

Fonctions numériques de plusieurs variables

🌀 Fiche n° 1 🌀

I. Fonctions numériques à plusieurs variables.

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables dans le cadre particulier de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, mais également dans le cadre général de $\mathbb{R}^n$. Ces fonctions seront donc de la forme

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

où $n \geq 1$ est un entier naturel.



Définition:

D est appelé le de la fonction.

I. Fonctions numériques à plusieurs variables.

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables dans le cadre particulier de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, mais également dans le cadre général de $\mathbb{R}^n$. Ces fonctions seront donc de la forme

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

où $n \geq 1$ est un entier naturel.



Définition:

D est appelé le **domaine de définition** de la fonction.

I. Fonctions numériques à plusieurs variables.

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables dans le cadre particulier de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, mais également dans le cadre général de $\mathbb{R}^n$. Ces fonctions seront donc de la forme

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

où $n \geq 1$ est un entier naturel.



Définition:

D est appelé le **domaine de définition** de la fonction.

Autrement dit, les éléments de l'ensemble de départ D seront des n -uplets du type $(x_1, \dots, x_n)$ que l'on peut considérer comme des vecteurs, et les éléments de l'ensemble d'arrivée seront des réels.

II. Fonction numérique à une variable $n = 1$:

II. Fonction numérique à une variable $n = 1$:

Les fonctions $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ sont connues depuis le lycée.
 $x \longmapsto f(x)$

II. Fonction numérique à une variable $n = 1$:

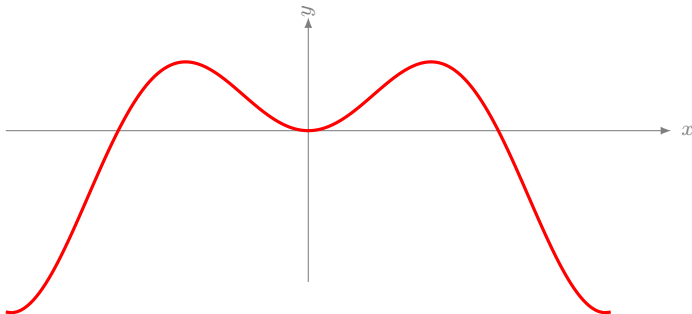
Les fonctions $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ sont connues depuis le lycée.
 $x \longmapsto f(x)$

Voici les graphes des fonctions $f: x \longmapsto x \sin(x)$ et $g: x \longmapsto \sqrt{x}$:

II. Fonction numérique à une variable $n = 1$:

Les fonctions $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ sont connues depuis le lycée.
 $x \longmapsto f(x)$

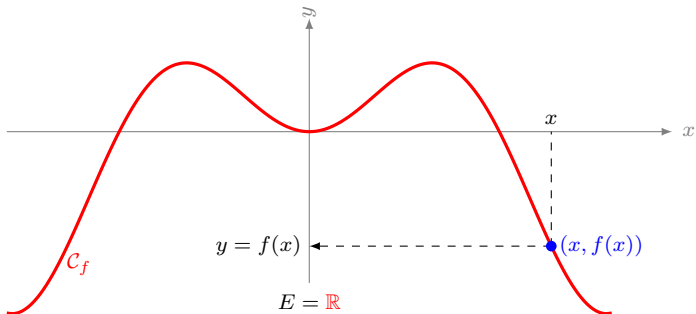
Voici les graphes des fonctions $f: x \longmapsto x \sin(x)$ et $g: x \longmapsto \sqrt{x}$:



II. Fonction numérique à une variable $n = 1$:

Les fonctions $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ sont connues depuis le lycée.
 $x \longmapsto f(x)$

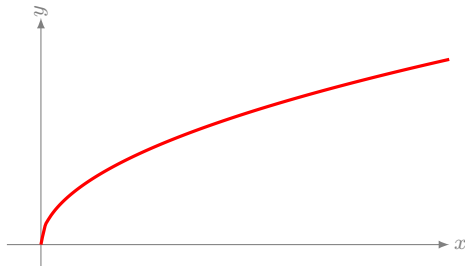
Voici les graphes des fonctions $f: x \longmapsto x \sin(x)$ et $g: x \longmapsto \sqrt{x}$:



II. Fonction numérique à une variable $n = 1$:

Les fonctions $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ sont connues depuis le lycée.
 $x \longmapsto f(x)$

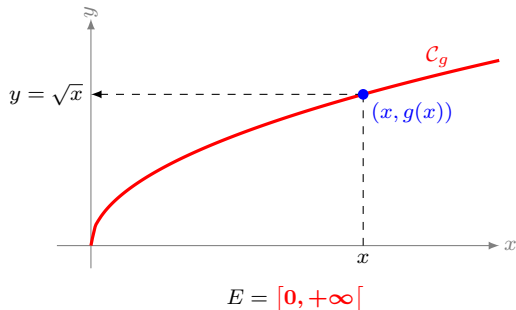
Voici les graphes des fonctions $f: x \longmapsto x \sin(x)$ et $g: x \longmapsto \sqrt{x}$:



II. Fonction numérique à une variable $n = 1$:

Les fonctions $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ sont connues depuis le lycée.
 $x \longmapsto f(x)$

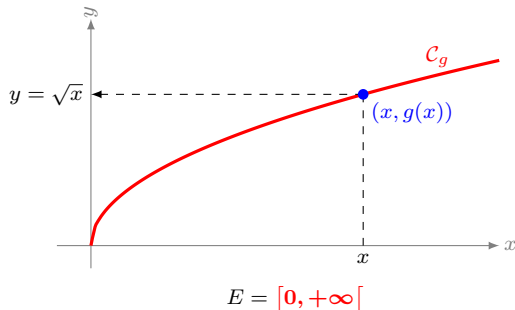
Voici les graphes des fonctions $f: x \longmapsto x \sin(x)$ et $g: x \longmapsto \sqrt{x}$:



II. Fonction numérique à une variable $n = 1$:

Les fonctions $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ sont connues depuis le lycée.
 $x \longmapsto f(x)$

Voici les graphes des fonctions $f: x \longmapsto x \sin(x)$ et $g: x \longmapsto \sqrt{x}$:

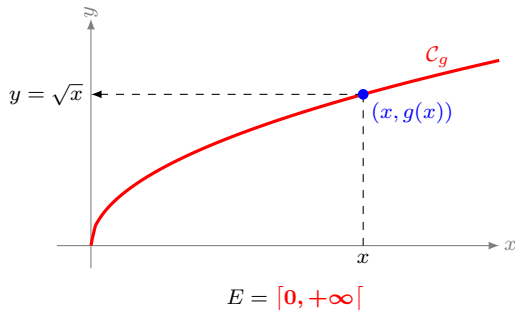


La variable x est **libre**,

II. Fonction numérique à une variable $n = 1$:

Les fonctions $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ sont connues depuis le lycée.
 $x \longmapsto f(x)$

Voici les graphes des fonctions $f: x \longmapsto x \sin(x)$ et $g: x \longmapsto \sqrt{x}$:

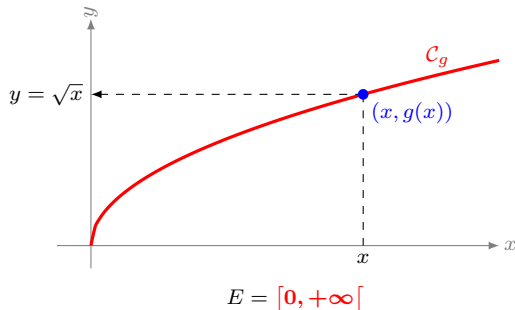


La variable x est **libre**, alors que la variable y ($= f(x)$) ne l'est pas puisqu'elle est fonction de x .

II. Fonction numérique à une variable $n = 1$:

Les fonctions $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ sont connues depuis le lycée.
 $x \longmapsto f(x)$

Voici les graphes des fonctions $f: x \longmapsto x \sin(x)$ et $g: x \longmapsto \sqrt{x}$:



La variable x est **libre**, alors que la variable y ($= f(x)$) ne l'est pas puisqu'elle est fonction de x .
La courbe obtenue est de dimension **1**.

III. Fonction numérique à deux variables $n = 2$.

III. Fonction numérique à deux variables $n = 2$.

Les fonctions $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont représentées par des surfaces.
 $(x, y) \longmapsto f(x, y)$

III. Fonction numérique à deux variables $n = 2$.

Les fonctions $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont représentées par des surfaces.
 $(x, y) \longmapsto f(x, y)$

Les variables **x et y**

III. Fonction numérique à deux variables $n = 2$.

Les fonctions $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont représentées par des surfaces.
 $(x, y) \longmapsto f(x, y)$

Les variables **x et y** sont **libres**,

III. Fonction numérique à deux variables $n = 2$.

Les fonctions $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont représentées par des surfaces.
 $(x, y) \longmapsto f(x, y)$

Les variables **x et y** sont **libres**, alors que la variable $z = f(x, y)$ ne l'est pas puisqu'elle est fonction de **x et y** .

III. Fonction numérique à deux variables $n = 2$.

Les fonctions $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont représentées par des surfaces.
 $(x, y) \longmapsto f(x, y)$

Les variables **x et y** sont **libres**, alors que la variable $z = f(x, y)$ ne l'est pas puisqu'elle est fonction de **x et y** . La surface obtenue est de dimension **2**.

Exemples :

Considérons la fonction $f: [0; 4] \times [-4; 4] \longrightarrow [0, +\infty[$
 $(x, y) \longmapsto \frac{4}{1 + x^2 + y^2}$

III. Fonction numérique à deux variables $n = 2$.

Les fonctions $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont représentées par des surfaces.
 $(x, y) \longmapsto f(x, y)$

Les variables x et y sont **libres**, alors que la variable $z = f(x, y)$ ne l'est pas puisqu'elle est fonction de x et y . La surface obtenue est de dimension **2**.

Exemples :

Considérons la fonction $f: [0; 4] \times [-4; 4] \longrightarrow [0, +\infty[$
 $(x, y) \longmapsto \frac{4}{1 + x^2 + y^2}$

- La variable x prend toutes les valeurs situées dans l'intervalle

III. Fonction numérique à deux variables $n = 2$.

Les fonctions $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont représentées par des surfaces.
 $(x, y) \longmapsto f(x, y)$

Les variables x et y sont **libres**, alors que la variable $z = f(x, y)$ ne l'est pas puisqu'elle est fonction de x et y . La surface obtenue est de dimension **2**.

Exemples :

Considérons la fonction $f: [0; 4] \times [-4; 4] \longrightarrow [0, +\infty[$
 $(x, y) \longmapsto \frac{4}{1 + x^2 + y^2}$

- La variable x prend toutes les valeurs situées dans l'intervalle $[0; 4]$

III. Fonction numérique à deux variables $n = 2$.

Les fonctions $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont représentées par des surfaces.
 $(x, y) \longmapsto f(x, y)$

Les variables **x et y** sont **libres**, alors que la variable $z = f(x, y)$ ne l'est pas puisqu'elle est fonction de **x et y** . La surface obtenue est de dimension **2**.

Exemples :

Considérons la fonction $f: [0; 4] \times [-4; 4] \longrightarrow [0, +\infty[$
 $(x, y) \longmapsto \frac{4}{1 + x^2 + y^2}$

- La variable x prend toutes les valeurs situées dans l'intervalle **$[0; 4]$**
- La variable y prend toutes les valeurs situées dans l'intervalle

III. Fonction numérique à deux variables $n = 2$.

Les fonctions $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont représentées par des surfaces.
 $(x, y) \longmapsto f(x, y)$

Les variables **x et y** sont **libres**, alors que la variable $z = f(x, y)$ ne l'est pas puisqu'elle est fonction de **x et y** . La surface obtenue est de dimension **2**.

Exemples :

Considérons la fonction $f: [0; 4] \times [-4; 4] \longrightarrow [0, +\infty[$
 $(x, y) \longmapsto \frac{4}{1 + x^2 + y^2}$

- La variable x prend toutes les valeurs situées dans l'intervalle **$[0; 4]$**
- La variable y prend toutes les valeurs situées dans l'intervalle **$[-4; 4]$**

III. Fonction numérique à deux variables $n = 2$.

Les fonctions $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont représentées par des surfaces.
 $(x, y) \longmapsto f(x, y)$

Les variables **x et y** sont **libres**, alors que la variable $z = f(x, y)$ ne l'est pas puisqu'elle est fonction de **x et y** . La surface obtenue est de dimension **2**.

Exemples :

Considérons la fonction $f: [0; 4] \times [-4; 4] \longrightarrow [0, +\infty[$
 $(x, y) \longmapsto \frac{4}{1 + x^2 + y^2}$

- La variable x prend toutes les valeurs situées dans l'intervalle **$[0; 4]$**
- La variable y prend toutes les valeurs situées dans l'intervalle **$[-4; 4]$**
- **$[0; 4] \times [-4; 4]$** est

III. Fonction numérique à deux variables $n = 2$.

Les fonctions $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont représentées par des surfaces.
 $(x, y) \longmapsto f(x, y)$

Les variables **x et y** sont **libres**, alors que la variable $z = f(x, y)$ ne l'est pas puisqu'elle est fonction de **x et y** . La surface obtenue est de dimension **2**.

Exemples :

Considérons la fonction $f: [0; 4] \times [-4; 4] \longrightarrow [0, +\infty[$
 $(x, y) \longmapsto \frac{4}{1 + x^2 + y^2}$

- La variable x prend toutes les valeurs situées dans l'intervalle **$[0; 4]$**
- La variable y prend toutes les valeurs situées dans l'intervalle **$[-4; 4]$**
- **$[0; 4] \times [-4; 4]$ est le domaine de définition de la fonction f .**

IV. Représentation graphique.

IV. Représentation graphique.

Pour chaque valeur de x , f est fonction de y .

IV. Représentation graphique.

Pour chaque valeur de x , f est fonction de y . Fixons $x = 0$ on a $f(0, y) =$

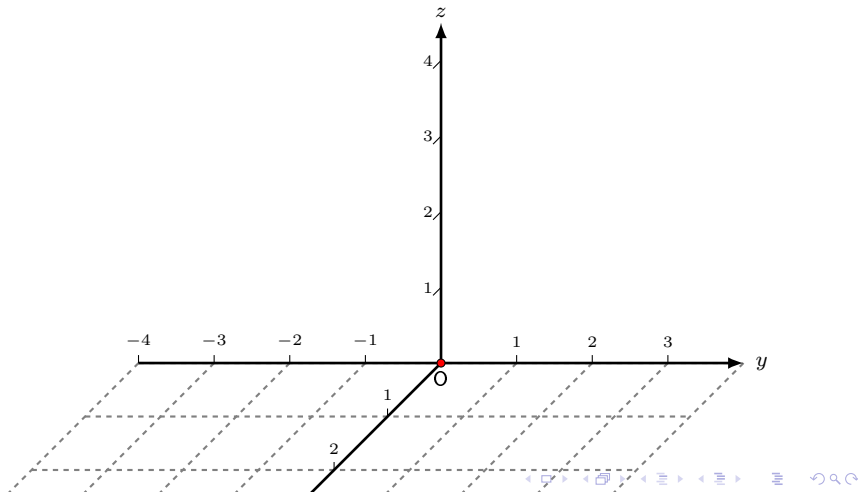
IV. Représentation graphique.

Pour chaque valeur de x , f est fonction de y . Fixons $x = 0$ on a $f(0, y) = \frac{4}{1 + y^2}$

IV. Représentation graphique.

Pour chaque valeur de x , f est fonction de y . Fixons $x = 0$ on a $f(0, y) = \frac{4}{1 + y^2}$ et on obtient :

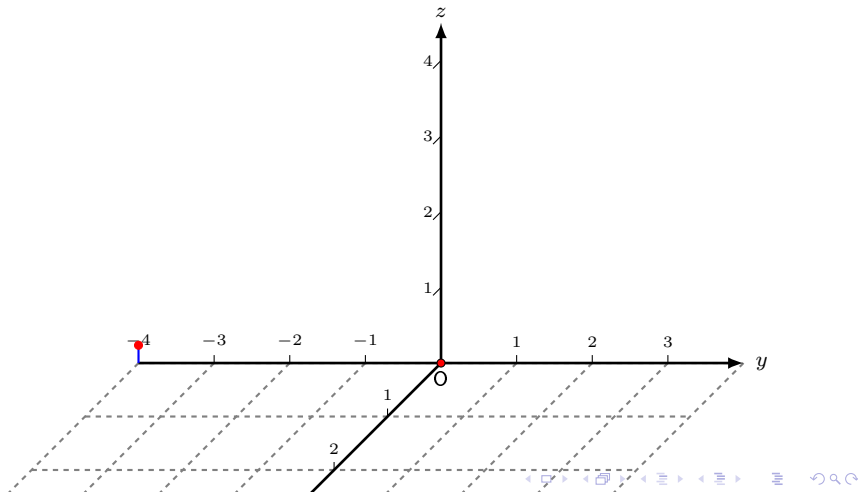
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(0, y)$									



IV. Représentation graphique.

Pour chaque valeur de x , f est fonction de y . Fixons $x = 0$ on a $f(0, y) = \frac{4}{1 + y^2}$ et on obtient :

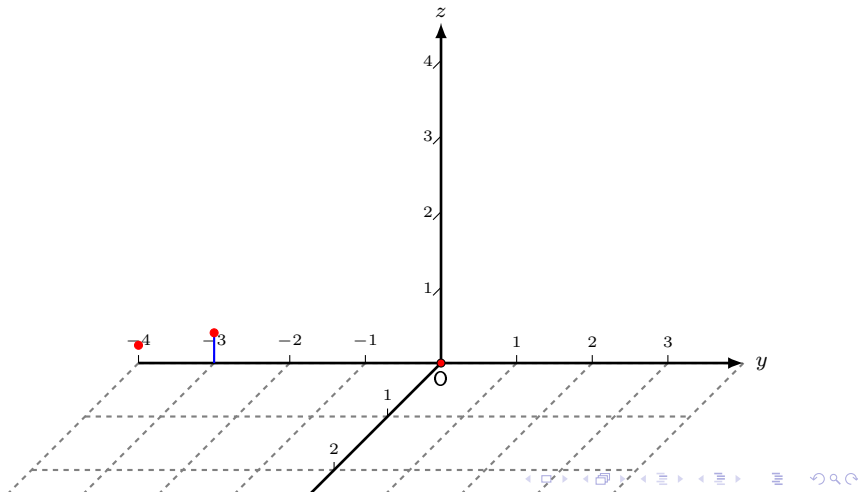
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(0, y)$	0,24								



IV. Représentation graphique.

Pour chaque valeur de x , f est fonction de y . Fixons $x = 0$ on a $f(0, y) = \frac{4}{1 + y^2}$ et on obtient :

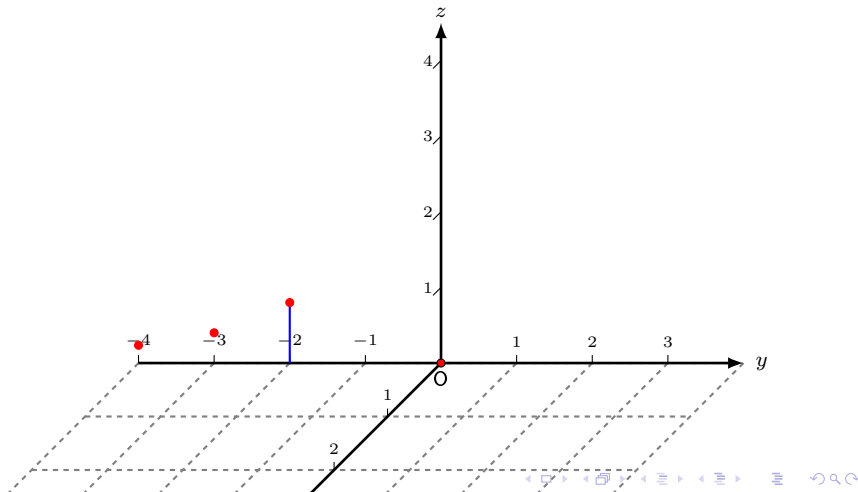
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(0, y)$	0,24	0,40							



IV. Représentation graphique.

Pour chaque valeur de x , f est fonction de y . Fixons $x = 0$ on a $f(0, y) = \frac{4}{1 + y^2}$ et on obtient :

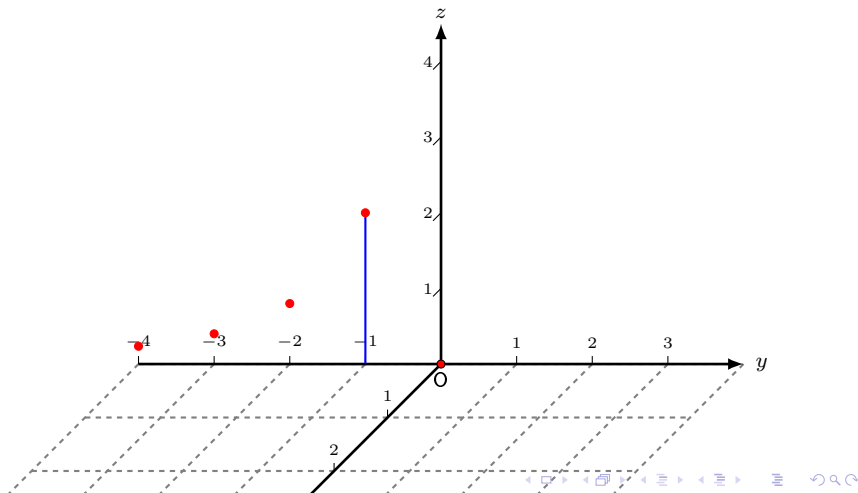
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(0, y)$	0,24	0,40	0,8						



IV. Représentation graphique.

Pour chaque valeur de x , f est fonction de y . Fixons $x = 0$ on a $f(0, y) = \frac{4}{1 + y^2}$ et on obtient :

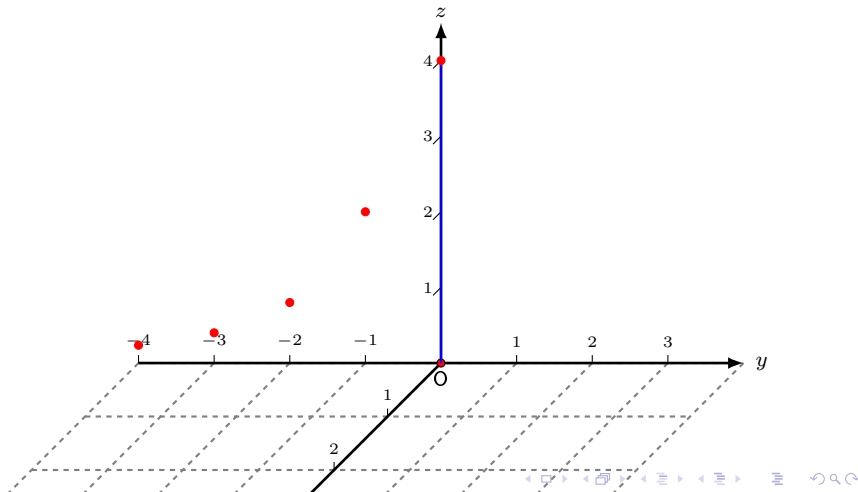
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(0, y)$	0,24	0,40	0,8	2					



IV. Représentation graphique.

Pour chaque valeur de x , f est fonction de y . Fixons $x = 0$ on a $f(0, y) = \frac{4}{1 + y^2}$ et on obtient :

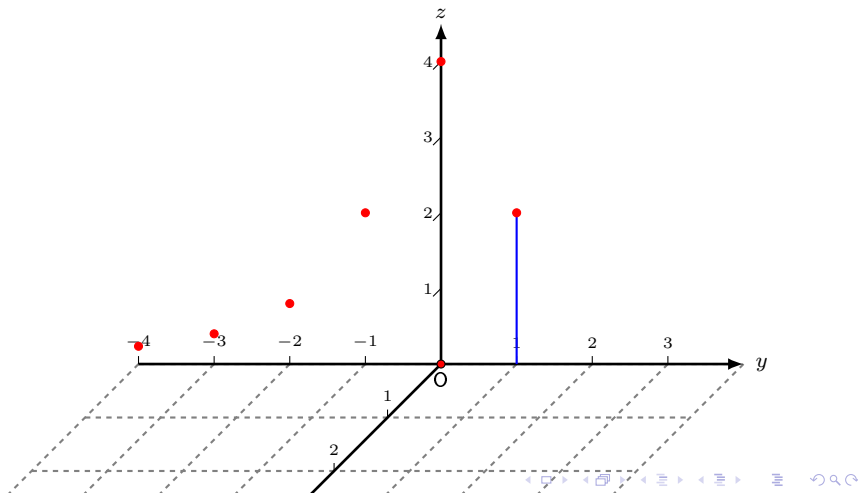
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(0, y)$	0,24	0,40	0,8	2	4				



IV. Représentation graphique.

Pour chaque valeur de x , f est fonction de y . Fixons $x = 0$ on a $f(0, y) = \frac{4}{1 + y^2}$ et on obtient :

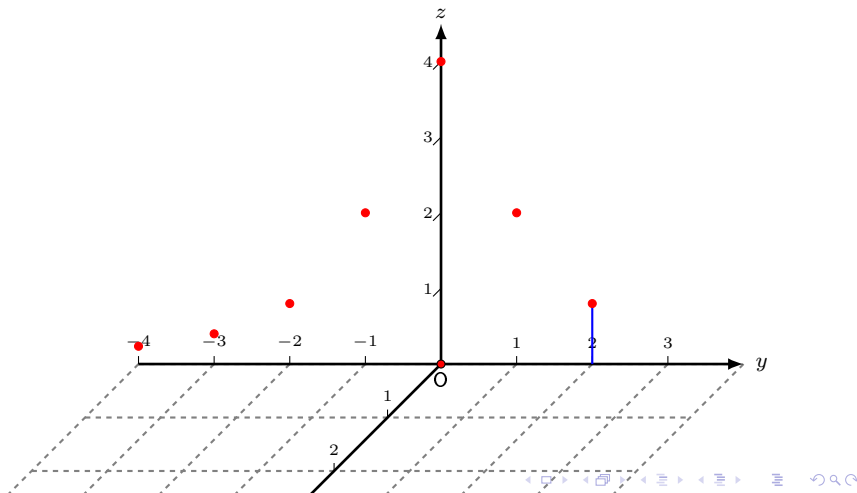
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(0, y)$	0,24	0,40	0,8	2	4	2			



IV. Représentation graphique.

Pour chaque valeur de x , f est fonction de y . Fixons $x = 0$ on a $f(0, y) = \frac{4}{1 + y^2}$ et on obtient :

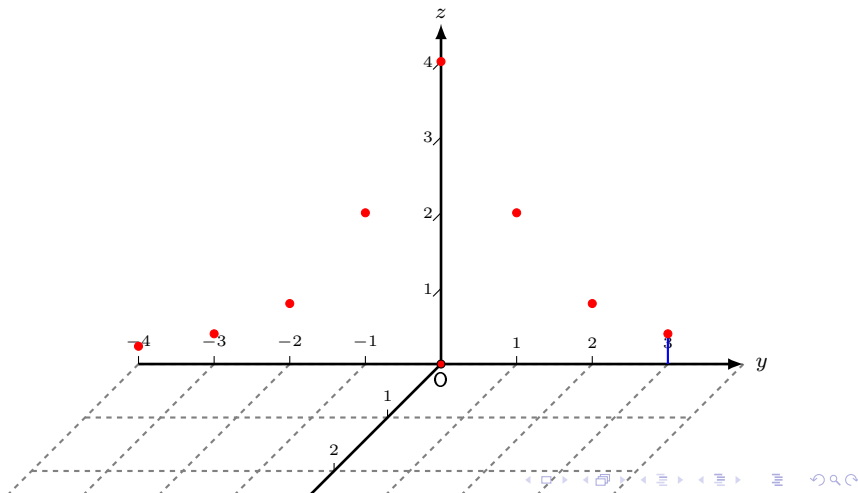
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(0, y)$	0,24	0,40	0,8	2	4	2	0,8		



IV. Représentation graphique.

Pour chaque valeur de x , f est fonction de y . Fixons $x = 0$ on a $f(0, y) = \frac{4}{1 + y^2}$ et on obtient :

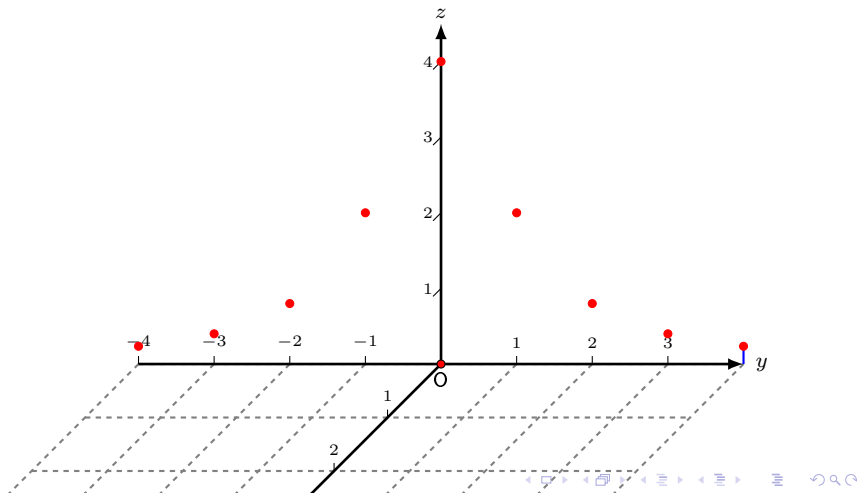
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(0, y)$	0,24	0,40	0,8	2	4	2	0,8	0,4	



IV. Représentation graphique.

Pour chaque valeur de x , f est fonction de y . Fixons $x = 0$ on a $f(0, y) = \frac{4}{1 + y^2}$ et on obtient :

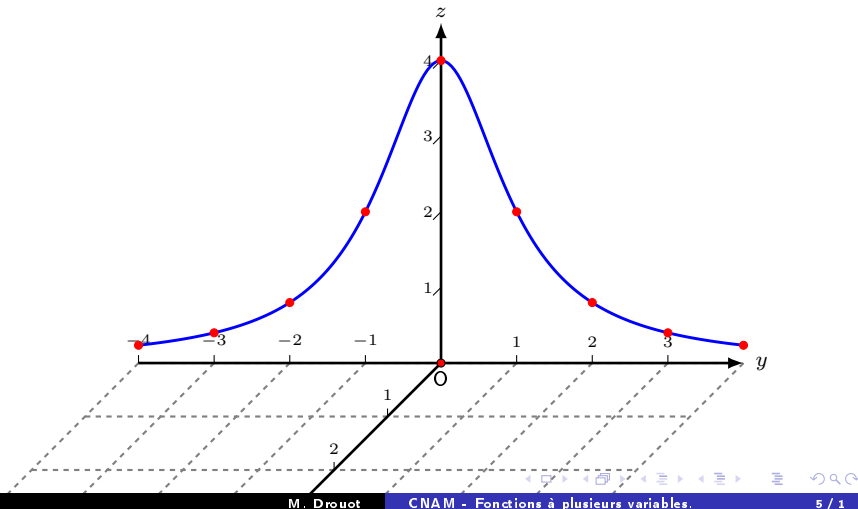
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(0, y)$	0,24	0,40	0,8	2	4	2	0,8	0,4	0,24



IV. Représentation graphique.

Pour chaque valeur de x , f est fonction de y . Fixons $x = 0$ on a $f(0, y) = \frac{4}{1 + y^2}$ et on obtient :

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(0, y)$	0,24	0,40	0,8	2	4	2	0,8	0,4	0,24



IV. Représentation graphique.

Fixons $x = 1$ on a $f(1, y) =$ on a $f(1, y) =$

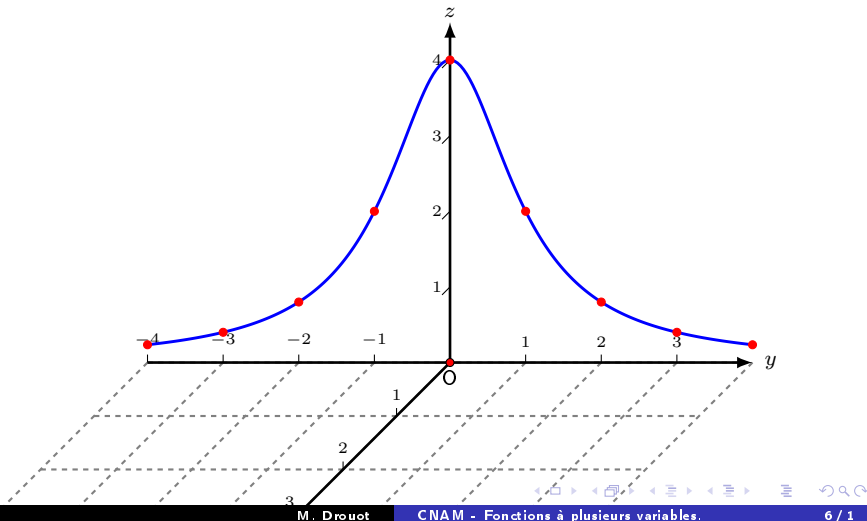
IV. Représentation graphique.

Fixons $x = 1$ on a $f(1, y) =$ on a $f(1, y) = \frac{4}{2 + y^2}$

IV. Représentation graphique.

Fixons $x = 1$ on a $f(1, y) =$ on a $f(1, y) = \frac{4}{2 + y^2}$ et on obtient :

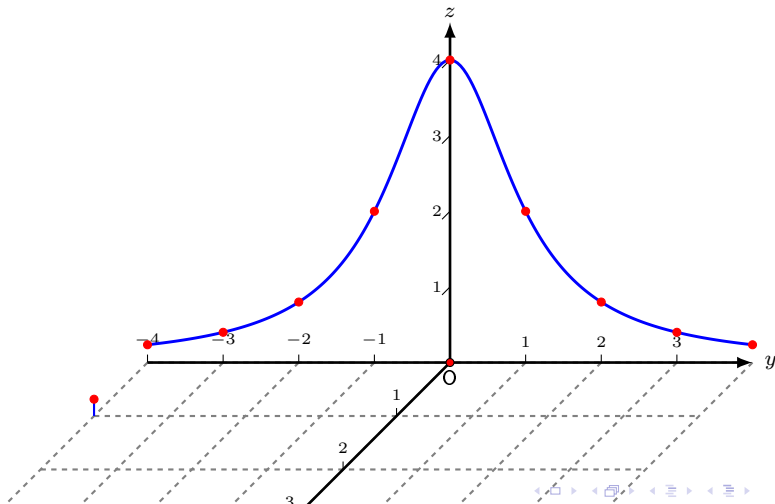
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(1, y)$									



IV. Représentation graphique.

Fixons $x = 1$ on a $f(1, y) = \frac{4}{2 + y^2}$ et on obtient :

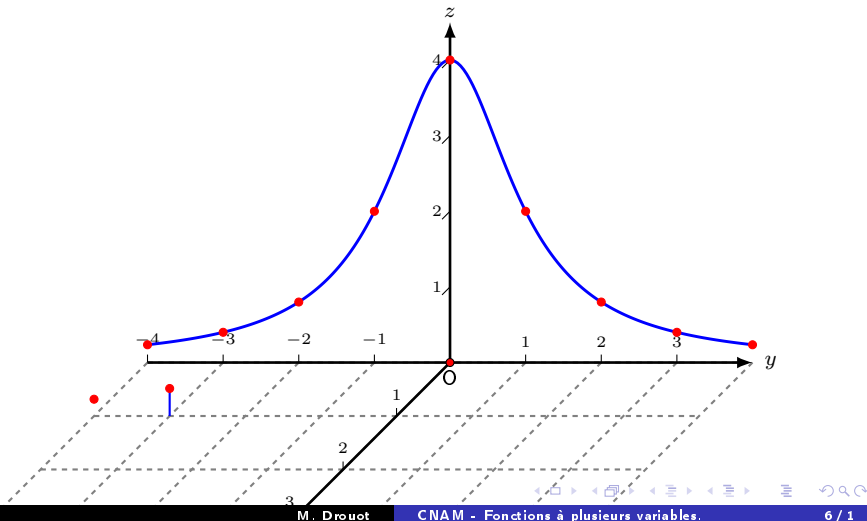
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(1, y)$	0,22								



IV. Représentation graphique.

Fixons $x = 1$ on a $f(1, y) =$ on a $f(1, y) = \frac{4}{2 + y^2}$ et on obtient :

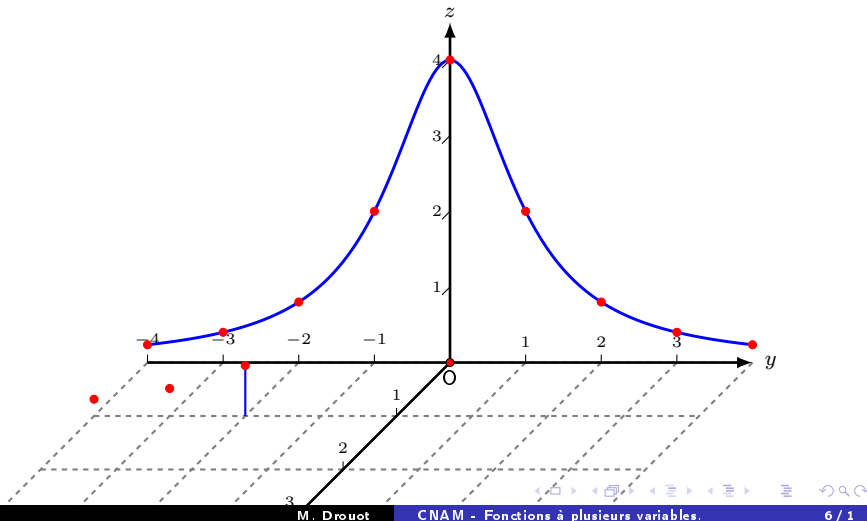
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(1, y)$	0,22	0,36							



IV. Représentation graphique.

Fixons $x = 1$ on a $f(1, y) = \frac{4}{2 + y^2}$ et on obtient :

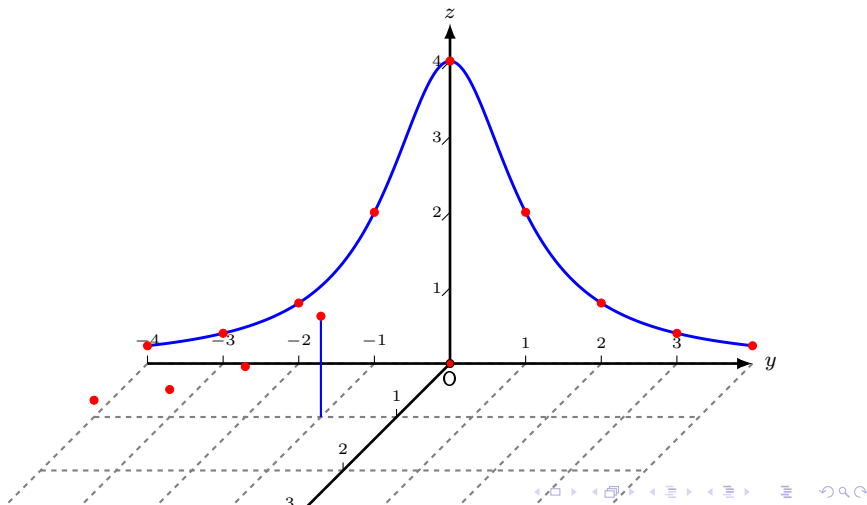
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(1, y)$	0,22	0,36	0,67						



IV. Représentation graphique.

Fixons $x = 1$ on a $f(1, y) =$ on a $f(1, y) = \frac{4}{2 + y^2}$ et on obtient :

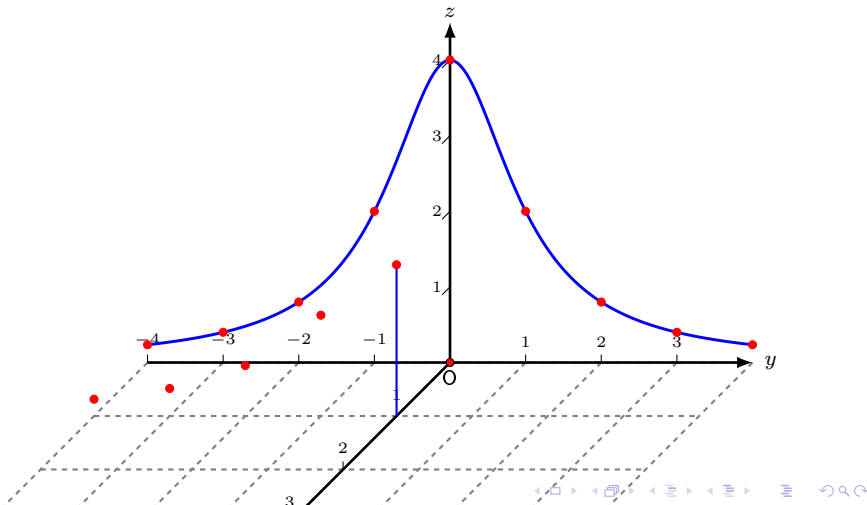
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(1, y)$	0,22	0,36	0,67	1,33					



IV. Représentation graphique.

Fixons $x = 1$ on a $f(1, y) =$ on a $f(1, y) = \frac{4}{2 + y^2}$ et on obtient :

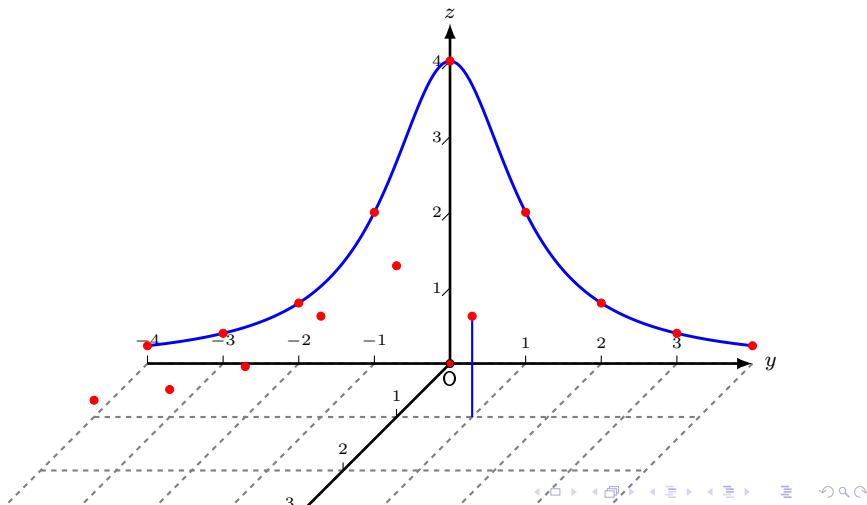
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(1, y)$	0,22	0,36	0,67	1,33	2				



IV. Représentation graphique.

Fixons $x = 1$ on a $f(1, y) =$ on a $f(1, y) = \frac{4}{2 + y^2}$ et on obtient :

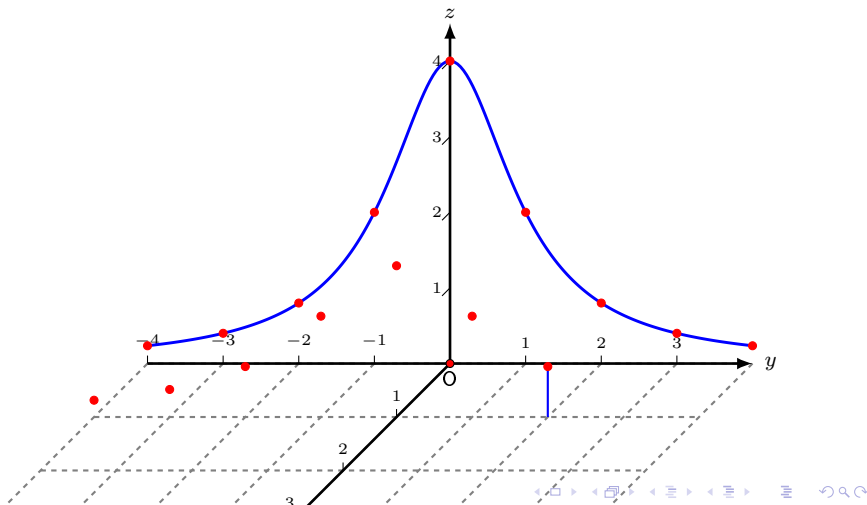
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(1, y)$	0,22	0,36	0,67	1,33	2	1,33			



IV. Représentation graphique.

Fixons $x = 1$ on a $f(1, y) =$ on a $f(1, y) = \frac{4}{2 + y^2}$ et on obtient :

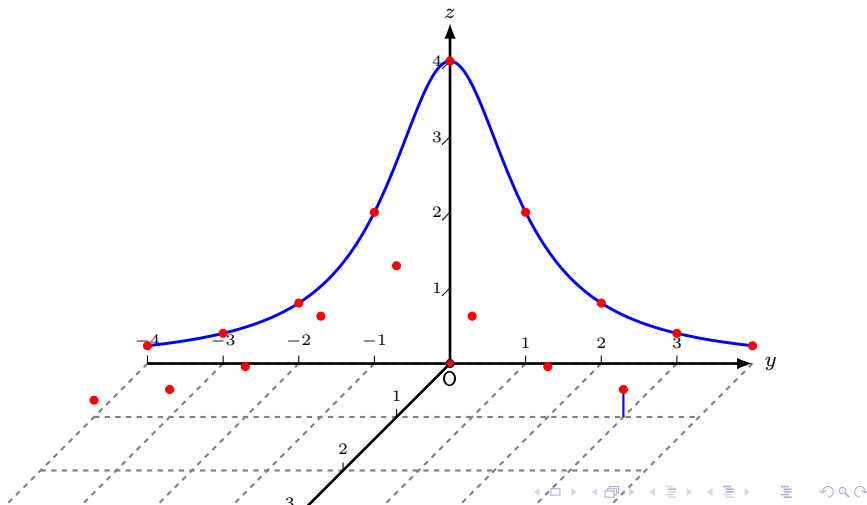
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(1, y)$	0,22	0,36	0,67	1,33	2	1,33	0,67		



IV. Représentation graphique.

Fixons $x = 1$ on a $f(1, y) =$ on a $f(1, y) = \frac{4}{2 + y^2}$ et on obtient :

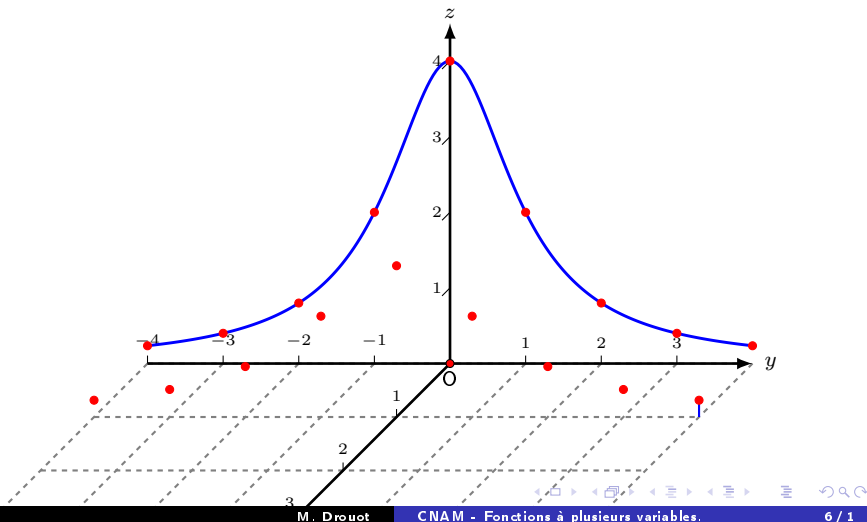
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(1, y)$	0,22	0,36	0,67	1,33	2	1,33	0,67	0,36	



IV. Représentation graphique.

Fixons $x = 1$ on a $f(1, y) =$ on a $f(1, y) = \frac{4}{2 + y^2}$ et on obtient :

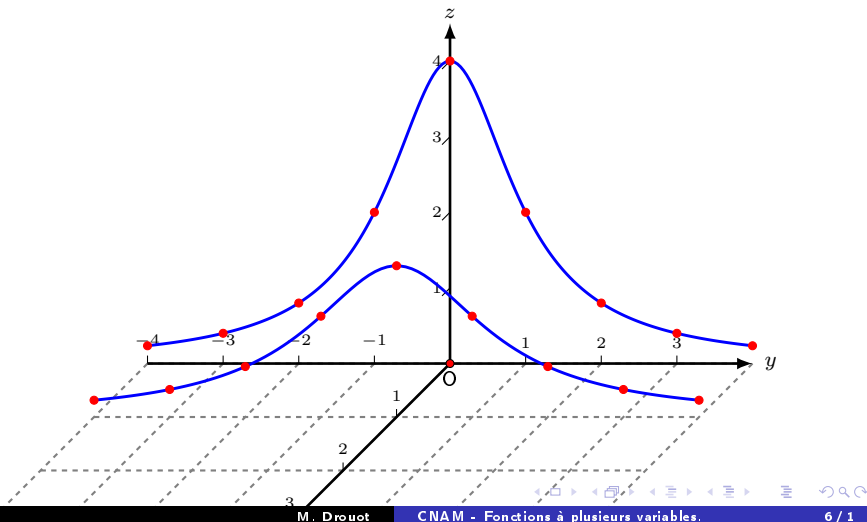
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(1, y)$	0,22	0,36	0,67	1,33	2	1,33	0,67	0,36	0,22



IV. Représentation graphique.

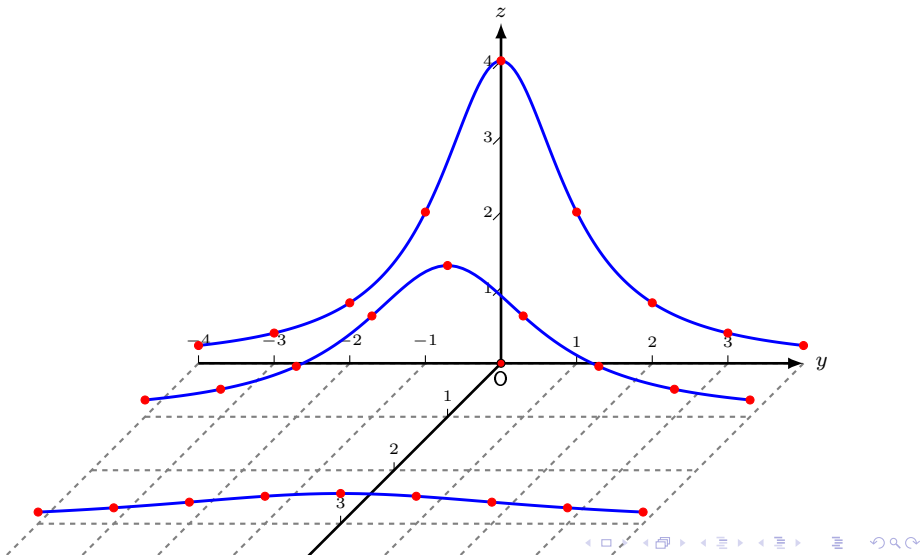
Fixons $x = 1$ on a $f(1, y) =$ on a $f(1, y) = \frac{4}{2 + y^2}$ et on obtient :

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(1, y)$	0,22	0,36	0,67	1,33	2	1,33	0,67	0,36	0,22



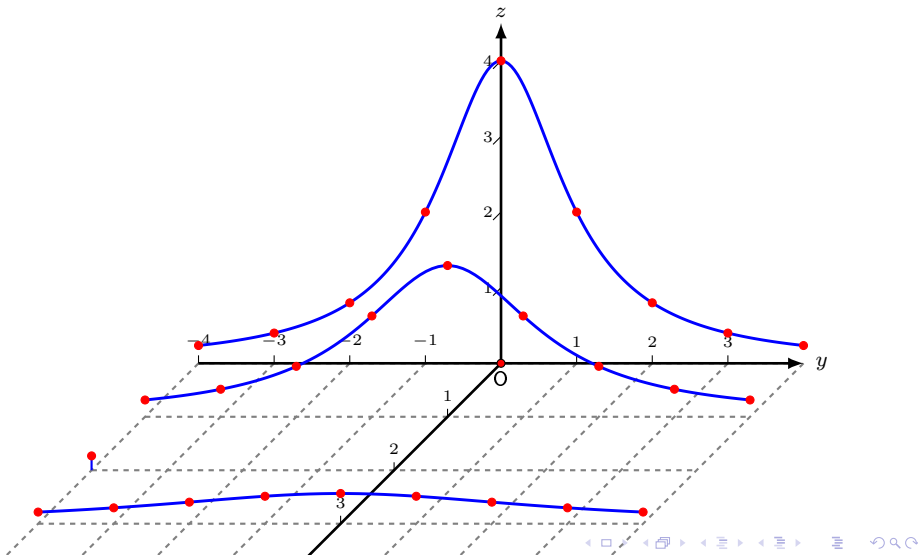
IV. Représentation graphique.

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(2, y)$									



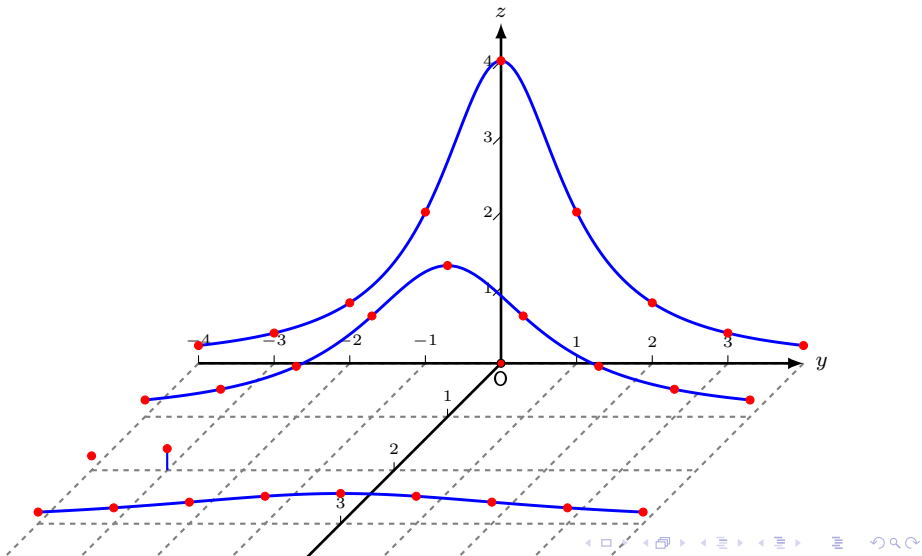
IV. Représentation graphique.

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(2, y)$	0,19								



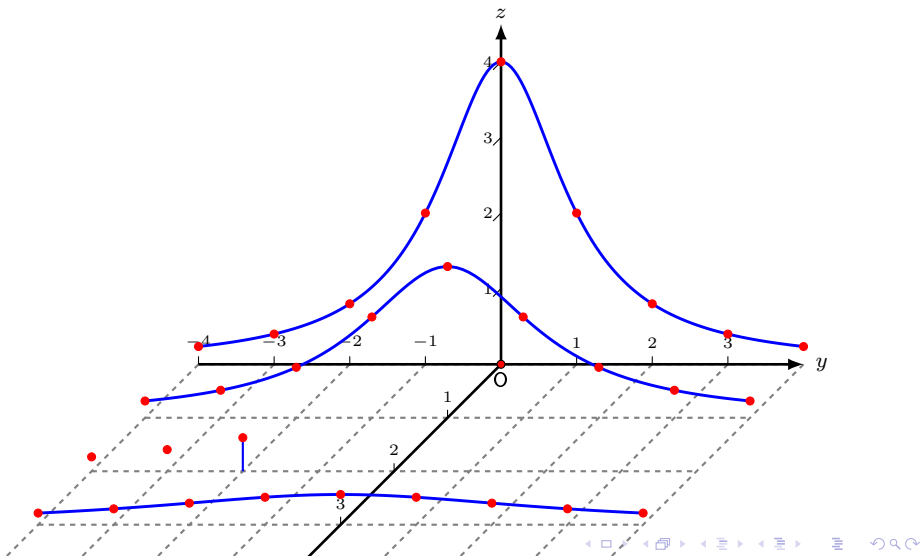
IV. Représentation graphique.

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(2, y)$	0,19	0,29							



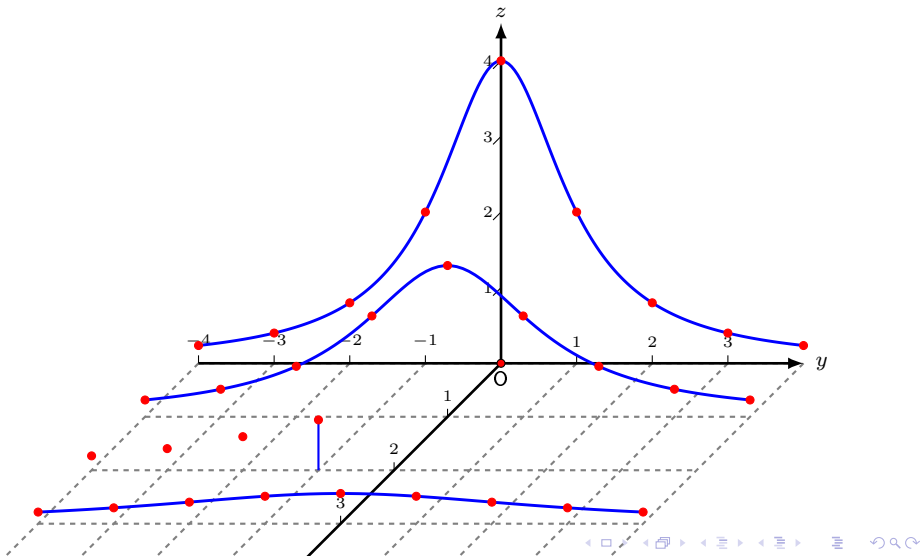
IV. Représentation graphique.

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(2, y)$	0,19	0,29	0,44						



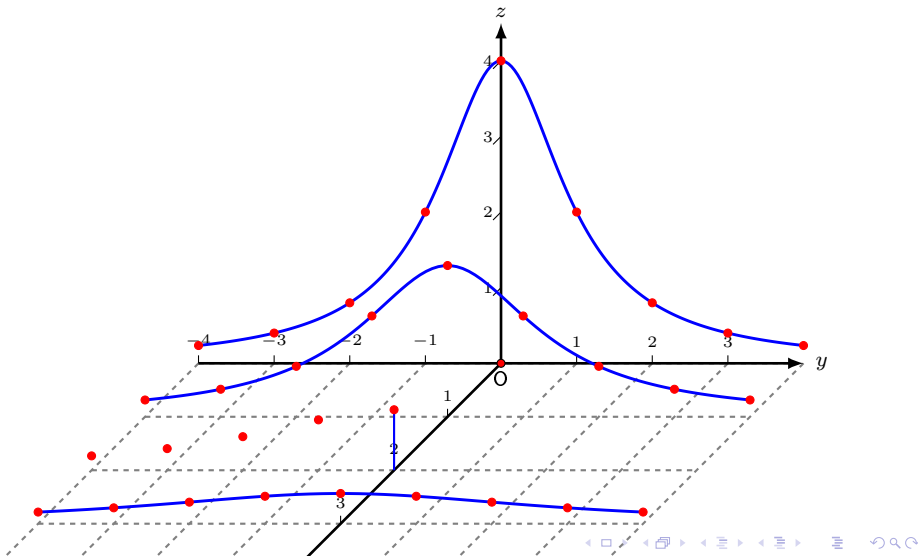
IV. Représentation graphique.

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(2, y)$	0,19	0,29	0,44	0,67					



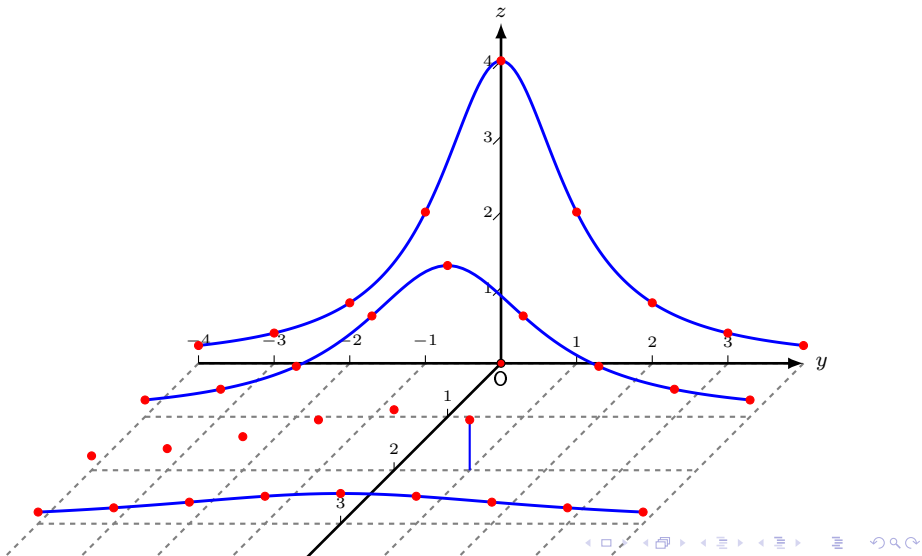
IV. Représentation graphique.

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(2, y)$	0,19	0,29	0,44	0,67	0,8				



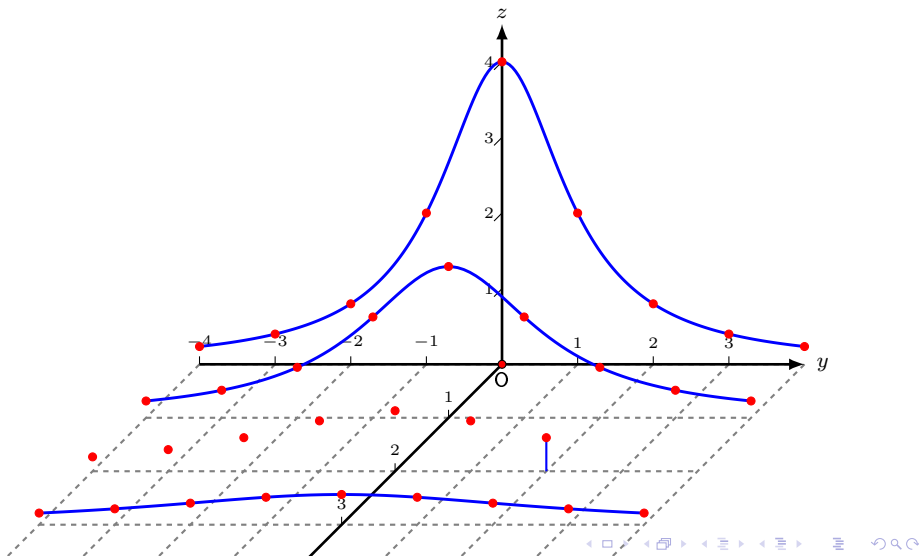
IV. Représentation graphique.

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(2, y)$	0,19	0,29	0,44	0,67	0,8	0,67			



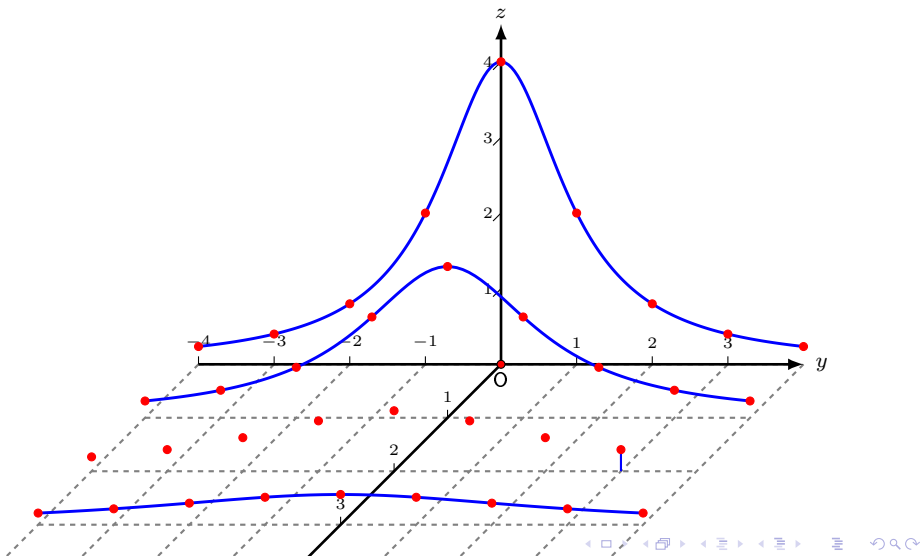
IV. Représentation graphique.

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(2, y)$	0,19	0,29	0,44	0,67	0,8	0,67	0,44		



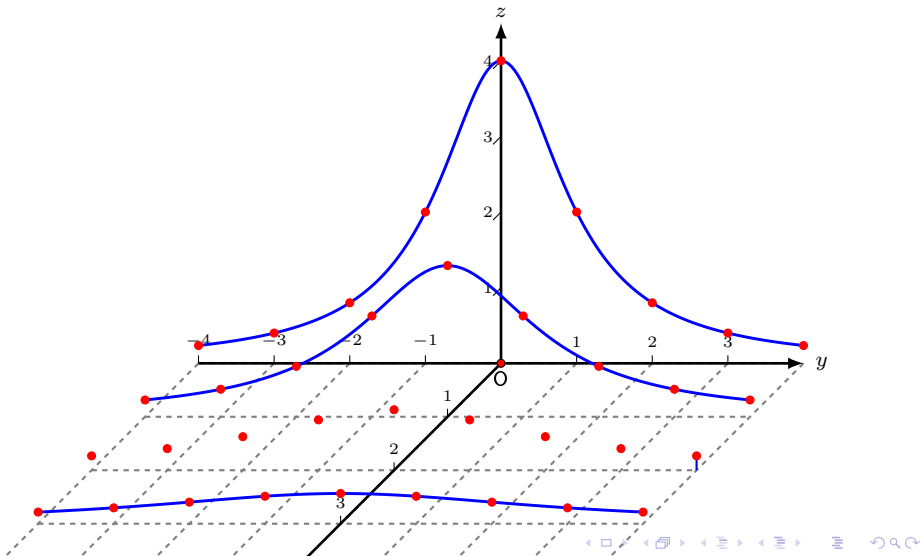
IV. Représentation graphique.

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(2, y)$	0,19	0,29	0,44	0,67	0,8	0,67	0,44	0,29	



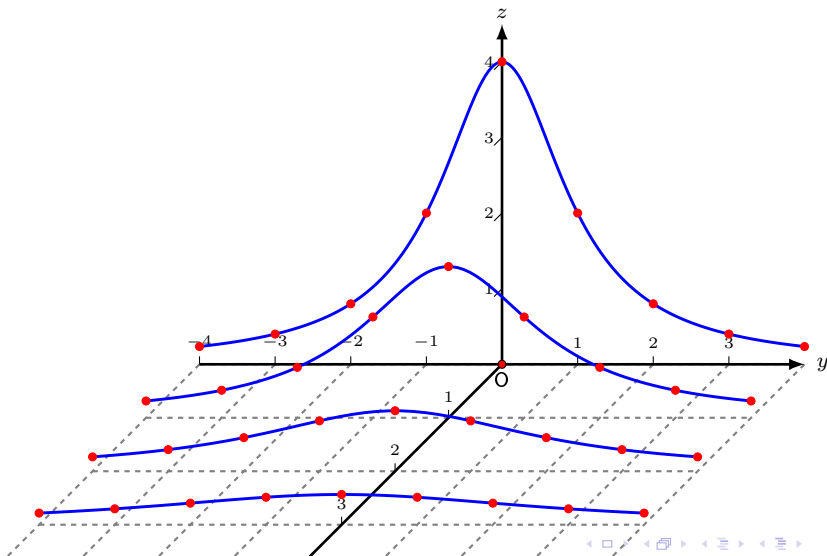
IV. Représentation graphique.

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(2, y)$	0,19	0,29	0,44	0,67	0,8	0,67	0,44	0,29	0,19

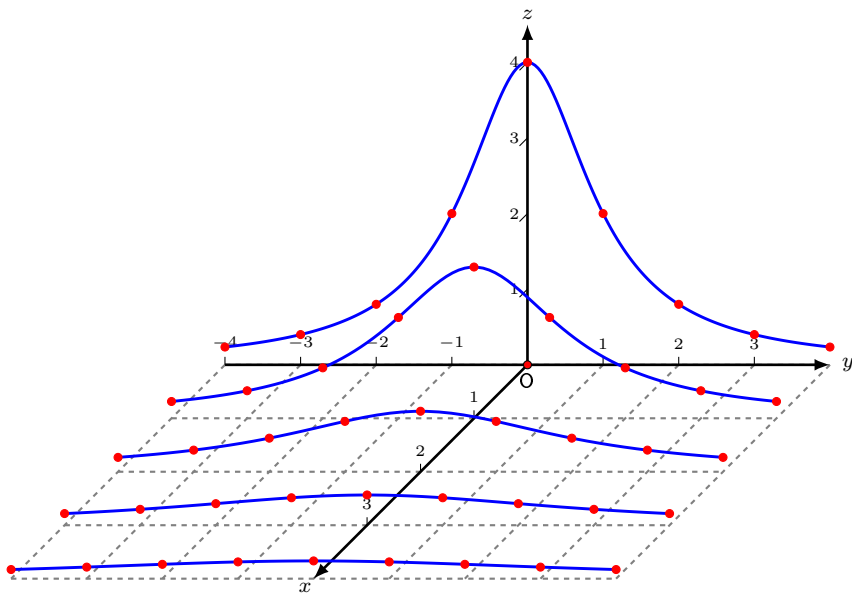


IV. Représentation graphique.

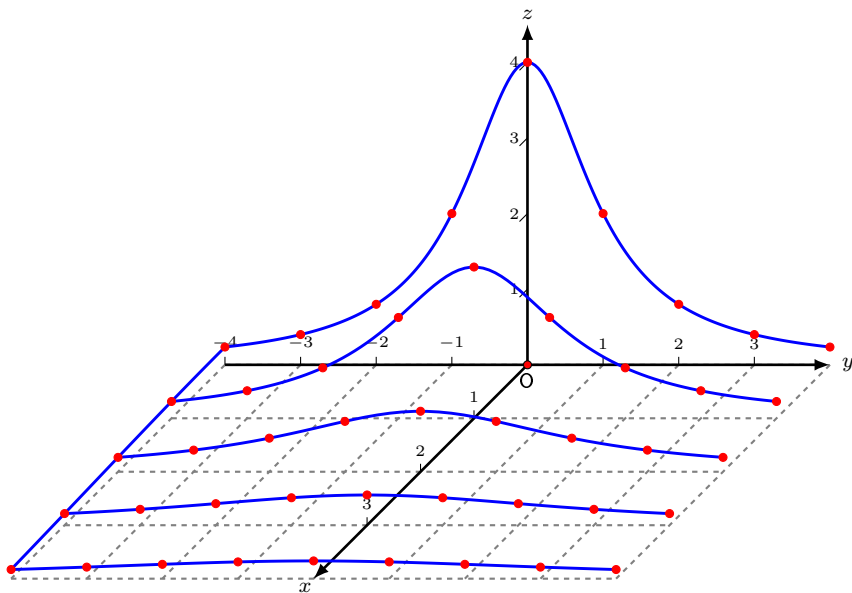
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(2, y)$	0,19	0,29	0,44	0,67	0,8	0,67	0,44	0,29	0,19



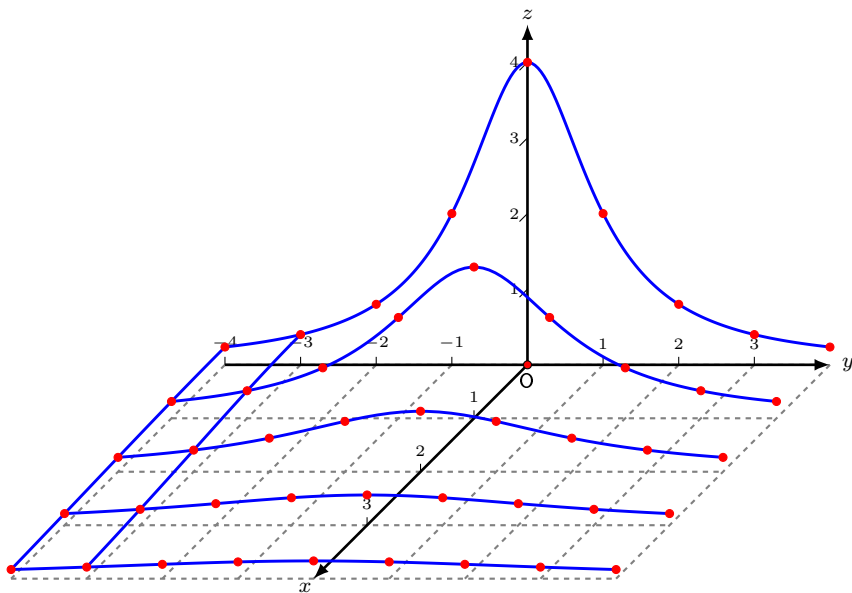
IV. Représentation graphique.



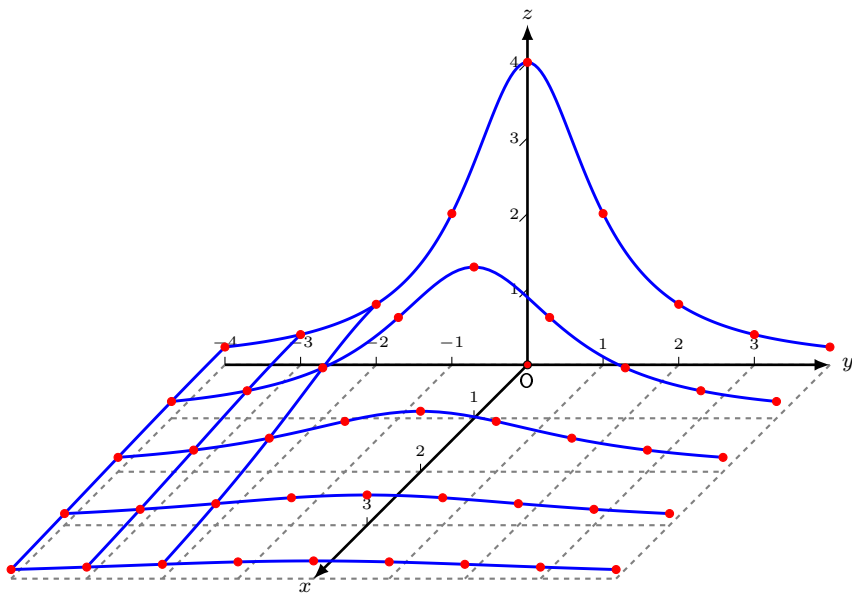
IV. Représentation graphique.



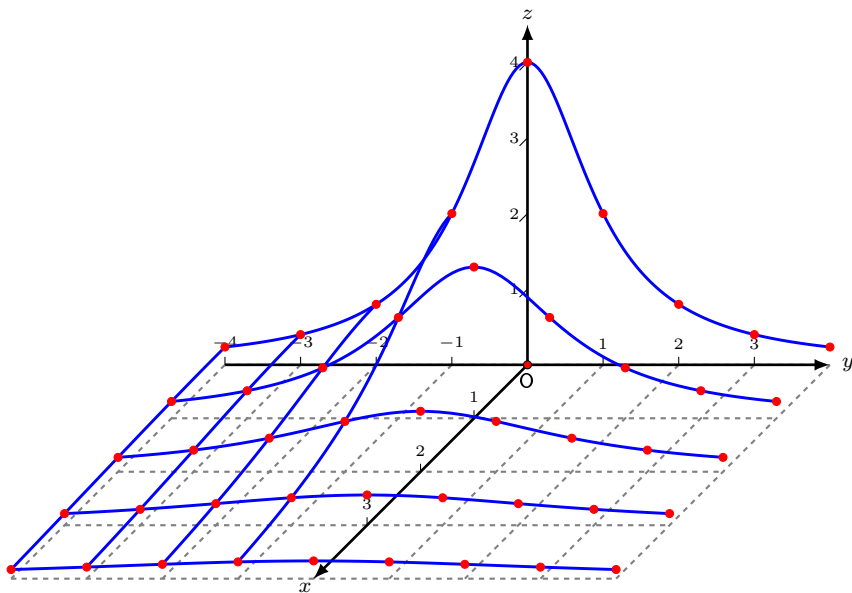
IV. Représentation graphique.



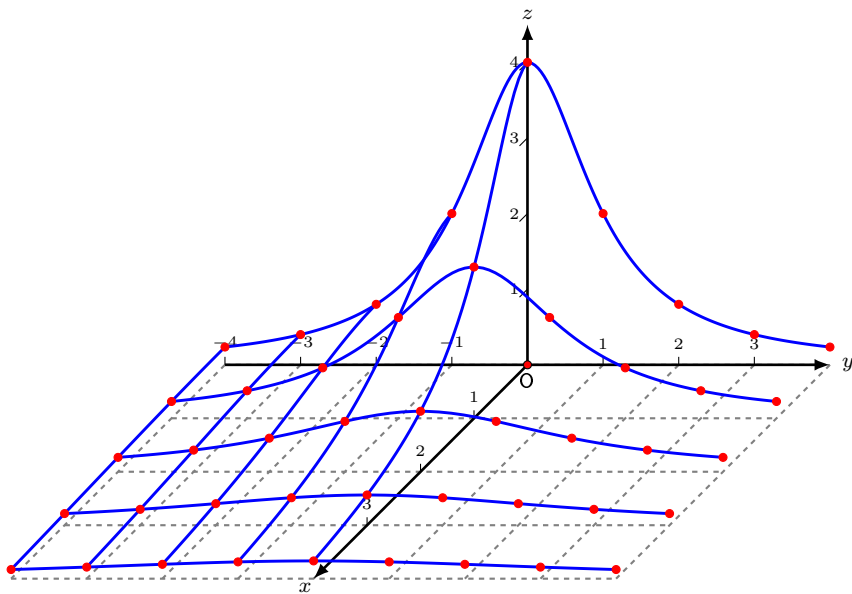
IV. Représentation graphique.



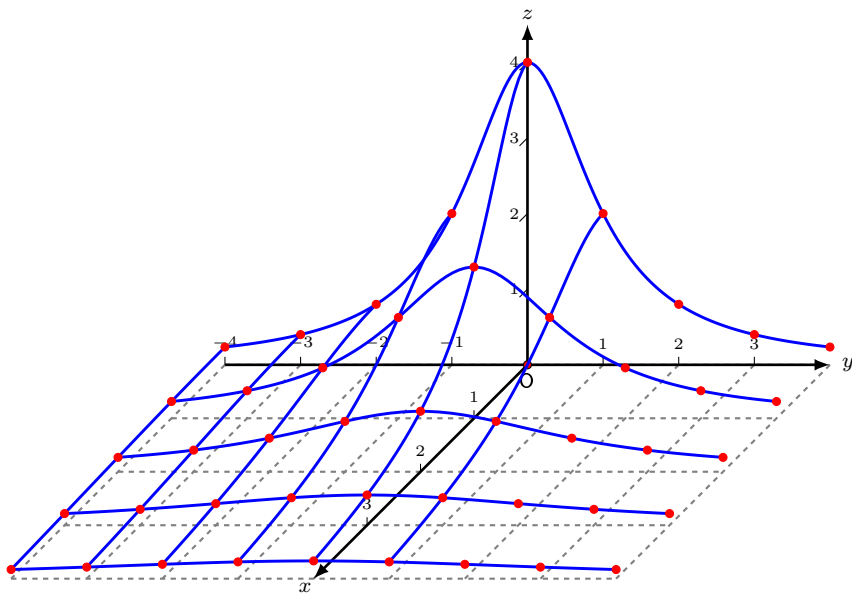
IV. Représentation graphique.



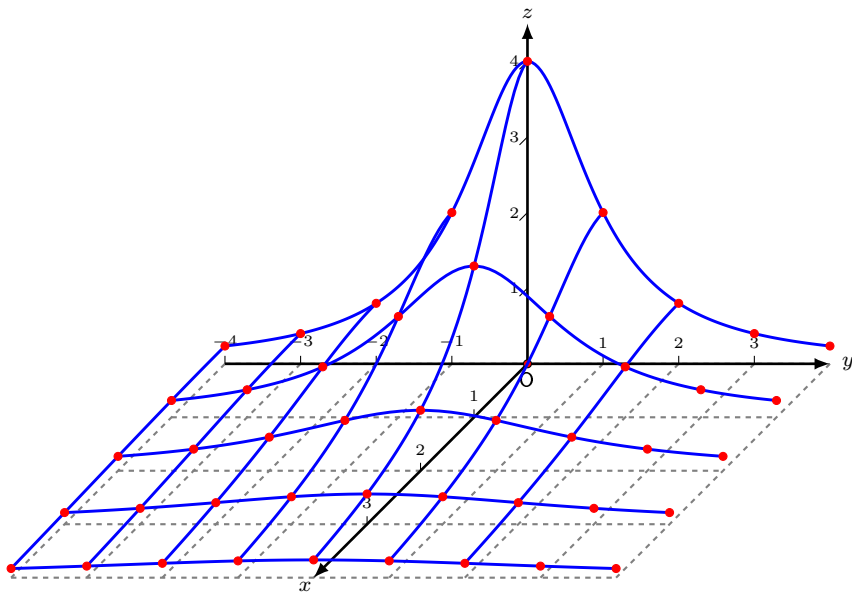
IV. Représentation graphique.



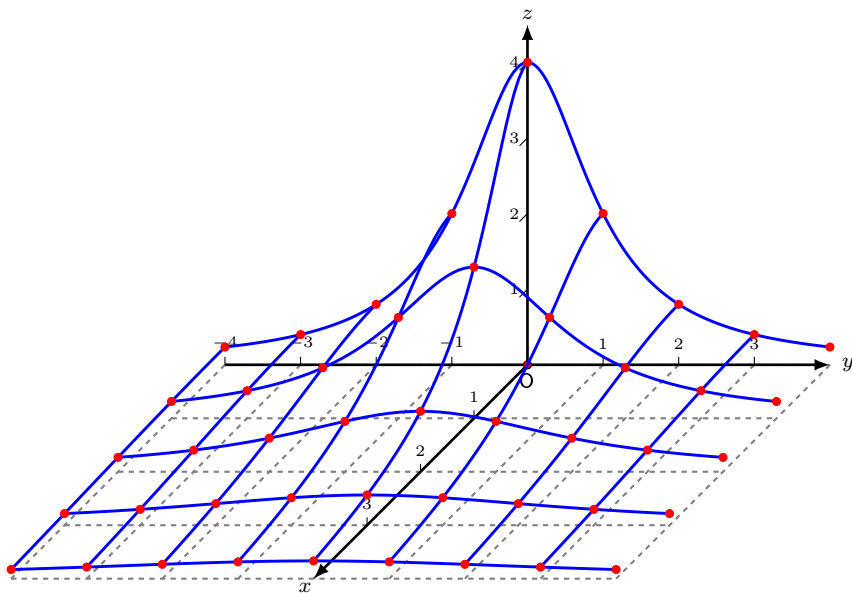
IV. Représentation graphique.



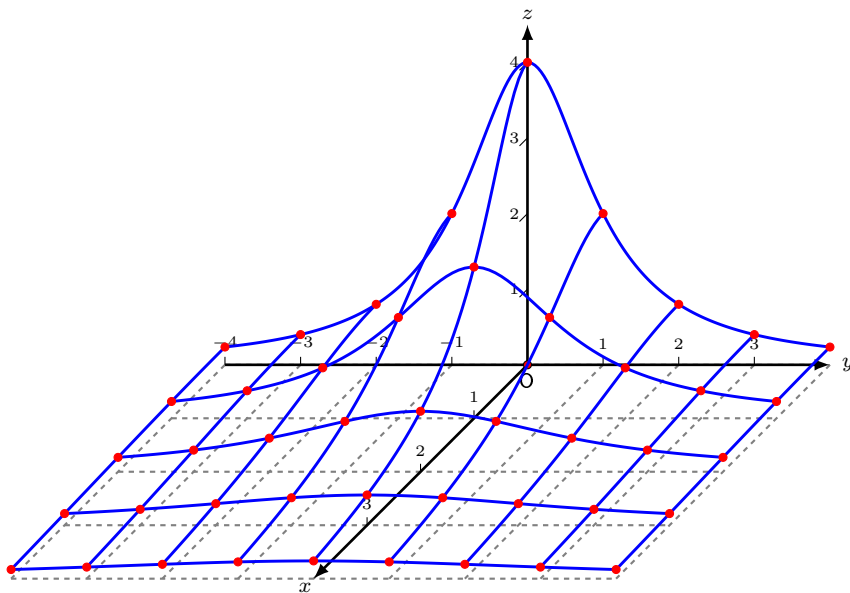
IV. Représentation graphique.



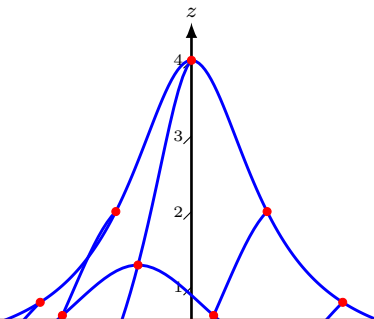
IV. Représentation graphique.



IV. Représentation graphique.

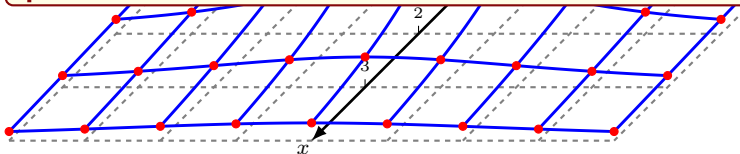


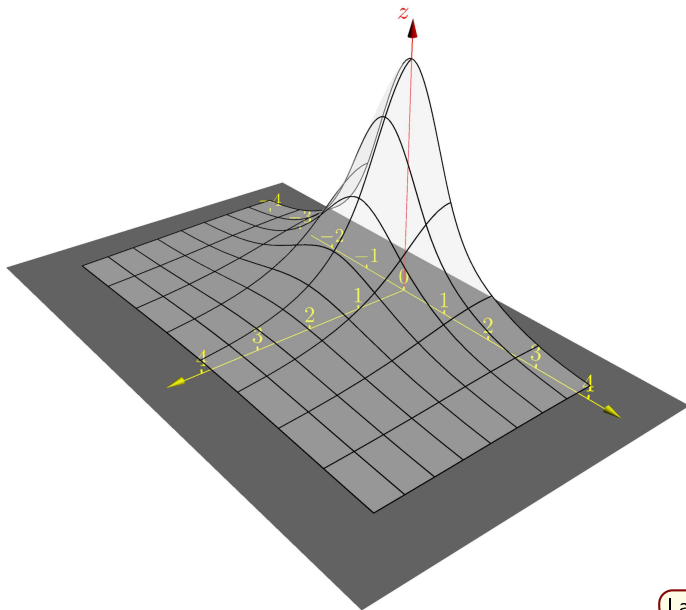
IV. Représentation graphique.



Définition:

Lorsque (x, y) parcourt le domaine de définition de f , l'ensemble des points de coordonnées $(x, y, f(x, y))$ forme une **surface**.





Lancer en 3D