le cnam

2025 - 2026

Variables aléatoires continues

* * *

Loi de probabilités

* * *

Fiche n° 4

I. Les lois continues.

1. Densité de probabilités.

Définition:

Une fonction f est une .... ou une distribution de probabilité si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

$$f \text{ est positive et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Définition:

On dit qu'une variable aléatoire X a pour densité ou .... de probabilité la fonction f, si pour tous nombres réels a et b tels que $a \leqslant b$:

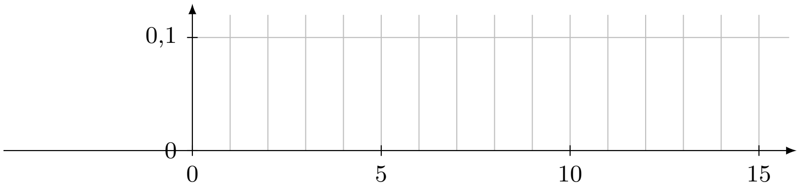
$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

On dit alors que la variable aléatoire X est ....

Exemple n° 1 : Soit X la variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 10]$.

On note ....

1. Sa densité de probabilité est définie par $f(x) = \begin{cases} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ & \text{sinon.} \end{cases}$

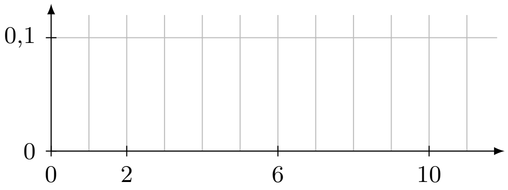


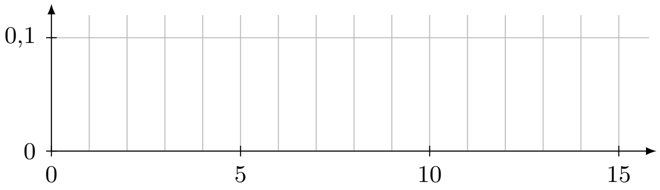
On vérifie que cette fonction est bien une densité de probabilité car :

- ....
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x =$ ....

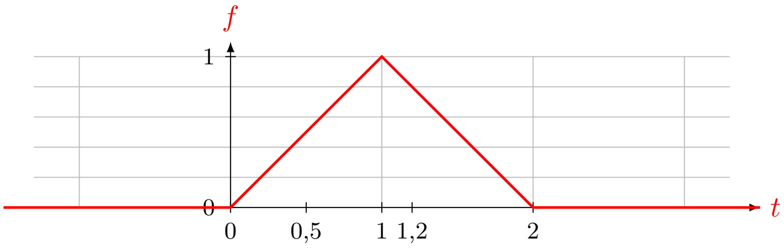
2. Les probabilités correspondent à des aires sous la courbe représentant sa densité f :

- $P(2 \leqslant X \leqslant 6) =$ ....
- $P(5 \leqslant X \leqslant 15) =$ ....





Exemple n° 2 : La variable aléatoire T suit la loi triangulaire ayant la densité f suivante :



$$f(t) = \begin{cases} & \text{si } t < 0, \\ & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ & \text{si } t > 2. \end{cases}$$

1. La fonction f est bien une densité de probabilité car :

- ....
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t =$ ....

2. Calcule à l'aide d'une intégrale :

$P(0{,}5 \leqslant T \leqslant 1{,}2) =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

3. Calcule à l'aide d'une intégrale $P(T = 0{,}6) =$ ....

4. Compare $P(T \leqslant 0{,}6)$ et $P(T < 0{,}6)$

....

Propriété

la probabilité d'un point isolé est nulle pour une variable continue. Donc, si T est une variable aléatoire continue, alors pour tout réel a,

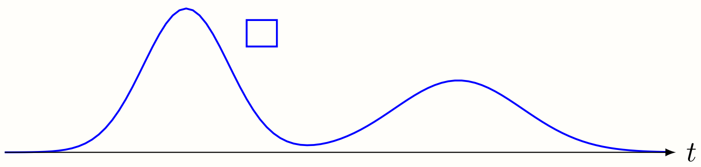
$P(T = a) =$ ... , $P(T < a) =$ .... , et $P(T > a) =$ ....

2. Fonction de répartition.

Définition:

Etant donnée un variable aléatoire X de densité continue f, on appelle fonction de .... la fonction

F définie par $F_X(x) =$ ....



Exemple n° 3 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([0, 10]\big)$.

1. Déterminons la fonction de répartition de la variable aléatoire X : $F_X(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   On distingue alors trois situations :

   - **Cas 1 :** $x < 0$. La densité est nulle sur $]-\infty, x]$, donc $F_X(x) =$ ....

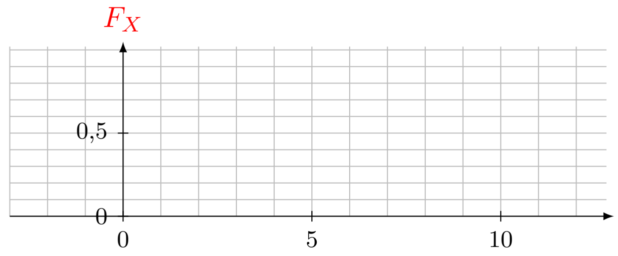
- **Cas 2 :** $0 \leqslant x \leqslant 10$. La densité est égale à 0,1 sur $[0, x]$,

  donc $F_X(x) =$ ....

- **Cas 3 :** $x > 10$. Toute la masse de probabilité est déjà accumulée :

  $F_X(x) =$ ....

$$\text{Finalement, } F_X(x) = \begin{cases} & \text{si } x < 0, \\ & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 10, \\ & \text{si } x > 10. \end{cases}$$



2. En utilisant la fonction de répartition, calcule :

   - $P(2 \leqslant X \leqslant 6) =$ ....

     $=$ ....

   - $P(5 \leqslant X \leqslant 15) =$ ....

Théorème

Si la densité est une fonction continue sauf sur un nombre fini de points de $\mathbb{R}$, alors :

- sa fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être où la densité n'était pas continue.
- $\dfrac{dF_X}{dx}(x) =$ ....

Ce théorème est rassurant, il montre que même si une densité est "brutale" ou présente des sauts (des discontinuités), la fonction de répartition, elle, lisse les choses grâce à l'intégration : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$

Exemple n° 4 : Reprenons $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([0, 10]\big)$, on a vu que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 0{,}1x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 10, \\ 1 & \text{si } x > 10. \end{cases} \quad \text{donc } f_X(x) = \;........\; = \begin{cases} & \text{si } x < 0, \\ & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 10, \\ & \text{si } x > 10. \end{cases}$$

3. L'espérance.

Définition:

L' .... d'une variable aléatoire continue X, notée $E\big(X\big)$ est $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}$ ....

Remarque : Si l'intégrale ne converge pas, alors la variable aléatoire n'a pas d'espérance.

Propriété

- **Linéarité de l'intégrale :** Pour toutes constantes a et b, $E(aX+b) =$ ……….
- **Théorème de transfert :** Si on cherche l'espérance d'une fonction de la variable X, notée $g(X)$:

$$E\big(g(X)\big) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple n° 5 : Calcule l'espérance de la variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([0,10]\big)$.

$E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x =$ ……………………………………………………………………………

4. La variance.

Définition:

Soit X une variable aléatoire continue admettant une espérance $E(X)$. La variance de X, notée $V(X)$, est définie par : $V(X) = E\left[(X-E(X))^2\right] =$ ……………………………………

Dans la pratique, on utilise presque toujours la formule de Koenig-Huygens, beaucoup plus simple pour les calculs :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Où, d'après le théorème de transfert : $E(X^2) =$ …………………………

Pour revenir aux unités du problème, on a l'écart-type : $\sigma_X =$ ……………….

Exercice n° 1: On considère une variable aléatoire T suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0,2]$:

$$T \hookrightarrow \mathcal{U}\big([0,2]\big)$$

1. Quelle est la densité de T ?
2. Calcule l'espérance de la variable aléatoire T.
3. Calcule sa variance puis son écart-type.

II. Loi exponentielle.

Définition:

Soit λ un nombre réel ………………………… On dit qu'un variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée ….. , si sa densité de probabilité est : $f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Définition:
Pour signifier qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, on écrit …………

On calcule l'espérance en intégrant par parties : $\begin{cases} u'(x) = \\ v(x) = \end{cases}$ $\begin{cases} u(x) = \\ v'(x) = \end{cases}$

$E(X) =$ ………………………………………………………………………………

$E(X) =$ ………………………………………………………………………………

On calcule de même en intégrant par parties : $\begin{cases} u(x) = \\ v'(x) = \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = \\ v(x) = \end{cases}$

$E(X^2) =$ ………………………………………………………………………………

D'où $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$ ……………………………………………………………

Théorème
Si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors :

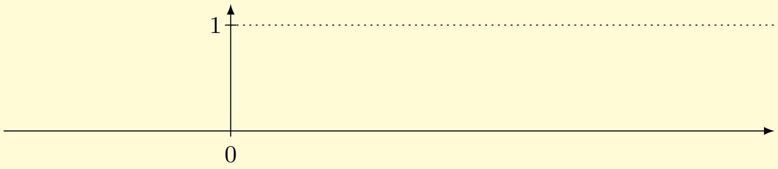
$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Pour $x \geqslant 0$, la fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \text{……………………………………}$$

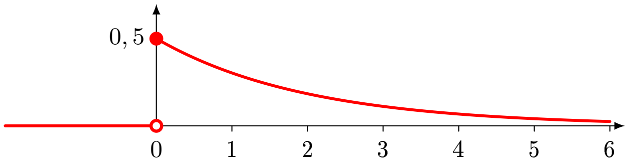
Théorème
La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

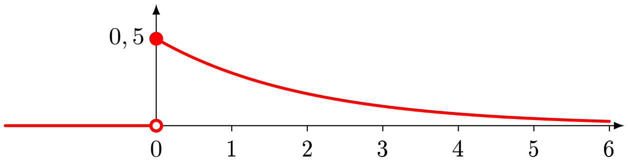


Exemple n° 6 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$, calcule à 10^{-3} près.

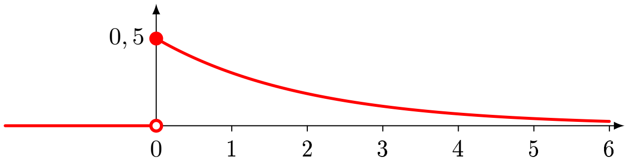
- $P(T=2) =$ ....



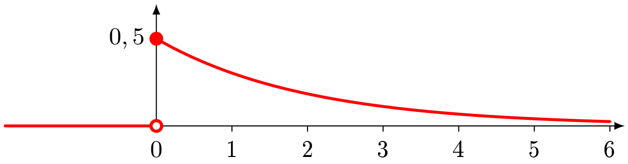
- $P(T \leqslant 2) =$ ....



- $P(2 \leqslant T \leqslant 4) =$ ....



- $P(T \geqslant 2) =$ ....



Théorème

La loi exponentielle est l'unique loi continue .... : Si X suit une loi exponentielle :

$$\text{pour tout } t>0 \text{ et tout } h>0,\ P_{(X\geqslant t)}(X \geqslant t+s) = P(X \geqslant s)$$

Remarque : Si la durée de votre survie, en années, suivait une loi exponentielle, alors, que vous ayez vécu $t=4$ ans ou $t=80$ ans, votre probabilité de vivre encore $s=20$ ans serait la même.

Exemple n° 7 : Une crue centennale signifie que, statistiquement, ce type de crue a une période de retour moyenne (T) de 100 ans. On note T la durée qui nous sépare de la prochaine crue.

1. Pour quelle raison modélise-t-on ce genre de crue par une loi exponentielle ?

   ....

2. Détermine le paramètre de la loi exponentielle d'une crue centennale.

   ....

3. Quelle est la probabilité qu'une crue se produise au cours des 10 prochaines années.

   ....

   ....

   ....

Exercice n° 2: Dans le cadre de l'élargissement d'une autoroute périurbaine, la société d'autoroute souhaite dimensionner une nouvelle barrière de péage automatique. Les études de trafic montrent que lors de l'heure de pointe du matin, le flux de véhicules est fluide et continu, avec un débit moyen de 720 véhicules par heure qui se présentent à la barrière.

On admet que l'arrivée des véhicules entre l'arrivée de deux véhicules successifs suit une loi exponentielle, où son paramètre λ est le taux moyen d'arrivée des véhicules par seconde. On note X la variable aléatoire suivant cette loi.

Une cabine de péage automatique met un temps fixe de 15 secondes pour traiter un véhicule (lecture du badge de télépéage ou paiement sans contact + ouverture/fermeture de la barrière).

Les pourcentages seront arrondis au centième de pour cent près.

1. Détermine le paramètre λ de cette loi exponentielle.
2. Que signifie l'espérance de X ?
3. Quelle est la probabilité que le temps séparant l'arrivée de deux véhicules soit inférieur à 3 secondes ?
4. Combien de véhicules une seule cabine de péage peut-elle traiter au maximum en une heure ?
5. **Dimensionnement et règle de sécurité :** On considère qu'une cabine est en situation de "micro-surcharge" si un second véhicule se présente moins de 15 secondes après le précédent (car la cabine est encore occupée à traiter le premier).
   (a) De combien de cabines la barrière doit-elle disposer au minimum pour absorber le flux de l'heure de pointe sans créer un embouteillage qui grandit à l'infini ?
   (b) Quelle est la probabilité d'une micro surcharge avec n cabines ?
   (c) Quelle est la probabilité d'une micro surcharge avec 3 cabines ?
   (d) Détermine le nombre minimal de cabines n à ouvrir pour que cette probabilité passe en dessous de 1%.

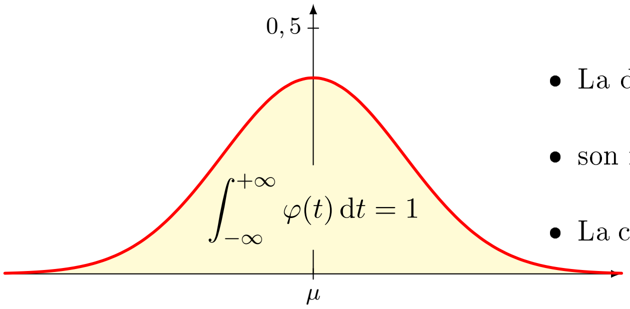
III. La loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Définition:

On appelle densité de probabilité de .... , la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

où μ et σ sont deux paramètres de cette loi.



- La densité φ est symétrique par rapport à la droite .... ;
- son maximum .... est atteint en .... ;
- La courbe $\mathcal{C}_\varphi$ est appelée courbe en cloche ou **courbe de Gauss**.

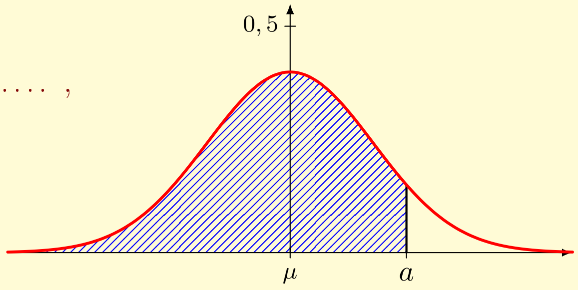
Définition:

Pour signifier qu'une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, on écrit ....

Rappel:

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}\big(\mu\,;\,\sigma\big)$, alors : sa fonction de .... , notée .... , est définie par

$$F_X = P(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^{a} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$



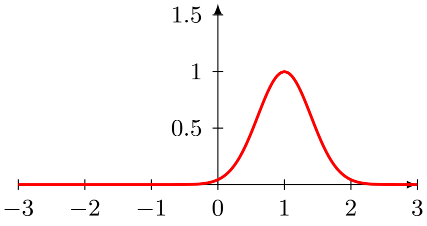
Propriété

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\big(\mu\,;\,\sigma\big)$, alors

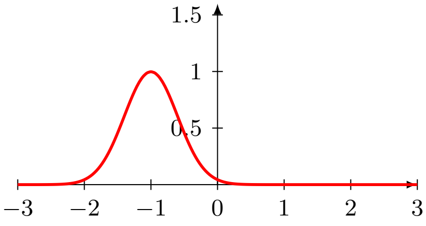
$$E(X) = \quad .... \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \quad ....$$

Autrement dit, les paramètres d'une loi normale sont en fait son espérance mathématique et son écart-type.

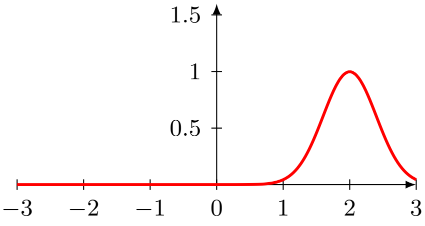
Complète les valeurs de μ et σ sachant que $\sigma \in \big\{0{,}2\,;\,0{,}3\,;\,0{,}4\,;\,0{,}8\big\}$:



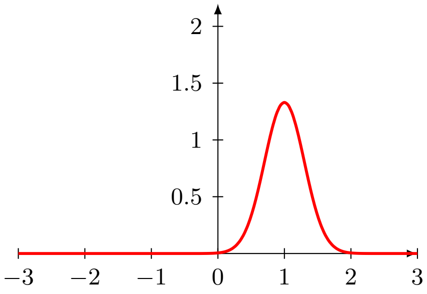
$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$



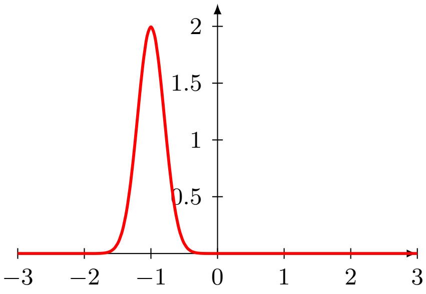
$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$



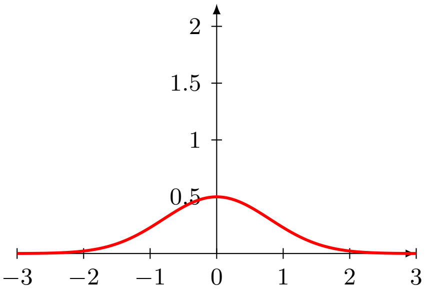
$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$



$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$



$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$



$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$

Remarque : On observe que :

- la courbe admet comme .... la droite d'équation $x = \mu$,
- le maximum de la courbe est atteint en μ, espérance de la variable X (ce maximum valant $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$),
- plus σ est grand, plus la courbe « .... » autour de la moyenne, en accord avec la signification de l'écart-type.

1. Calculs d'une probabilité pour une loi normale

MÉTHODE PRATIQUES

La fonction LOI.NORMALE avec un 4^{me} paramètre .... donne la fonction de répartition. Par exemple, si la moyenne et l'écart-type sont dans des cellules nommées respectivement μ et sigma :

- $P(X \leq 160) =$ LOI.NORMALE(160; μ ; ... ; ....) où $X \hookrightarrow N(\mu\,;\,\sigma)$
- $P(120 \leqslant X \leqslant 180) =$ LOI.NORMALE(...;...;...;$VRAI$) − LOI.NORMALE(...;...;...;$VRAI$)

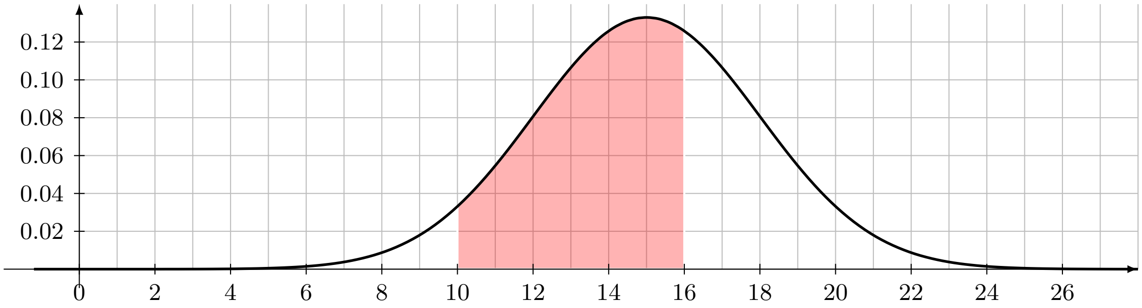
REMARQUES : On peut remplacer « VRAI » par 1. Sur Excel LOI.NORMALE est dépréciée, et progressivement remplacée par

Exercice n° 3: On considère la variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{N}(15,3)$.

- Son espérance est : $\mu =$ .....
- Son écart-type est : $\sigma =$ .....
- Sa densité de probabilité est :

$f(x) =$ ....

Voici la courbe représentative de la densité f.



L'aire coloriée est égale à la probabilité .... = ...

Calcule au millième près les probabilités suivantes :

1. $P(X \leqslant 12) =$ = ...
2. $P(X \leqslant 20) =$ = ...
3. $P(X \leqslant 23) =$ = ...
4. $P(X < 20) =$ ....
5. $P(X \geqslant 20) =$ ....

6. $P(X > 14) = \boxed{} = \ldots\ldots\ldots$
7. $P(8 \leqslant X \leqslant 12) = \boxed{}$
   $= \ldots\ldots\ldots$
8. $P(16 \leqslant X \leqslant 22) = \boxed{}$
   $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

En utilisant la symétrie de la densité de f complète sans utiliser le tableur :

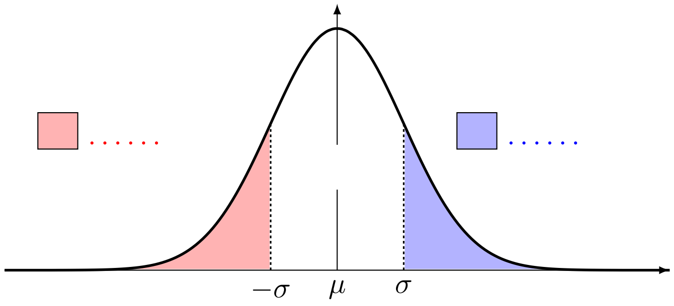
1. $P(X \leqslant 15) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $P(X > 18) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $P(X \geqslant 12) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. $P(18 \leqslant X \leqslant 22) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

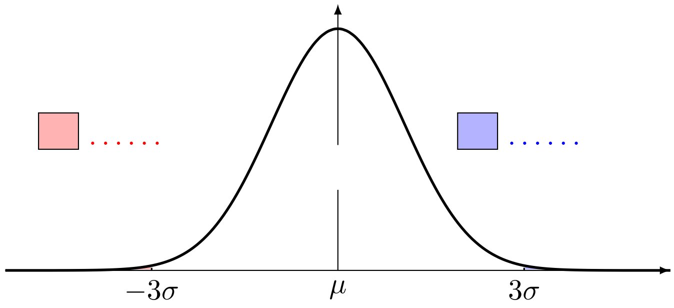
PROBABILITÉS À CONNAÎTRE

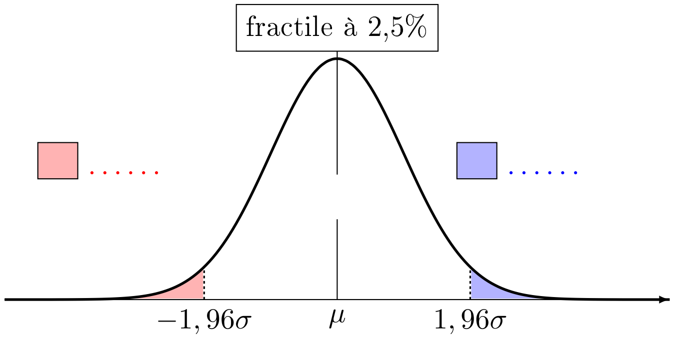
Certaines probabilités de références sont très utiles à connaître car très récurrentes dans les exercices et/ou les cas concrets qu'on sera amené à étudier.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu;\sigma)$ alors :

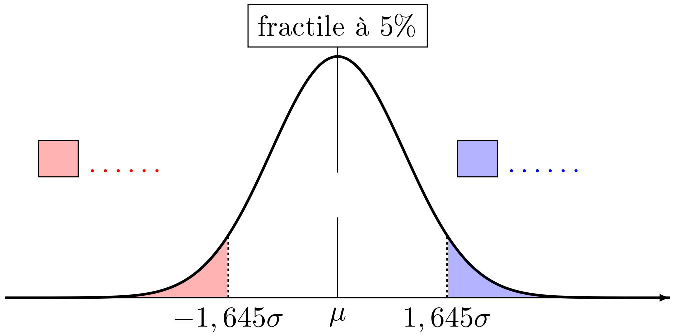
- $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \simeq \ \ldots\ldots\ldots$
- $P(\mu - 1,96\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 1,96\sigma) \simeq \ \ldots\ldots\ldots$
- $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \simeq \ \ldots\ldots\ldots$

L'intervalle .... est appelé ....

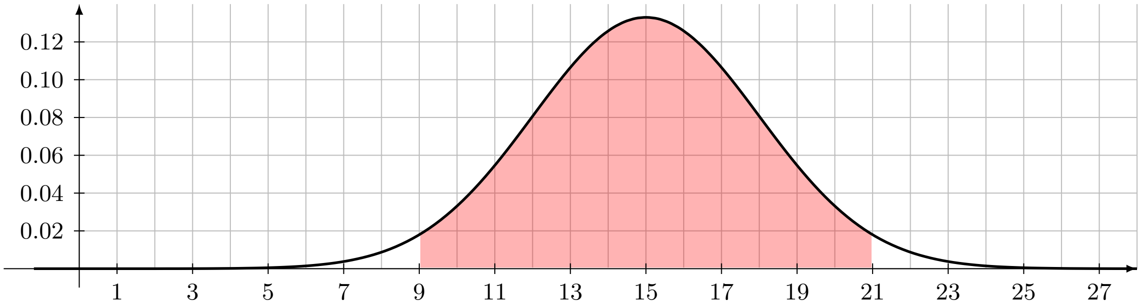








Exemple n° 8 : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(15;3)$:



L'aire coloriée est à peu près égale à ....

Exemple n° 9 : Lors des épisodes orageux, l'eau de pluie qui s'écoule sur le tablier d'un grand pont autoroutier est collectée et envoyée vers un bassin de rétention. Pour éviter que ce bassin ne déborde et n'inonde les voies en contrebas, une station de pompage est installée afin d'évacuer l'eau vers le réseau de la ville.

La station est équipée d'une pompe principale automatique qui possède un débit d'évacuation maximal fixe de $Q_{max} = 150$ Litres/seconde (L/s).

Les données historiques de la région montrent que lors des orages d'été, le débit maximal de pointe de l'eau arrivant dans le bassin (noté Q) suit une loi normale de moyenne $\mu = 120$ L/s et d'écart-type $\sigma = 19$ L/s.

1. **Risque de débordement :** Quelle est la probabilité exacte (calculée par tableur) que le débit de l'orage dépasse la capacité maximale de la pompe, provoquant ainsi un début d'inondation de la station ?

   ....

2. Que penses-tu de ce résultat ?

   ....

   ....

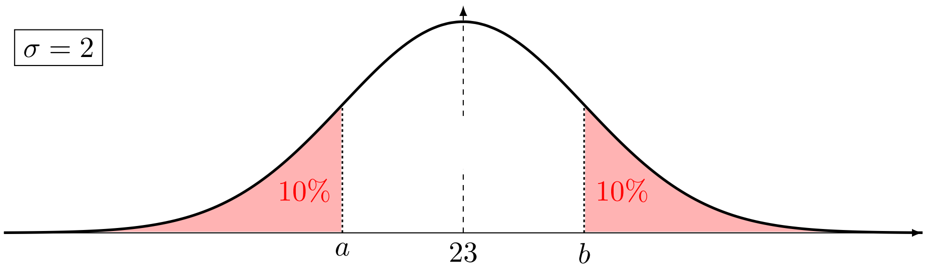
   ....

3. **Fonctionnement nominal :** Les ingénieurs considèrent que la pompe fonctionne dans sa zone de confort "nominale" lorsque le débit d'eau entrant est compris entre 100 L/s et 140 L/s. Quelle est la probabilité exacte que le débit d'un orage se situe dans cette zone de confort ?

   ....

   ....

2. Inverser une loi normale.



On trouve $a = \boxed{} \simeq$ ....

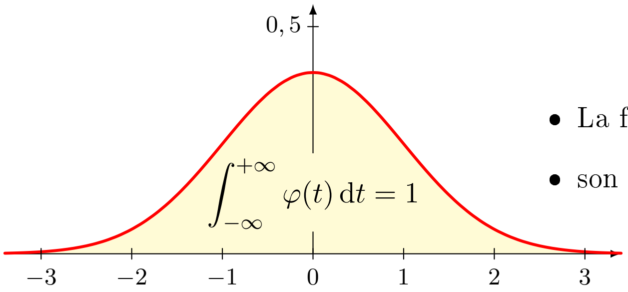
On trouve $b = \boxed{} \simeq$ ....

3. Recentrer et réduire une loi normale.

Définition:

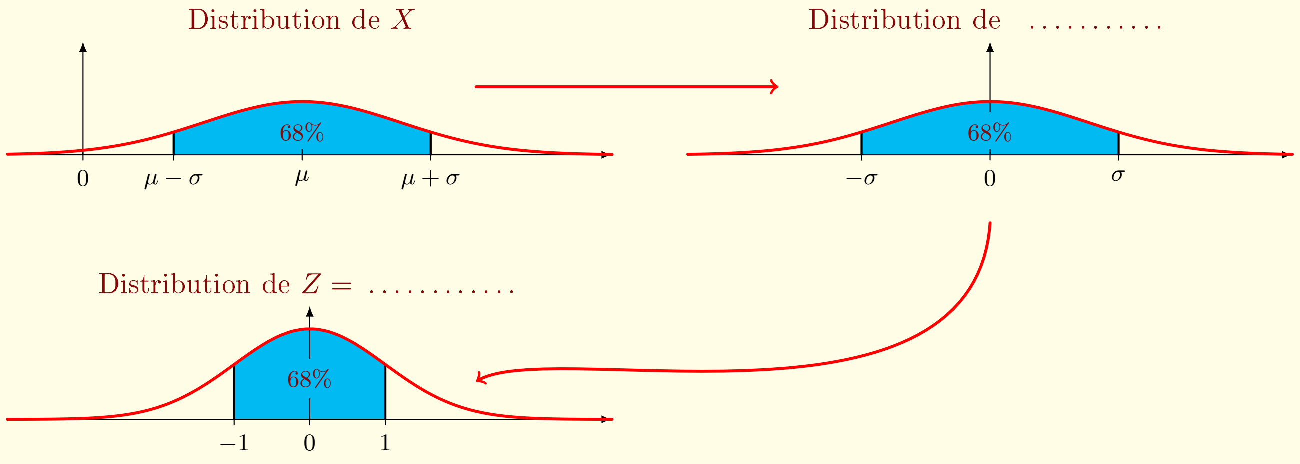
On appelle loi normal .... , la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Sa densité de probabilité est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(t) = \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$



- La fonction φ est .... ;
- son maximum est atteint en ... ;

Etant donné une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$:



Théorème

Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\,\sigma)$, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.

Exercice n° 4: Pour la construction des poteaux d'un viaduc en béton armé, le cahier des charges impose l'utilisation d'un béton de classe C30/37. Cela signifie que la résistance à la compression caractéristique requise à 28 jours est $f_{ck} = 30$ MPa.

Pour vérifier la conformité du béton livré sur le chantier, le laboratoire de contrôle réalise des essais de rupture par compression sur des éprouvettes cylindriques. On admet que la résistance à la compression X (en MPa) des éprouvettes suit une loi normale de moyenne $\mu = 38$ MPa et d'écart-type $\sigma = 4$ MPa : $X \hookrightarrow \mathcal{N}\big(38\,;\,4\big)$

1. **Probabilité de non-conformité individuelle :** Quelle est la probabilité qu'une éprouvette prélevée au hasard présente une résistance inférieure aux 30 MPa réglementaires ?

2. **Optimisation de la production :** l'Eurocode 2 stipule que le béton est conforme si au moins 95% des résultats de résistance sont supérieurs à la valeur caractéristique f_{ck} (le fractile à 5%). Le béton produit ici ($\mu = 38$ MPa, $\sigma = 4$ MPa) respecte-t-il ce critère ?

3. **Réduction des coûts :** l'entreprise de béton souhaite modifier sa recette pour économiser du ciment (ce qui fera baisser la moyenne μ), tout en conservant le même écart-type ($\sigma = 4$ MPa). Quelle est la valeur minimale de la moyenne μ_{min} pour que le béton reste tout juste conforme à la règle des 95% de l'Eurocode ?

Exercice n° 5: Avant de construire un immeuble de bureaux, un ingénieur géotechnicien réalise des essais au pénétromètre pour mesurer la pression limite du sol (q_l), qui représente la charge maximale que le sol peut supporter avant de rompre.

Le sol étant par nature hétérogène, les mesures de q_l (exprimées en MPa) varient d'un point à un autre de la parcelle. Les résultats montrent que q_l suit une loi normale de moyenne $\mu = 1,8$ MPa et d'écart-type $\sigma = 0,3$ MPa. Le bureau d'études internes a calculé que les poteaux du bâtiment transmettront au sol une pression réelle de $1,2$ MPa.

1. **Calcul du risque de rupture :** quelle est la probabilité que, par pur hasard géologique, les fondations soient posées sur une zone de sol dont la portance réelle est inférieure à la pression exercée par le bâtiment ($1,4$ MPa) ?

2. **Détermination de la valeur de calcul :** La "valeur caractéristique" du sol, notée $q_{l,k}$, correspond au fractile à 5% (5% de chances que le sol soit moins résistant). Calculer $q_{l,k}$

3. **Application du coefficient de sécurité :** Pour parer aux incertitudes, la norme impose d'appliquer un coefficient de sécurité partiel $\gamma_R = 1,4$ sur cette valeur caractéristique pour obtenir la pression admissible nette :
$$q_{adm} = \frac{q_{l,k}}{\gamma_R}$$
Le bâtiment peut-il être construit en toute sécurité sur ce sol avec cette pression de $1,4$ MPa ?

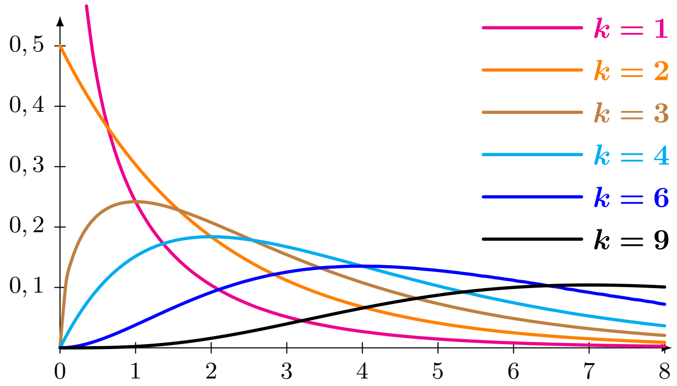
IV. Loi du χ^2

Définition:

Soient k variables aléatoires indépendantes X_i suivant une loi normale d'espérance μ_i et écart-type σ_i. Par définition la variable aléatoire

$$Y = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$$

suit une loi du χ^2 à k degrés de liberté.



Lorsque k tend vers $+\infty$ la loi du χ^2 tend vers la loi normale d'espérance k et de variance $2k$.

En pratique, lorsque $k \geqslant 100$, une loi du χ^2 à k degré de liberté peut être approchée par une loi normale $\mathcal{N}(k, \sqrt{2k})$.

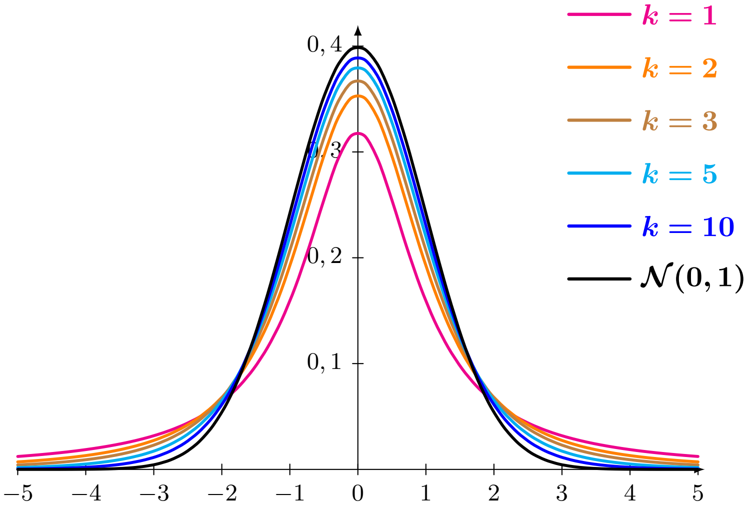
V. Loi de Student

Définition:

Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite et soit U une variable indépendante de Z et distribuée suivant la loi du χ^2 à k degrés de liberté. Par définition la variable

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/k}}$$

suit une loi de Student à k degrés de liberté.



- Son espérance vaut 0 et n'est définie que pour $k \geqslant 2$;
- Sa variance vaut $\dfrac{k}{k-2}$ et n'est définie que pour $k \geqslant 3$.

Lorsque k tend vers $+\infty$ la loi de Student tend vers la loi normale centrée réduite.

Remarque : En pratique, lorsque $k \geqslant 30$, on approche la loi de Student à k degré de liberté par la loi normale centrée réduite.

William Sealy Gosset

connu sous le pseudonyme **Student** est un statisticien anglais (1876 – 1937) qui inventa la distribution ne portant pas son nom.

Il était un employé de la brasserie Guinness qui lui demanda d'utiliser un pseudonyme pour diverses raisons. *Peut-être prétendait-il que la qualité de leurs produits était improbable...*

VI. Loi de Student non centrée.

Définition:

Soit Z une variable aléatoire de loi normale .... et soit U une variable indépendante de Z et distribuée suivant la loi du χ^2 à k degrés de liberté. Par définition la variable

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/k}}$$

suit une loi de Student non centrée à k degrés de liberté avec un paramètre de .... δ.