes appelées **coniques.**

- Dans le plan vectoriel, une forme binaire est $Ax^2 + By^2 + Cxy$.

5. Forme quadratiques binaire : les coniques.

Une forme quadratiques binaires est une forme quadratique à **deux** variables, autrement dit, un polynôme homogène de degré 2 à **deux** variables. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, elles sont représentées par des courbes appelées **coniques.**

- Dans le plan vectoriel, une forme binaire est $Ax^2 + By^2 + Cxy$.
- Dans le plan affine, l'équation d'une conique est $\underbrace{Ax^2 + By^2 + Cxy}_{\substack{\text{partie vectorielle} \\ \textbf{(forme quadratique)}}} = \underbrace{Dx + Ey + F}_{\text{partie affine}}$

5. Forme quadratiques binaire : les coniques.

Une forme quadratiques binaires est une forme quadratique à **deux** variables, autrement dit, un polynôme homogène de degré 2 à **deux** variables. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, elles sont représentées par des courbes appelées **coniques.**

- Dans le plan vectoriel, une forme binaire est $Ax^2 + By^2 + Cxy$.
- Dans le plan affine, l'équation d'une conique est $\underbrace{Ax^2 + By^2 + Cxy}_{\substack{\text{partie vectorielle} \\ \text{(forme quadratique)}}} = \underbrace{Dx + Ey + F}_{\text{partie affine}}$

Pour chacune des coniques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

5. Forme quadratiques binaire : les coniques.

Une forme quadratiques binaires est une forme quadratique à **deux** variables, autrement dit, un polynôme homogène de degré 2 à **deux** variables. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, elles sont représentées par des courbes appelées **coniques.**

- Dans le plan vectoriel, une forme binaire est $Ax^2 + By^2 + Cxy$.
- Dans le plan affine, l'équation d'une conique est $\underbrace{Ax^2 + By^2 + Cxy}_{\text{partie vectorielle (forme quadratique)}} = \underbrace{Dx + Ey + F}_{\text{partie affine}}$

Pour chacune des coniques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$		
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$		
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$		

5. Forme quadratiques binaire : les coniques.

Une forme quadratiques binaires est une forme quadratique à **deux** variables, autrement dit, un polynôme homogène de degré 2 à **deux** variables. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, elles sont représentées par des courbes appelées **coniques.**

- Dans le plan vectoriel, une forme binaire est $Ax^2 + By^2 + Cxy$.
- Dans le plan affine, l'équation d'une conique est $\underbrace{Ax^2 + By^2 + Cxy}_{\substack{\text{partie vectorielle} \\ \text{(forme quadratique)}}} = \underbrace{Dx + Ey + F}_{\text{partie affine}}$

Pour chacune des coniques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(2, 0)$	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$		
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$		

5. Forme quadratiques binaire : les coniques.

Une forme quadratiques binaires est une forme quadratique à **deux** variables, autrement dit, un polynôme homogène de degré 2 à **deux** variables. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, elles sont représentées par des courbes appelées **coniques.**

- Dans le plan vectoriel, une forme binaire est $Ax^2 + By^2 + Cxy$.
- Dans le plan affine, l'équation d'une conique est $\underbrace{Ax^2 + By^2 + Cxy}_{\substack{\text{partie vectorielle} \\ \text{(forme quadratique)}}} = \underbrace{Dx + Ey + F}_{\text{partie affine}}$

Pour chacune des coniques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(2, 0)$	Ellipse
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$		
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$		

5. Forme quadratiques binaire : les coniques.

Une forme quadratiques binaires est une forme quadratique à **deux** variables, autrement dit, un polynôme homogène de degré 2 à **deux** variables. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, elles sont représentées par des courbes appelées **coniques.**

- Dans le plan vectoriel, une forme binaire est $Ax^2 + By^2 + Cxy$.
- Dans le plan affine, l'équation d'une conique est $\underbrace{Ax^2 + By^2 + Cxy}_{\substack{\text{partie vectorielle} \\ \text{(forme quadratique)}}} = \underbrace{Dx + Ey + F}_{\text{partie affine}}$

Pour chacune des coniques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(2, 0)$	Ellipse
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	$(2, 0)$	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$		

5. Forme quadratiques binaire : les coniques.

Une forme quadratiques binaires est une forme quadratique à **deux** variables, autrement dit, un polynôme homogène de degré 2 à **deux** variables. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, elles sont représentées par des courbes appelées **coniques.**

- Dans le plan vectoriel, une forme binaire est $Ax^2 + By^2 + Cxy$.
- Dans le plan affine, l'équation d'une conique est $\underbrace{Ax^2 + By^2 + Cxy}_{\substack{\text{partie vectorielle} \\ \text{(forme quadratique)}}} = \underbrace{Dx + Ey + F}_{\text{partie affine}}$

Pour chacune des coniques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(2,0)$	Ellipse
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	$(2,0)$	vide
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$		

5. Forme quadratiques binaire : les coniques.

Une forme quadratiques binaires est une forme quadratique à **deux** variables, autrement dit, un polynôme homogène de degré 2 à **deux** variables. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, elles sont représentées par des courbes appelées **coniques.**

- Dans le plan vectoriel, une forme binaire est $Ax^2 + By^2 + Cxy$.
- Dans le plan affine, l'équation d'une conique est $\underbrace{Ax^2 + By^2 + Cxy}_{\text{partie vectorielle (forme quadratique)}} = \underbrace{Dx + Ey + F}_{\text{partie affine}}$

Pour chacune des coniques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(2,0)$	Ellipse
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	$(2,0)$	vide
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	$(2,0)$	

5. Forme quadratiques binaire : les coniques.

Une forme quadratiques binaires est une forme quadratique à **deux** variables, autrement dit, un polynôme homogène de degré 2 à **deux** variables. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, elles sont représentées par des courbes appelées **coniques.**

- Dans le plan vectoriel, une forme binaire est $Ax^2 + By^2 + Cxy$.
- Dans le plan affine, l'équation d'une conique est $\underbrace{Ax^2 + By^2 + Cxy}_{\substack{\text{partie vectorielle} \\ \text{(forme quadratique)}}} = \underbrace{Dx + Ey + F}_{\text{partie affine}}$

Pour chacune des coniques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(2,0)$	Ellipse
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	$(2,0)$	vide
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	$(2,0)$	le point $(0,0)$

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$		
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$		
$x^2 - y = 0$		
$x^2 + 1 = 0$		
$x^2 - 1 = 0$		
$x^2 = 0$		

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(1,1)$	
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$		
$x^2 - y = 0$		
$x^2 + 1 = 0$		
$x^2 - 1 = 0$		
$x^2 = 0$		

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(1,1)$	Hyperbole
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$		
$x^2 - y = 0$		
$x^2 + 1 = 0$		
$x^2 - 1 = 0$		
$x^2 = 0$		

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(1,1)$	Hyperbole
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$(1,1)$	
$x^2 - y = 0$		
$x^2 + 1 = 0$		
$x^2 - 1 = 0$		
$x^2 = 0$		

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(1,1)$	Hyperbole
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$(1,1)$	Deux droites sécantes
$x^2 - y = 0$		
$x^2 + 1 = 0$		
$x^2 - 1 = 0$		
$x^2 = 0$		

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(1,1)$	Hyperbole
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$(1,1)$	Deux droites sécantes
$x^2 - y = 0$	$(1,0)$	
$x^2 + 1 = 0$		
$x^2 - 1 = 0$		
$x^2 = 0$		

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(1,1)$	Hyperbole
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$(1,1)$	Deux droites sécantes
$x^2 - y = 0$	$(1,0)$	Parabole
$x^2 + 1 = 0$		
$x^2 - 1 = 0$		
$x^2 = 0$		

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(1,1)$	Hyperbole
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$(1,1)$	Deux droites sécantes
$x^2 - y = 0$	$(1,0)$	Parabole
$x^2 + 1 = 0$	$(1,0)$	
$x^2 - 1 = 0$		
$x^2 = 0$		

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(1,1)$	Hyperbole
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$(1,1)$	Deux droites sécantes
$x^2 - y = 0$	$(1,0)$	Parabole
$x^2 + 1 = 0$	$(1,0)$	Vide
$x^2 - 1 = 0$		
$x^2 = 0$		

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(1,1)$	Hyperbole
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$(1,1)$	Deux droites sécantes
$x^2 - y = 0$	$(1,0)$	Parabole
$x^2 + 1 = 0$	$(1,0)$	Vide
$x^2 - 1 = 0$	$(1,0)$	
$x^2 = 0$		

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(1,1)$	Hyperbole
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$(1,1)$	Deux droites sécantes
$x^2 - y = 0$	$(1,0)$	Parabole
$x^2 + 1 = 0$	$(1,0)$	Vide
$x^2 - 1 = 0$	$(1,0)$	Deux droites parallèles
$x^2 = 0$		

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(1,1)$	Hyperbole
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$(1,1)$	Deux droites sécantes
$x^2 - y = 0$	$(1,0)$	Parabole
$x^2 + 1 = 0$	$(1,0)$	Vide
$x^2 - 1 = 0$	$(1,0)$	Deux droites parallèles
$x^2 = 0$	$(1,0)$	

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la conique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$(1,1)$	Hyperbole
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$(1,1)$	Deux droites sécantes
$x^2 - y = 0$	$(1,0)$	Parabole
$x^2 + 1 = 0$	$(1,0)$	Vide
$x^2 - 1 = 0$	$(1,0)$	Deux droites parallèles
$x^2 = 0$	$(1,0)$	Une droite

6. Forme quadratiques ternaires : les quadriques.

6. Forme quadratiques ternaires : les quadriques.

Une forme quadratiques ternaire est une forme quadratique à **trois** variables, autrement dit, un polynôme homogène de degré 2 à **trois** variables. Dans le plan affine $\mathbb{R}^3$, elles sont représentées par des surfaces appelées **quadriques.**

6. Forme quadratiques ternaires : les quadriques.

Une forme quadratiques ternaire est une forme quadratique à **trois** variables, autrement dit, un polynôme homogène de degré 2 à **trois** variables. Dans le plan affine $\mathbb{R}^3$, elles sont représentées par des surfaces appelées **quadriques.**

- Dans l'espace vectoriel, une forme binaire est $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fxy$.

6. Forme quadratiques ternaires : les quadriques.

Une forme quadratiques ternaire est une forme quadratique à **trois** variables, autrement dit, un polynôme homogène de degré 2 à **trois** variables. Dans le plan affine $\mathbb{R}^3$, elles sont représentées par des surfaces appelées **quadriques.**

- Dans l'espace vectoriel, une forme binaire est $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fxy$.
- Dans l'espace affine, l'équation d'une quadrique est

$$\underbrace{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fxy}_{\text{partie vectorielle (forme quadratique)}} = \underbrace{Gx + Hy + Iz + J}_{\text{partie affine}}$$

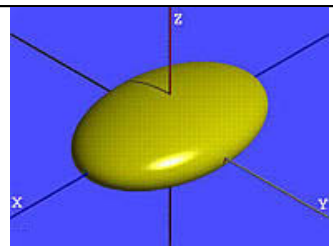
6. Forme quadratiques ternaires : les quadriques.

Une forme quadratiques ternaire est une forme quadratique à **trois** variables, autrement dit, un polynôme homogène de degré 2 à **trois** variables. Dans le plan affine $\mathbb{R}^3$, elles sont représentées par des surfaces appelées **quadriques.**

- Dans l'espace vectoriel, une forme binaire est $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fxy$.
- Dans l'espace affine, l'équation d'une quadrique est

$$\underbrace{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fxy}_{\text{partie vectorielle (forme quadratique)}} = \underbrace{Gx + Hy + Iz + J}_{\text{partie affine}}$$

Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$			

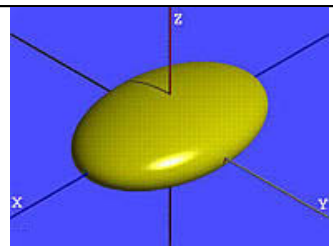
6. Forme quadratiques ternaires : les quadriques.

Une forme quadratiques ternaire est une forme quadratique à **trois** variables, autrement dit, un polynôme homogène de degré 2 à **trois** variables. Dans le plan affine $\mathbb{R}^3$, elles sont représentées par des surfaces appelées **quadriques.**

- Dans l'espace vectoriel, une forme binaire est $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fxy$.
- Dans l'espace affine, l'équation d'une quadrique est

$$\underbrace{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fxy}_{\text{partie vectorielle (forme quadratique)}} = \underbrace{Gx + Hy + Iz + J}_{\text{partie affine}}$$

Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$(3, 0)$		

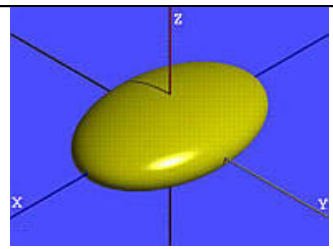
6. Forme quadratiques ternaires : les quadriques.

Une forme quadratiques ternaire est une forme quadratique à **trois** variables, autrement dit, un polynôme homogène de degré 2 à **trois** variables. Dans le plan affine $\mathbb{R}^3$, elles sont représentées par des surfaces appelées **quadriques.**

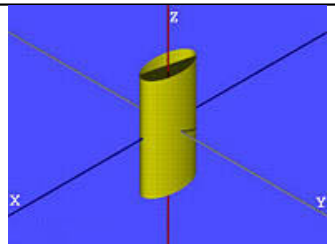
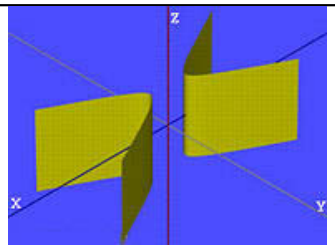
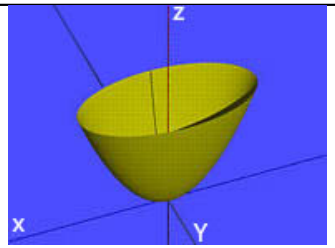
- Dans l'espace vectoriel, une forme binaire est $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fxy$.
- Dans l'espace affine, l'équation d'une quadrique est

$$\underbrace{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fxy}_{\text{partie vectorielle (forme quadratique)}} = \underbrace{Gx + Hy + Iz + J}_{\text{partie affine}}$$

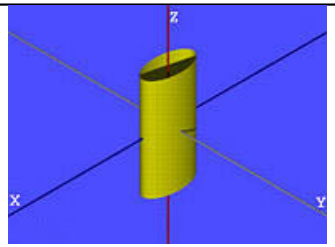
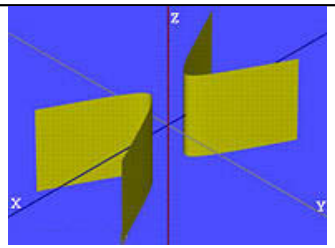
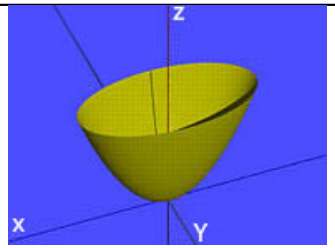
Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$(3, 0)$	Ellipsoïde	

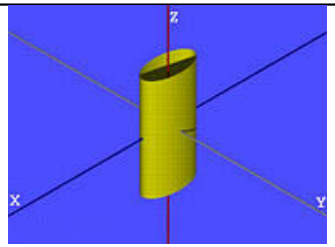
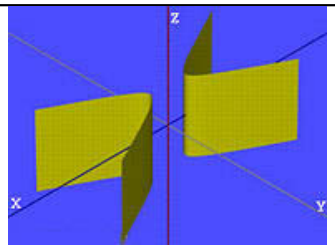
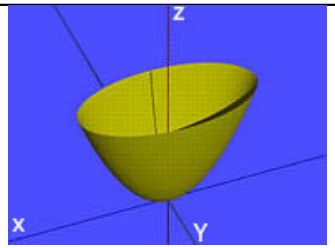
Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$			
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$			
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$			

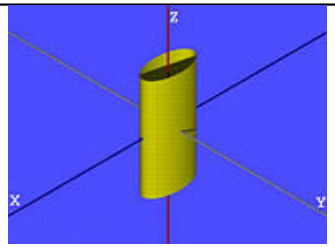
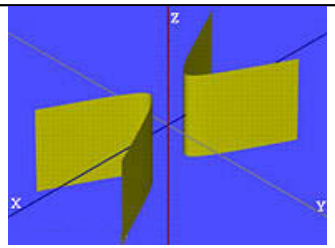
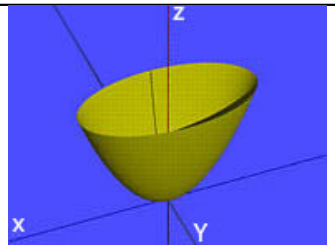
Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$(2,0)$		
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$			
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$			

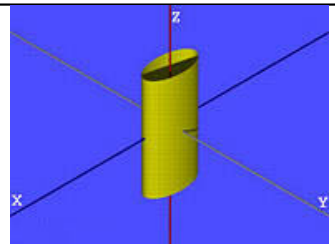
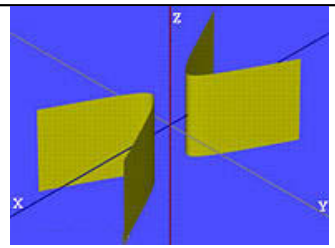
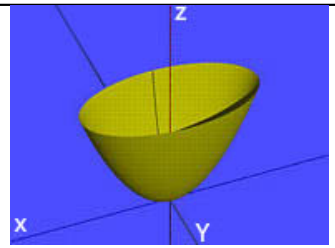
Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$(2,0)$	cylindre elliptique	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$			
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$			

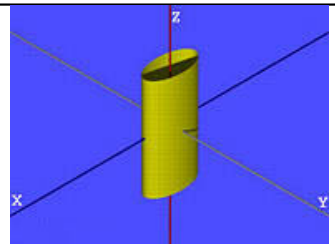
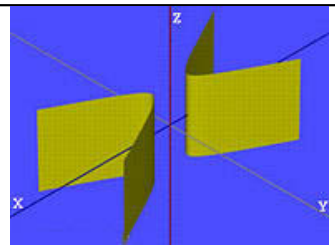
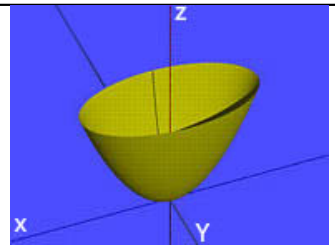
Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$(2,0)$	cylindre elliptique	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$(2,0)$		
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$			

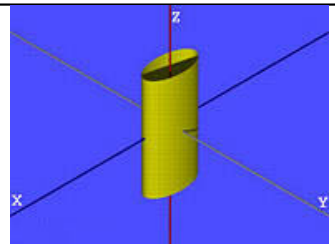
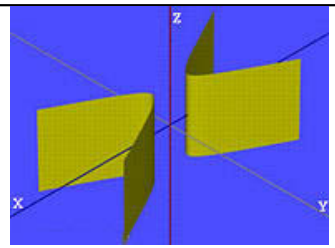
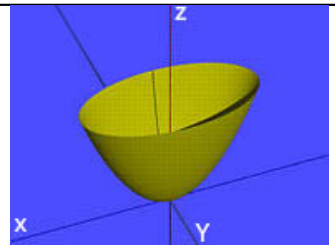
Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$(2,0)$	cylindre elliptique	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$(2,0)$	cylindre hyperbolique	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$			

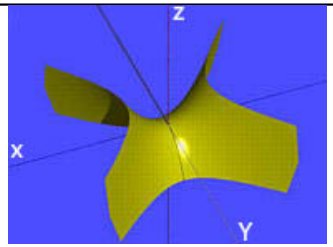
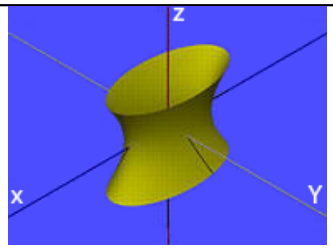
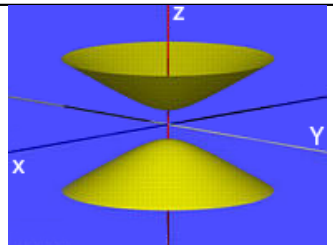
Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$(2,0)$	cylindre elliptique	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$(2,0)$	cylindre hyperbolique	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$	$(2,0)$		

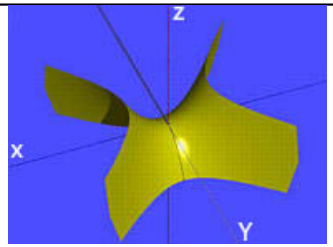
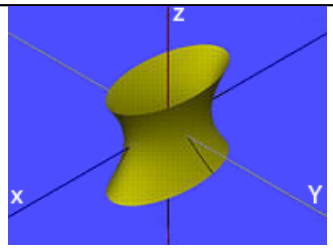
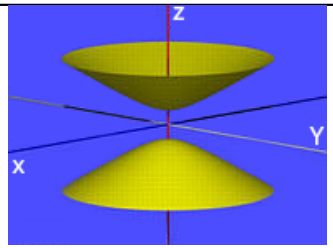
Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$(2,0)$	cylindre elliptique	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$(2,0)$	cylindre hyperbolique	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$	$(2,0)$	Paraboloide elliptique	

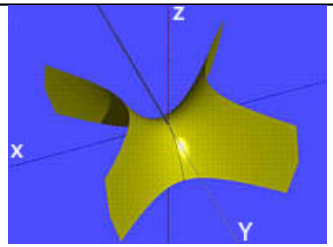
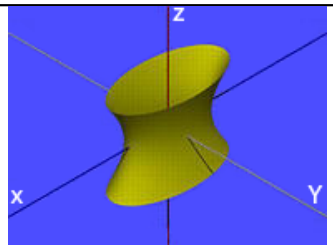
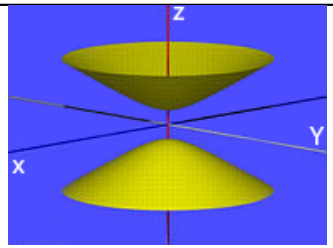
Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$			
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$			
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$			

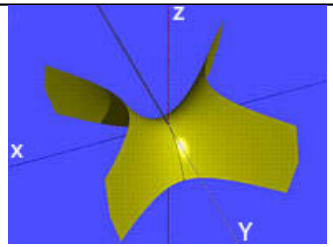
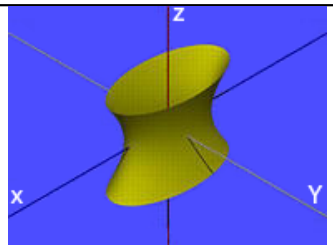
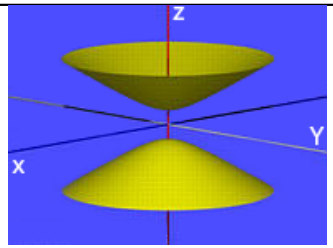
Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$	$(1,1)$		
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$			
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$			

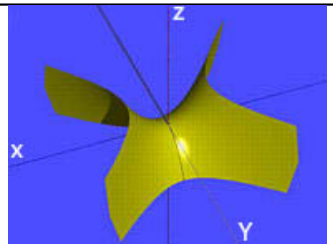
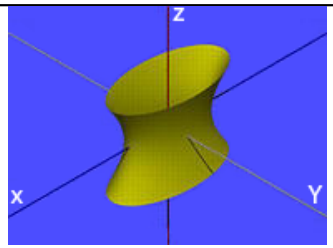
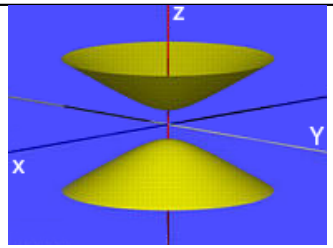
Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$	$(1,1)$	Paraboloide hyperbolique	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$			
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$			

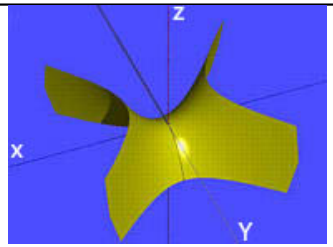
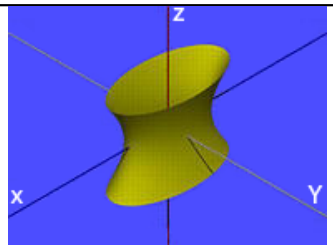
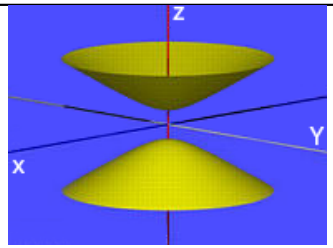
Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$	$(1,1)$	Paraboloide hyperbolique	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$(2,1)$		
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$			

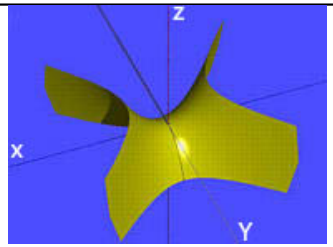
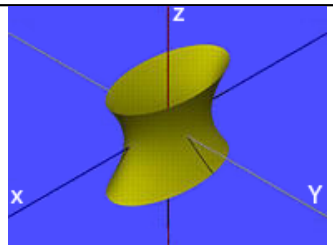
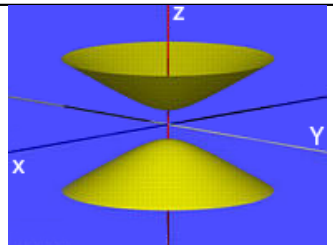
Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$	$(1,1)$	Paraboloide hyperbolique	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$(2,1)$	Hyperboloide à une nappe	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$			

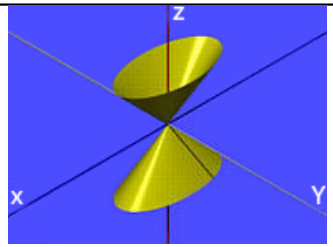
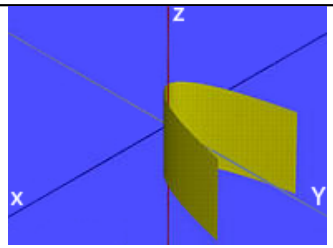
Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$	$(1,1)$	Paraboloide hyperbolique	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$(2,1)$	Hyperboloide à une nappe	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	$(2,1)$		

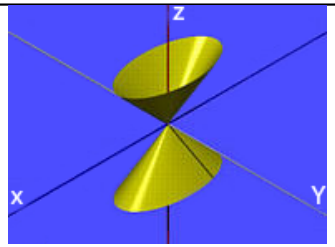
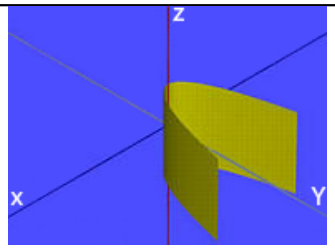
Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$	$(1,1)$	Paraboloide hyperbolique	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$(2,1)$	Hyperboloide à une nappe	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	$(2,1)$	Hyperboloide à deux nappes	

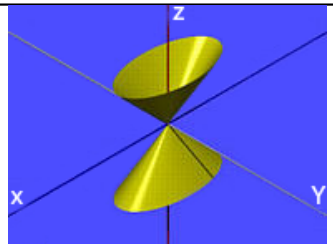
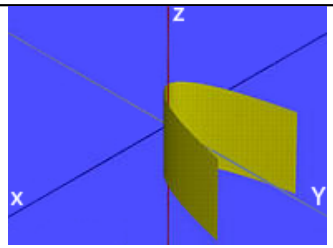
Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$			
$ax^2=y$			

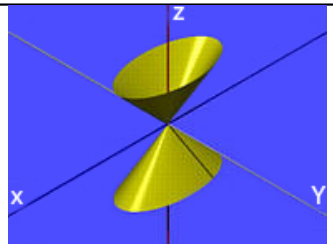
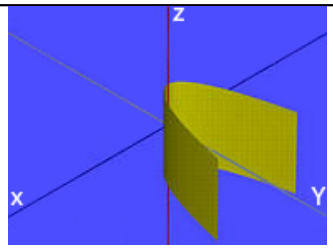
Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	$(2,1)$		
$ax^2=y$			

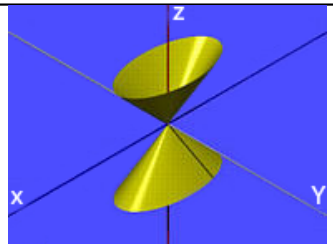
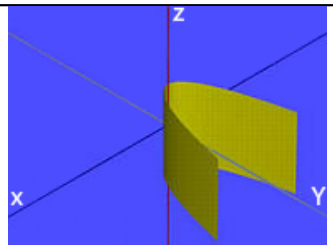
Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	$(2,1)$	Cône à base elliptique	
$ax^2=y$			

Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	$(2,1)$	Cône à base elliptique	
$ax^2=y$	$(1,0)$		

Pour chacune des quadriques, il existe un repère, où leur équation est d'un des types :

Equation type	Signature de la forme quadratique	Nom de la quadrique	Représentation graphique
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	$(2,1)$	Cône à base elliptique	
$ax^2=y$	$(1,0)$	Cylindre parabolique	

Exercices

Exercice n° 1 :

1. $A(x, y, z, t) = 2xy - 4xt + xz + 3tz$

Exercice n° 1 :

1. $A(x,y,z,t) = 2xy - 4xt + xz + 3tz$

$$= 2\left[xy + x\left(-2t + \frac{1}{2}z\right) + y \times 0\right] + 3tz$$

$$= 2\left[(x+0)\left(y - 2t + \frac{1}{2}z\right)\right] + 3tz$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(x + y - 2t + \frac{1}{2}z\right)^2 - \left(x + y + 2t - \frac{1}{2}z\right)^2\right] + 3tz$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + y - 2t + \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x + y + 2t - \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{3}{4}\left[(t+z)^2 - (t-z)^2\right]$$

Exercice n° 1 :

2. $B(x, y, z, t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt + yt$

Exercice n° 1 :

2. $B(x,y,z,t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt + yt$

$$
\begin{aligned}
B(x) &= x^2 + x(2y+t) + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + yt \\
&= \left(x + y + \frac{1}{2}t\right)^2 - \left(y + \frac{1}{2}t\right)^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + yt \\
&= \left(x + y + \frac{1}{2}t\right)^2 - y^2 - yt - \frac{1}{4}t^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + yt \\
&= \left(x + y + \frac{1}{2}t\right)^2 + 2y^2 + \frac{3}{4}t^2 + 4z^2
\end{aligned}
$$

Exercice n° 1 :

3. $C(a,b,c,d) = ab + 5bd - 4bc + 6ac$

Exercice n° 1 :

3. $C(a,b,c,d) = ab + 5bd - 4bc + 6ac$

$$\begin{aligned} C(a,b,c,d) &= ab + a(6c) + b(5d-4c) = \\ &= \big(a + (5d-4c)\big)(b+6c) - (5d-4c)\times 6c \\ &= \frac{1}{4}\Big[(a+b+2c+5d)^2 - (a-b-10c+5d)^2\Big] - 30cd + 24c^2 \end{aligned}$$

$$-30cd + 24c^2 = 24\left[c^2 - \frac{5}{4}cd\right] = 24\left[\left(c - \frac{5}{8}d\right)^2 - \frac{25}{64}d^2\right] = 24\left(c - \frac{5}{8}d\right)^2 - \frac{75}{8}d^2$$

Conclusion :

$$C(a,b,c,d) = \frac{1}{4}(a+b+2c+5d)^2 - \frac{1}{4}(a-b-10c+5d)^2 + 24\left(c - \frac{5}{8}d\right)^2 - \frac{75}{8}d^2$$

Exercice n° 2 :

1. $A(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$

Exercice n° 2 :

1. $A(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$

$$
\begin{aligned}
A(x,y,z) &= x^2 + x\big(2z\cos(\alpha)\big) + y^2 + 2zy\sin(\alpha) \\
&= \big(x + z\cos(\alpha)\big)^2 - z^2\cos^2(\alpha) + y^2 + 2zy\sin(\alpha) \\
&= \big(x + z\cos(\alpha)\big)^2 + y^2 + y\big(2z\sin(\alpha)\big) - z^2\cos^2(\alpha) \\
&= \big(x + z\cos(\alpha)\big)^2 + \big(y + z\sin(\alpha)\big)^2 - z^2\sin^2(\alpha) - z^2\cos^2(\alpha) \\
&= \big(x + z\cos(\alpha)\big)^2 + \big(y + z\sin(\alpha)\big)^2 - z^2\big(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)\big) \\
&= \big(x + z\cos(\alpha)\big)^2 + \big(y + z\sin(\alpha)\big)^2 - z^2
\end{aligned}
$$

Exercice n° 2 :

2. $B(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$

Exercice n° 2 :

2. $B(x,y,z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$

$$
\begin{aligned}
B(x,y,z) &= 2x^2 + x(3y-4z) - 2y^2 + 7yz - 6z^2 \\
&= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}y - z\right)^2 - \left(\frac{3}{4}y - z\right)^2\right] - 2y^2 + 7yz - 6z^2 \\
&= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}y - z\right)^2 - \frac{9}{16}y^2 + \frac{3}{2}yz - z^2\right] - 2y^2 + 7yz - 6z^2 \\
&= 2\left(x + \frac{3}{4}y - z\right)^2 - \frac{25}{8}y^2 + 10yz - 8z^2 \\
&= 2\left(x + \frac{3}{4}y - z\right)^2 - \frac{25}{8}\left(y^2 - \frac{16}{5}yz\right) - 8z^2 \\
&= 2\left(x + \frac{3}{4}y - z\right)^2 - \frac{25}{8}\left[\left(y - \frac{8}{5}z\right)^2 - \frac{64}{25}z^2\right] - 8z^2 \\
&= 2\left(x + \frac{3}{4}y - z\right)^2 - \frac{25}{8}\left(y - \frac{8}{5}z\right)^2 + 8z^2 - 8z^2 \\
&= 2\left(x + \frac{3}{4}y - z\right)^2 - \frac{25}{8}\left(y - \frac{8}{5}z\right)^2
\end{aligned}
$$