

le cnam

2025 - 2026

Conditionnement



Variables aléatoires discrètes



Lois de probabilités discrètes

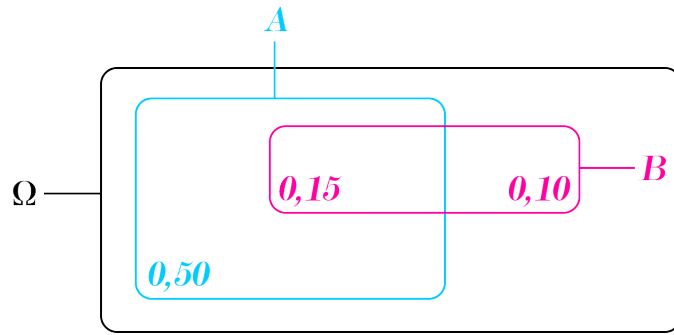


🌀 Fiche n° 3 🌀

I. Conditionnement.

1. Probabilités conditionnelles.

Dans un univers Ω on considère les deux évènements A et B suivants :



☞ $P(\Omega) = \dots$

☞ $P(\overline{B}) = \dots\dots\dots$

☞ $P(A) = \dots$

☞ $P(A \cap B) = \dots\dots$

☞ $P(\overline{A}) = \dots\dots\dots$

☞ $P(A \cup B) = \dots\dots\dots$

☞ $P(B) = \dots\dots\dots$

☞ $P(\overline{A \cup B}) = \dots\dots\dots$

Si l'évènement A est réalisé, alors la probabilité, que l'évènement B se réalise est $\text{---} = \dots$

Cette probabilité est notée $\dots\dots$, c'est la $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$



Définition:

Etant donnée deux évènements A et B , la probabilité de B $\dots\dots\dots$ A est ---

2. Indépendance.

Subjectivement, on pourrait dire que A est indépendant de B si $P_B(A) = \dots\dots$

Mais dans ce cas, $P_A(B)$ est-elle égale à $P(B)$?

$P_B(A) = P(A) \iff$

\iff

\iff

\iff



Définition:

Deux événements A et B sont si, et seulement si,

II. Variables aléatoires discrètes

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R , une boule verte V , et une boule bleue B . Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

	2 nd tirage	R	V	B
1 ^{er} tirage				
	R			
	V			
	B			

On est en situation d'équiprobabilité donc la probabilité d'avoir au moins une boule bleue est :

.....

Complétons l'énoncé :

- Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 6 €.
- Pour chaque boule verte tirée, on gagne 2 €.
- Pour chaque boule bleue tirée, on perd 8 €.

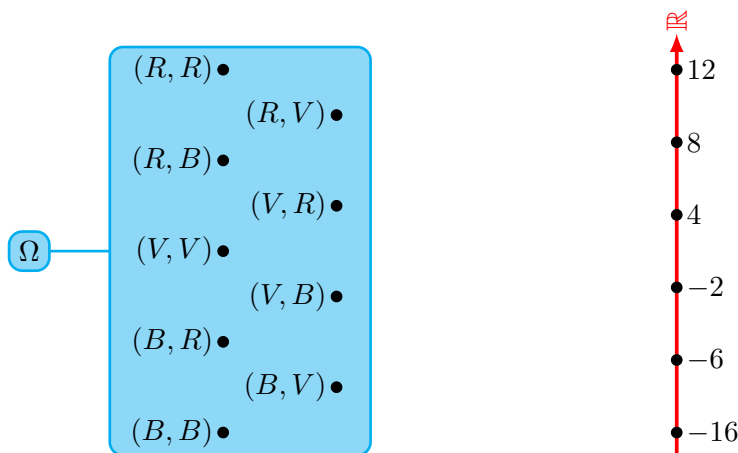
Notons G la variable aléatoire qui à un tirage de deux boules associe le gain du joueur :

$$G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(R, B) \mapsto \dots$$

Les valeurs prises par G sont $G(\Omega) = \{ \dots \}$

On a la situation suivante :



$$P(G = 8) = P(\{ \dots \}) =$$

L'espérance de la variable aléatoire G est :

☞ $E(G) = \dots\dots\dots$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois », la $\dots\dots\dots$ des gains est $\dots\dots\dots$. Autrement dit, ce jeu est $\dots\dots\dots$ sur un « grand nombre » de parties.

$E(G^2) = \dots\dots\dots$

☞ $V(G) = \dots\dots\dots$ et $\sigma_G = \dots\dots\dots$

Finalement, grande différence entre les statistiques descriptives et les probabilités, c'est que dans le premier cas, l'expérience aléatoire a déjà eu lieu.

- En statistique descriptive, on prélève un échantillon de 100 parties, on mesure la moyenne des gains.
- En probabilités, on « espère » une moyenne nulle.

En mélangeant, ces deux branches des mathématiques, on va estimer la moyenne des gains sur 100 parties, on fera alors des statistiques $\dots\dots\dots$.

III. Probabilités et statistiques.

Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers Ω tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$$

Probabilités	Statistiques
$E(X) = \sum_{i=1}^N x_i P(X = x_i)$	$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$
E est linéaire	La moyenne est linéaire
$V(X) = \sum_{i=1}^N (E(X) - x_i)^2 P(X = x_i)$ $= E[E(X) - X]$ $= E(X^2) - E(X)^2$	$V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2$ $= \overline{(x - \bar{x})^2}$ $= \overline{x^2} - \bar{x}^2$
$Cov(X, Y) = E[(E(X) - X)(E(Y) - Y)]$ $= E(XY) - E(X)E(Y)$	$Cov(x, y) = \overline{(\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)}$ $= \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$
$V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab Cov(X, Y)$	$V(ay + by) = a^2V(x) + b^2V(y) + 2ab Cov(x, y)$

Où $E(XY) = \sum_{i,j=1}^N x_i y_j P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$



Théorème

Si X et Y sont deux variables alors :

$E(XY) = \dots$; $Cov(X, Y) = \dots$; $V(X + Y) = \dots$

Exemple n° 1 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

$X \backslash Y$	-1	0	1	Total
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
Total				

$P((X = -1) \cap (Y = 0)) =$

$P((X = 1) \cap (Y = 1)) =$

$P(X = 1) =$

$P(Y = -1) =$

$P(Y = 1) =$

$P(X = -1) =$

$P(X = 0) =$

$P(Y = 0) =$

$P((X = -1) \cup (X = 0) \cup (X = 1)) =$

$P(X = 1) \times P(Y = 1) = \dots$ et donc, $P((X = 1) \cap (Y = 1)) \dots P(X = 1) \times P(Y = 1)$

Il s'ensuit que les variables aléatoires X et Y

$E(X) = \dots$ et $E(Y) = \dots$

$E(XY) = \dots$

$= \dots$

$\Rightarrow Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \dots$



Une covariance nulle l'indépendance.

IV. Lois de probabilités discrètes.

1. Combinaisons



Définition:

Le nombre de façons de choisir p objets parmi n sans tenir compte de l'ordre est appelé la de p parmi n et est notée $\binom{n}{p}$.

Exercice n° 1: Complète :

$$\begin{array}{l} \bullet \binom{3}{0} = \\ \bullet \binom{4}{0} = \\ \bullet \binom{12}{1} = \end{array} \left| \begin{array}{l} \bullet \binom{8}{2} = \\ \bullet \binom{9}{2} = \\ \bullet \binom{2}{2} = \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \bullet \binom{9}{3} = \\ \bullet \binom{5}{3} = \\ \bullet \binom{3}{3} = \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \bullet \binom{9}{4} = \\ \bullet \binom{5}{4} = \\ \bullet \binom{4}{4} = \end{array} \right.$$

2. Loi de Bernoulli

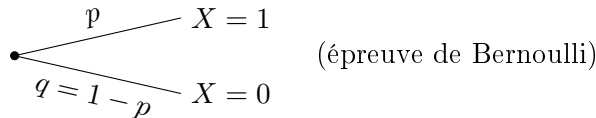
Soit A un événement d'un univers Ω .

Soit X la variable aléatoire :

$$X: \Omega \longrightarrow \{0; 1\}$$

$$\omega \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon } (\omega \in \bar{A}) \end{cases}$$

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ où $p = P(A) = P(X = 1)$:

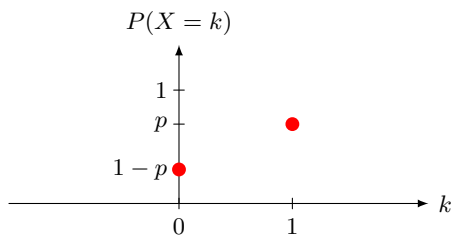


$E(X) = \dots\dots\dots$

$E(X^2) = \dots\dots\dots$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dots\dots\dots$ donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \dots$

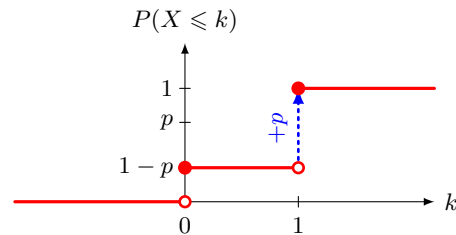
Loi de X



$P(X = -1) = \dots$; $P(X = 0) = \dots$

$P(X = 0, 4) = \dots$; $P(X = 1, 3) = \dots$

Fonction de répartition F_X



$F_X(-1) = \dots\dots\dots$

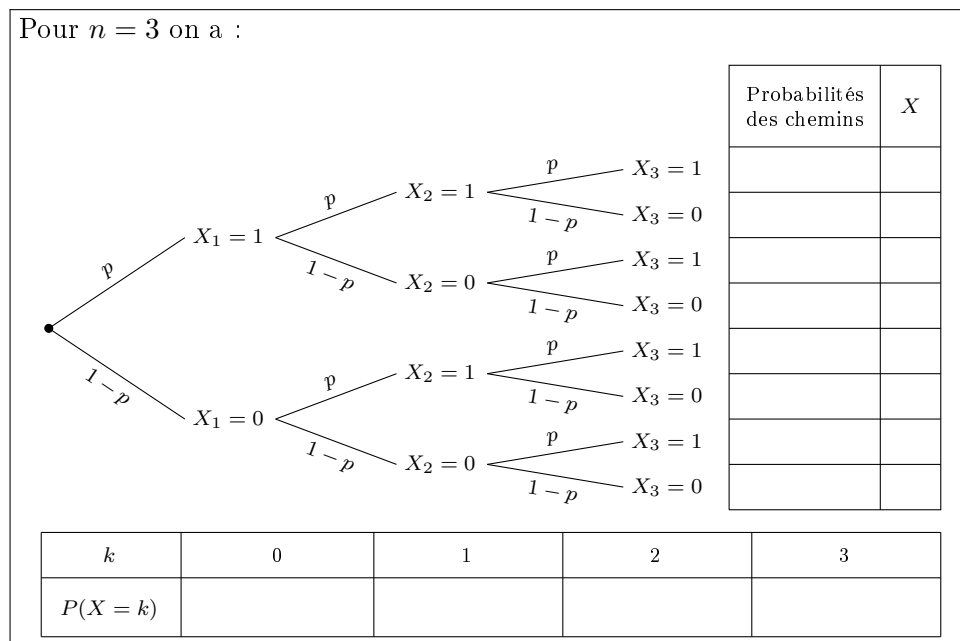
$F_X(0, 3) = \dots\dots\dots$

$F_X(1, 3) = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

3. Loi binomiale

On répète successivement épreuves de Bernoulli où l'on note à chaque fois la réalisation ou pas d'un événement A , de probabilité $p = P(A)$. A chaque épreuve de Bernoulli, on associe la variable aléatoire X_i , et on pose $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$



On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

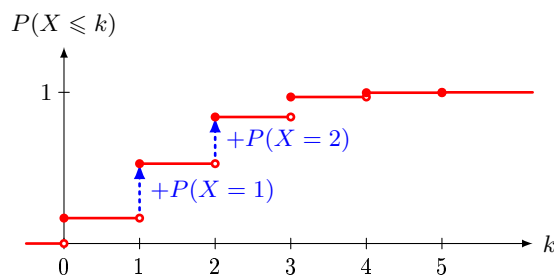
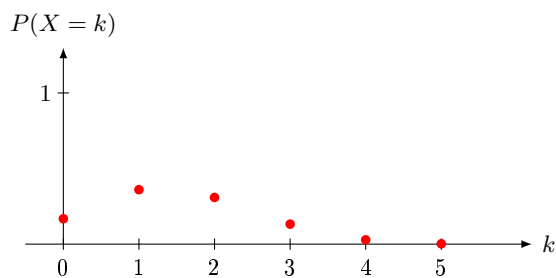
$$P(X = k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\text{nb de façons de} \\ \text{réaliser } k \text{ événements } A \\ \text{parmi } n \text{ épreuves.}}} \times p^k (1-p)^{n-k}$$

$E(X) =$

$V(X) =$ car les X_i sont donc $\sigma(X) =$

Loi de X où $X \sim \mathcal{B}(5; 0,3)$

Fonction de répartition F_X



$P(X = 2) =$
 $=$

$F_X(2, 7) =$
 $=$

Exercice n° 2: Dans le cadre de la construction d'un pont en béton armé, une entreprise de génie civil reçoit un lot important de 2000 barres d'acier haute adhérence (HA 16). Le fournisseur atteste que son processus de

fabrication est hautement maîtrisé, avec un taux de barres défectueuses (présentant une résistance à la traction inférieure au seuil réglementaire) de seulement 2%.

Pour valider la livraison sans tester les 2 000 barres (ce qui serait trop long et destructeur), l'ingénieur contrôle qualité décide de prélever un échantillon aléatoire de $n = 50$ barres. On admet que le lot est suffisamment grand pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.

L'ingénieur fixe la règle d'acceptation suivante : Le lot complet est accepté si l'échantillon contient au plus 2 barres défectueuses. Si l'échantillon en contient 3 ou plus, le lot est refusé et renvoyé au fournisseur.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de barres défectueuses trouvées dans l'échantillon de 50 barres.

1. Justifie que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et précise ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité de trouver exactement 0 barre défectueuse dans l'échantillon ?
3. Calcule la probabilité que le lot soit accepté par l'ingénieur sachant que le fournisseur dit vrai ($p = 0,02$).
4. Quelle est la probabilité qu'il refuse à tort un lot conforme au contrat ?
5. **Analyse critique** : Le fournisseur livre en réalité un "mauvais" lot qui contient en fait 8% de barres défectueuses. Quelle est la probabilité que l'ingénieur accepte quand même ce lot par erreur ? (Ce risque est appelé le risque client ou Risque de seconde espèce β).