2025 - 2026

Statistiques descriptives

Moyenne

Variance & Ecart-type

Fiche n° 1

I. Moyenne et écart-type

1. Calcul de la moyenne.

Considérons les données brutes suivantes :

2 - 5 - 2 - 9 - 9 - 2 - 7 - 5 - 2 - 5

Il y a deux façons de les représenter :

- **La première, on parle de la série de données brutes :**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	x_i	2	5	2	9	9	2	7	5	2	5

On écrit $x = (2, 5, 2, 9, 9, 2, 7, 5, 2, 5)$

$\sum_{i=1}^{10} x_i =$ .... et $\overline{x} =$ ....

Pour calculer la moyenne de cette série, dans une cellule du tableur, on saisit : $\boxed{}$

- **La seconde, on associe à chaque valeur x_i son effectif n_i :**

	A	B	C	D	E	F
1	x_i	2	5	7	9	Total
2	n_i					
3	$n_i x_i$					

$(x_1, n_1) =$ ..... , $(x_2, n_2) =$ ..... , $(x_3, n_3) =$ ..... , et $(x_4, n_4) =$ .....

$\sum_{i=1}^{4} n_i x_i =$ .... et $\overline{x} =$ ....

Définition:
On dit que la moyenne est .... par les effectifs n_i

☞ La formule de la cellule F2 : $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ donne ....

☞ La formule de la cellule F3 : $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

☞ Pour calculer la moyenne, il faut saisir la formule : $\boxed{\qquad\qquad}$

Dans le cas d'une moyenne .... , on ne peut pas directement calculer la moyenne avec la fonction $\boxed{\text{MOYENNE}}$ du tableur. Mais, on peut ruser en faisant appel au .... : $\boxed{\text{SOMMEPROD}}$

☞ $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} n_i x_i = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$ = ...

Où **B1:E1** $= \boxed{\quad}\boxed{\quad}\boxed{\quad}\boxed{\quad}$

et **B2:E2** $= \boxed{\quad}\boxed{\quad}\boxed{\quad}\boxed{\quad}$

☞ La moyenne pondérée est $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

Il n'est plus nécessaire de construire la ligne ...

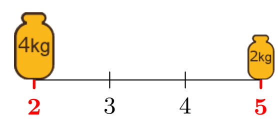
2. Qu'est-ce que la moyenne ?

Définition : Interprétation mécanique

La moyenne est le point d'équilibre des valeurs pondérées par leur effectif :

- **Moyenne de deux notes :**

Notes	2	5
Coefficients	4	2

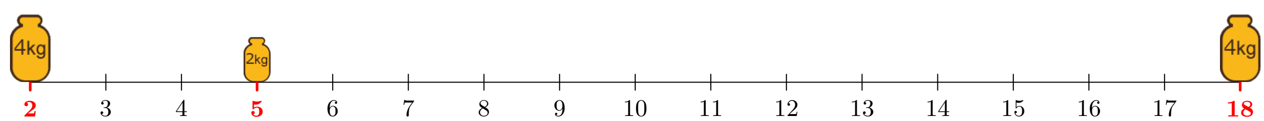


La moyenne est : ....

- **Moyenne après ajout d'une troisième note :**

Notes	2	5	
Coefficients	4	2	

La moyenne est : ....



Il y a un effet de « .... », avec 4 kg, le 18 soulève 6 kg.

C'est la raison pour laquelle on parle de moyenne .... par ses effectifs.

Exemple d'effet levier

salaires nets	effectifs
[1100 ; 1300[	20
[1300 ; 1500[	11
[1500 ; 1900[	6
[1900 ; 2500[	2
22000	1
Total	

La moyenne :

$\overline{x} = \rule{7cm}{0.4pt}$

$= \frac{\quad}{\quad} = \qquad €$

Combien de salariés ont un salaire net inférieur à 1900€ ? ....

Ce qui représente $\frac{\quad}{40} =$ ....

Si on .... la moyenne en retirant le salaire excentré de .... , on trouve :

$\overline{x} = \frac{\quad}{\quad} = \qquad €$

Pour information, le salaire médian est de ....

Exercice n° 1:

1. Reconstruis le tableau suivant :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			salaires nets	Effectifs	Centre des classes			
2	1100	1300	[1100 ; 1300[	20	1 200,00 €		La moyenne des salaires est	1 900,00 €
3	1300	1500	[1300 ; 1500[	11	1 400,00 €			
4	1500	1900	[1500 ; 1900[	6	1 700,00 €			
5	1900	2500	[1900 ; 2500[	2	2 200,00 €			
6	22000	22000	[22000 ; 22000]	1	22 000,00 €			
7			Total	40				

2. La formule saisie dans la cellule C2 est
3. La formule saisie dans la cellule E3 est
4. La formule saisie dans la cellule D7 est
5. La formule saisie dans la cellule H2 est

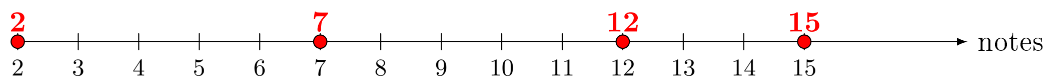
3. Propriétés de la moyenne.

NOTATIONS :

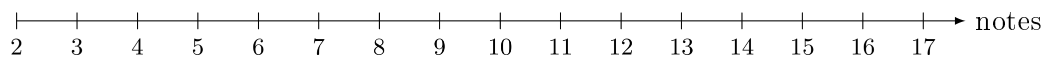
- ☛ On note $(x+b)$ la série statistique où toutes les données ont été augmentées de b.
- ☛ On note (ax) la série statistique où toutes les données ont été multipliées par a.

Considérons les quatre notes suivantes : 2, 7, 12, et 15.

- La moyenne de ces notes est égale à .....



- Translatons toutes ces notes de 2 points vers la droite :



La moyenne .... On écrit ....

Propriété

Etant donné deux séries de données x et y portant sur une même population :

- $\overline{a \times x} =$ .... : Si les données sont multipliées par a alors la moyenne l'est aussi.
- $\overline{x+b} =$ .... : Si les données sont augmentées de b alors la moyenne l'est aussi.
- $\overline{x+y} =$ .... : La moyenne de la somme est la somme des moyennes.

où a et b sont deux constantes réelles.

4. La moyenne définie par les écarts :

Etudions les écarts à la moyenne ... des notes suivantes :

Notes	2	7	12	15	Total
Ecarts à la moyenne : $x_i - \overline{x}$					

Propriété

La somme des .... à la moyenne est nulle :

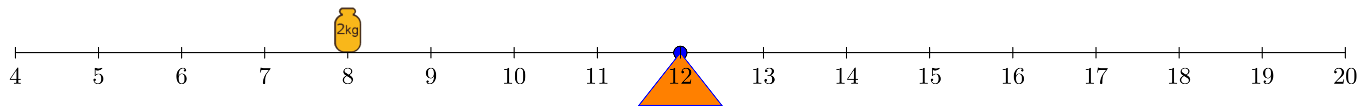
« la somme des écarts à gauche de la .... est égale à celle de droite. »

Remarque :

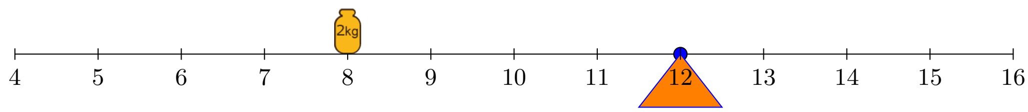
La moyenne peut être définie comme la seule et unique valeur équilibrant les .... Ce qui revient à la définir comme centre d'inertie des positions pondérées par leur masse.

Exercice n° 2: On considère les notes suivantes :

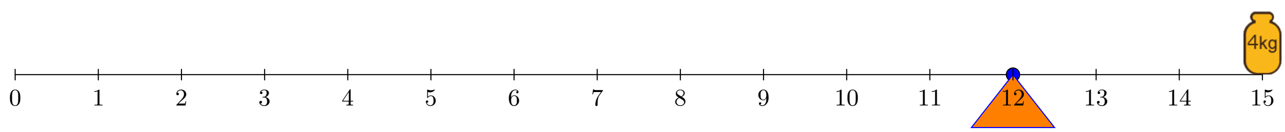
1. Sachant qu'on a eu qu'une seule note : un 8 coefficient 2, quelle note coefficient 1 faut-il avoir pour obtenir une moyenne de 12 ? ...



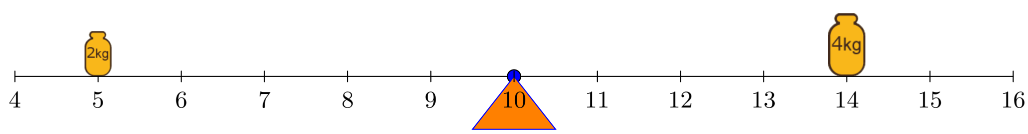
2. Sachant qu'on a eu qu'une seule note : un 8 coefficient 2, quelle note coefficient 4 faut-il avoir pour obtenir une moyenne de 12 ? ...



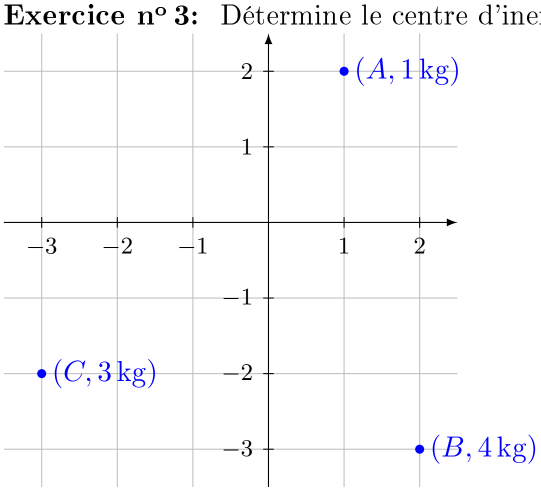
3. Sachant qu'on a eu qu'une seule note : un 15 coefficient 4, quelle note coefficient 1 faut-il avoir pour obtenir une moyenne de 12 ? ...



4. Sachant qu'on a eu deux notes : un 5 coefficient 2 et un 14 coefficient 4, quelle note coefficient 1 faut-il avoir pour obtenir une moyenne de 10 ? ...



Exercice n° 3: Détermine le centre d'inertie G de ces trois points :



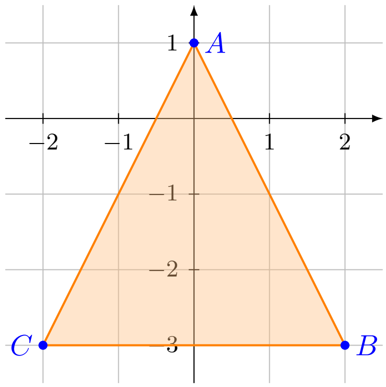
L'abscisse de G est la moyenne pondérée des abscisses :

$x_G =$ ....

L'ordonnée de G est la moyenne pondérée des ordonnées :

$y_G =$ ....

Exercice n° 4: On considère cette plaque triangulaire de masse volumique $\rho(x, y) = 2$.



1. Détermine la masse de cette plaque.

   ....

   ....

   ....

   ....

2. Détermine le centre d'inertie G de cette plaque.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

Remarque : La densité étant homogène, ...

5. De la moyenne à l'écart-type en passant par la variance.

La somme des écarts étant nulle, pour mesurer comment se dispersent les valeurs autour de la moyenne, on va les élever au carré.

Définition : Variance

La somme des carrés des écarts à la moyenne, notée V ou ..... , est appelée la .... :

$$V(x) = \frac{1}{N}\sum_i n_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

Notes	2	7	12	15	Total
Ecarts à la moyenne : $x_i - \overline{x}$					
$\left(\text{Ecarts à la moyenne}\right)^2$: $\left(x_i - \overline{x}\right)^2$					

La variance est égale à .... et l'écart-type est égal à ....

Comme toutes les données ont été élevées aux carrées, la variance n'est pas dans la même unité. Par exemple, si les données étaient en euros, la variance serait en euros aux carrés (€^{2}). C'est l'une des raisons pour lesquelles on définit .... :

Définition : Ecart-type

L'écart-type est la racine carrée de la variance.

Exercice n° 5: On étudie les 4 notes sur Excel, les valeurs seront arrondies au dixième près.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Notes	2	7	12	15		Moyenne	
2	Ecarts à la moyenne au carré						Variance	
3							Ecart-type	

1. Formules saisies dans les cellules :
   - H1 :
   - H2 :
   - B2 :
   - H3 :
2. On aurait pu calculer la variance directement avec la formule :
3. La moyenne est égale à ..., la variance est égale à ..... et l'écart-type est égal à ...
4. Pourquoi y a-t-il un dollar devant B2 ? ....

Sur LibreOffice, la fonction SOMME ne fait que des additions. Pour passer en mode matriciel et comprendre des formules de la forme (B1:E1-H1)^2, elle doit passer en mode matriciel. Pour cela, il faut remplacer la fonction SOMME par SOMMEPROD.

La fonction SOMMEPROD (Somme de Produits) est conçue dès le départ pour forcer le mode matriciel sur les plages de cellules qu'elle contient. Elle va faire exactement le même calcul (soustraction, mise au carré, puis somme), mais elle est comprise nativement par LibreOffice (et restera compatible avec Excel si jamais vous devez réouvrir le fichier avec ce tableur).

On peut aussi passer en mode matriciel, en écrivant la formule entre accolades.

Théorème de König-Huygens (XVIIe) :

En pratique, pour calculer la variance d'une série statistique, on utilise la formule suivante :

- $V(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2$
- $V(x) = \text{moyenne des } \left(\text{données}^2\right) - \left(\text{moyenne}\right)^2$

Exercice n° 6: On reprend l'étude des 4 notes précédentes sur Excel, mais en utilisant la formule de Huygens, les valeurs restent arrondies au dixième près.

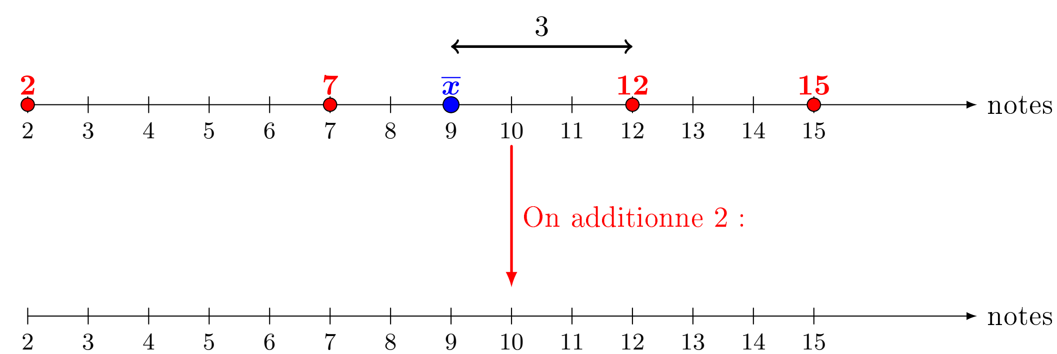
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Notes	2	7	12	15		Moyenne	
2	Ecarts à la moyenne au carré						Moyenne des carrés des notes	
3							Variance	
4							Ecart-type	

- H1 :
- H3 :
- H2 :
- H4 :

6. Propriétés de la variance.

Reprenons les quatre notes suivantes : 2, 7, 12, et 15.

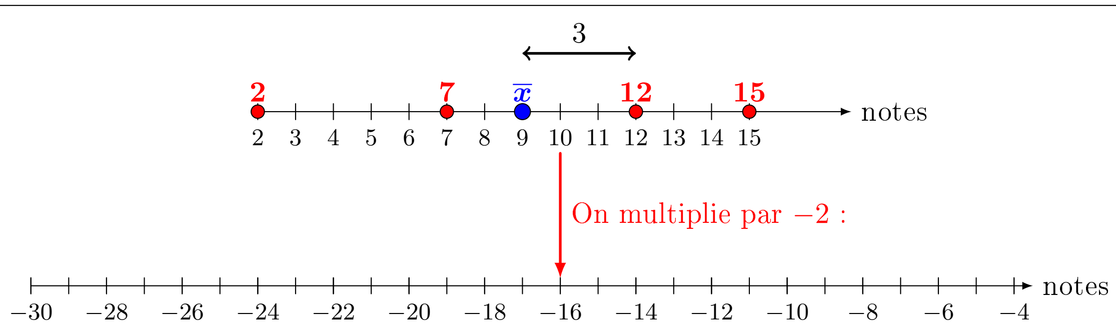
- Translatons toutes les notes de 2 points vers la droite, la moyenne est .... et :



Les écarts sont ....

Donc, la variance ....

- Multiplions toutes les notes par -2, la moyenne est ....



Les écarts ont ....

Donc, la variance a été multipliée par ....

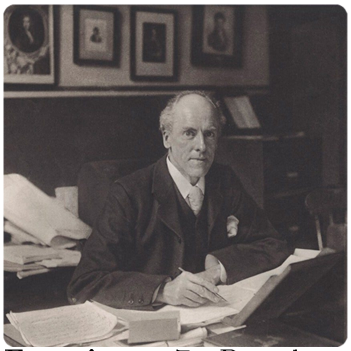
Propriété

Soient a et b deux nombres réels, et x une série statistique :

$$V(ax+b) = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et } \sigma_{ax+b} = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour calculer l'écart-type de données brutes avec Excel on peut utiliser la fonction :

=ECARTYPEP(plage des données) =ECARTYPE.PEARSON(plage des données)



Karl Pearson (1857-1936) est un mathématicien anglais qui fut l'une des figures de proue de l'émergence de la statistique au début du XXiè siècle (régression, coefficient de corrélation, test du χ^2). En 1911, sous l'influence de son collègue Walter Weldon, un zoologiste, et de Francis Galton, il renonce à sa chaire de mathématiques appliquées pour la chaire d'eugénisme, où il y fonde le département de statistiques.

A côté de sa vie professionnelle, Pearson était un libre penseur qui milita pour le droit des femmes et un socialiste qui donna des conférences sur Karl Marx. Cela le poussa à refuser l'anoblissement. Suivant les idées de Galton, il était un partisan convaincu de l'eugénisme : pour lui, il est souhaitable d'améliorer la race humaine en sélectionnant et en favorisant les plus doués de ses représentants, comme le fait la sélection naturelle pour les animaux.

Exercice n° 7: Dans le cadre du chantier de construction d'un viaduc en béton armé, un ingénieur contrôle la conformité de la résistance à la compression du béton livré. Pour un lot donné, 10 éprouvettes cylindriques ont été coulées et testées à 28 jours d'âge à l'aide d'une presse hydraulique.
Les valeurs de résistance obtenues (exprimées en Mégapascals, MPa) sont les suivantes :

32, 35, 30, 33, 36, 31, 34, 32, 35, 32

Problématique : Le cahier des charges impose un écart-type inférieur à 2,5 MPa pour garantir l'homogénéité du béton.

1. Construis la feuille de calcul suivante :

1	A	B	C	D	E
2	**Résistances**				
3	32			**Calcul avec les formules**	
4	35			**du cours**	**d'Excel**
5	30		**Moyenne**		
6	33		**Somme des carrés des écarts à la moyenne**		
7	36		**Variance**		=VAR.P.N(data)
8	31		**Ecart-type**		
⋮	⋮				

2. Le cahier des charges est-il respecté ? ....