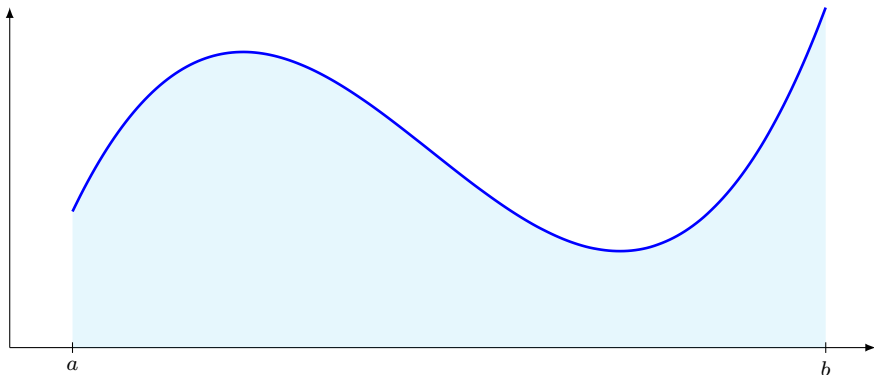


# I. Intégrales simples.

La notion d'intégrale simple  $\int_a^b f(x) dx$  peut être définie comme une aire algébrique.

- Exemple n° 1 : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 4$  intervalles.

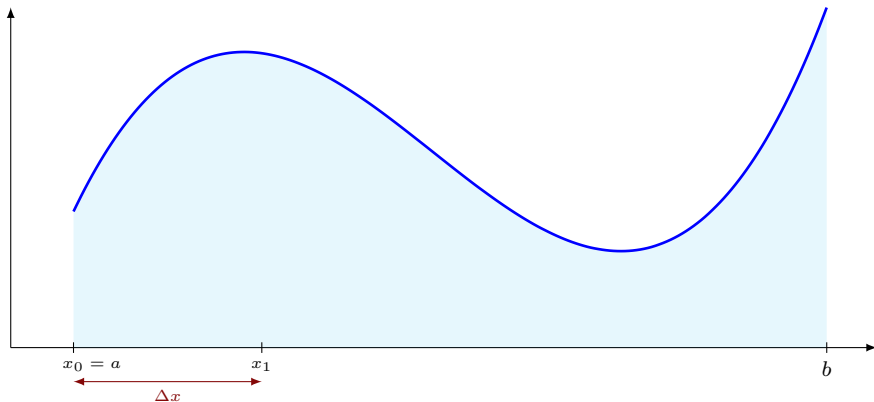


# I. Intégrales simples.

La notion d'intégrale simple  $\int_a^b f(x) dx$  peut être définie comme une aire algébrique. Pour la calculer, on subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  de même longueur

$$\Delta x =$$

- **Exemple n° 1** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 4$  intervalles.

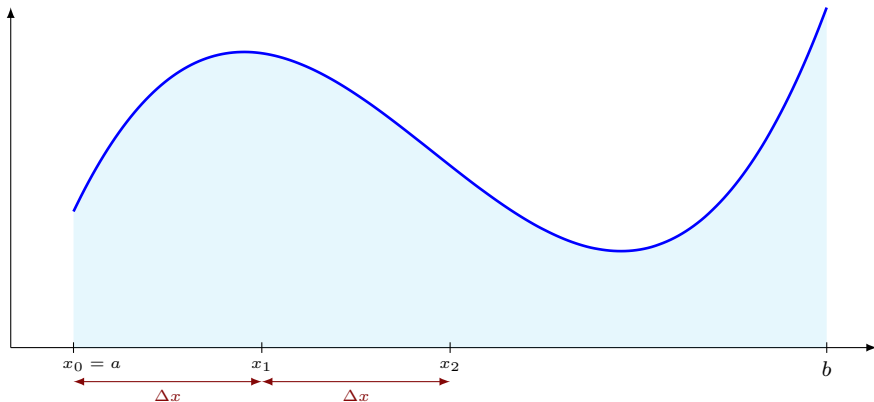


# I. Intégrales simples.

La notion d'intégrale simple  $\int_a^b f(x) dx$  peut être définie comme une aire algébrique. Pour la calculer, on subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  de même longueur

$$\Delta x =$$

- **Exemple n° 1** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 4$  intervalles.

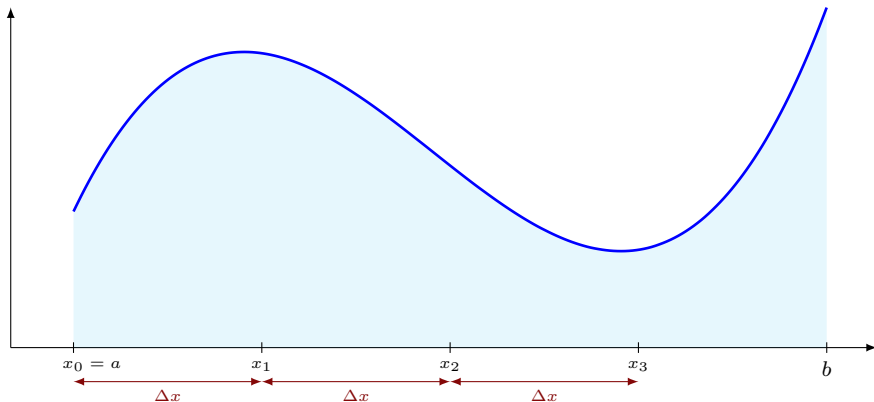


# I. Intégrales simples.

La notion d'intégrale simple  $\int_a^b f(x) dx$  peut être définie comme une aire algébrique. Pour la calculer, on subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  de même longueur

$$\Delta x =$$

- **Exemple n° 1** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 4$  intervalles.

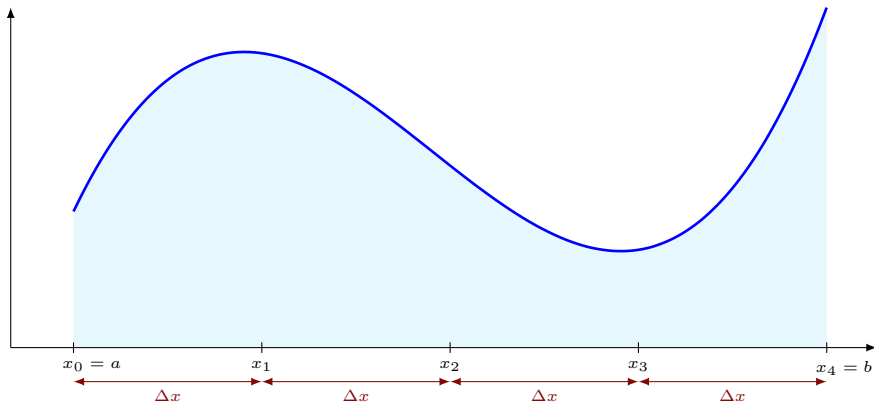


# I. Intégrales simples.

La notion d'intégrale simple  $\int_a^b f(x) dx$  peut être définie comme une aire algébrique. Pour la calculer, on subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  de même longueur

$$\Delta x =$$

- **Exemple n° 1** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 4$  intervalles.

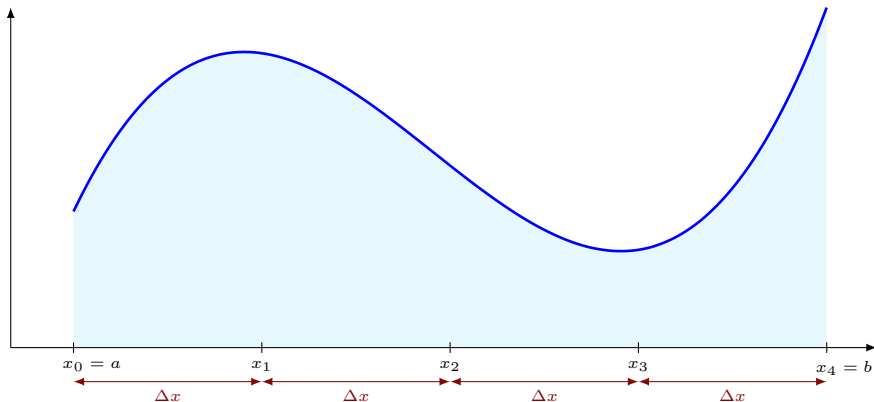


# I. Intégrales simples.

La notion d'intégrale simple  $\int_a^b f(x) dx$  peut être définie comme une aire algébrique. Pour la calculer, on subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  de même longueur

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

- **Exemple n° 1** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 4$  intervalles.

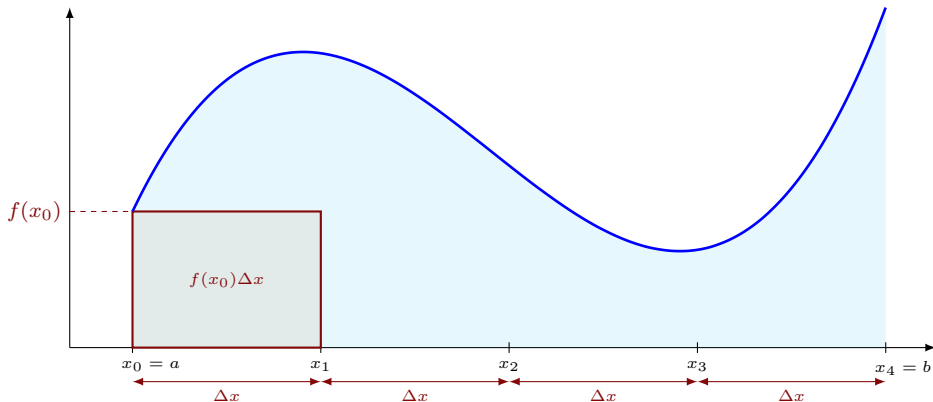


# I. Intégrales simples.

La notion d'intégrale simple  $\int_a^b f(x) dx$  peut être définie comme une aire algébrique. Pour la calculer, on subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  de même longueur

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

- **Exemple n° 1** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 4$  intervalles.

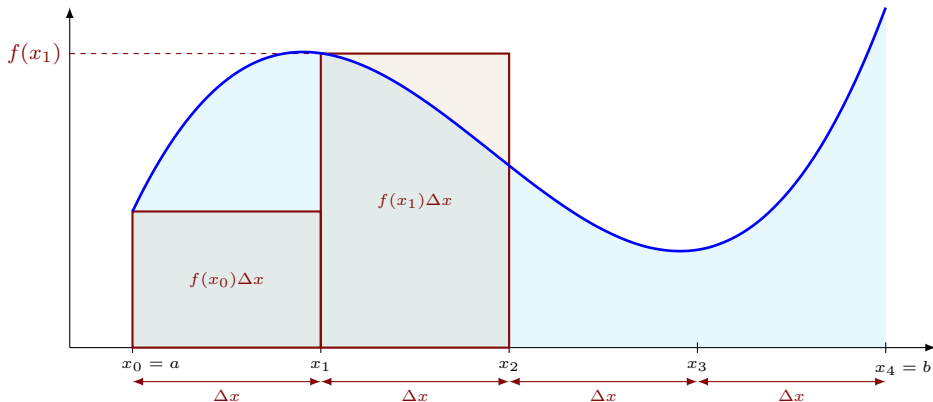


# I. Intégrales simples.

La notion d'intégrale simple  $\int_a^b f(x) dx$  peut être définie comme une aire algébrique. Pour la calculer, on subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  de même longueur

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

- **Exemple n° 1** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 4$  intervalles.

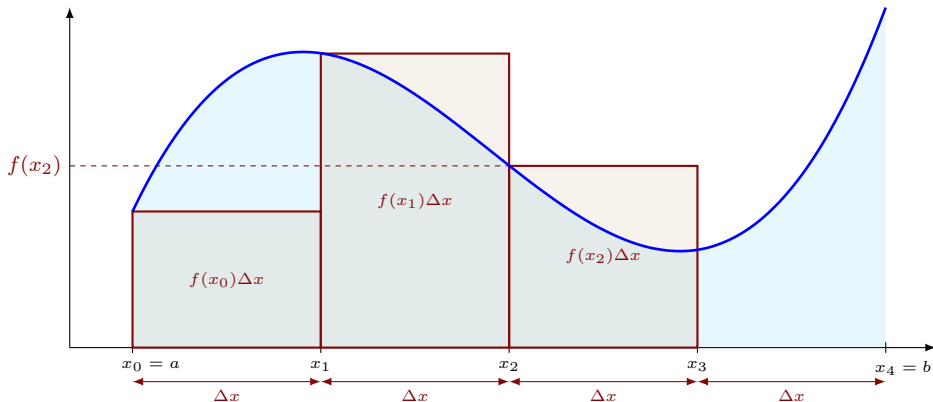


# I. Intégrales simples.

La notion d'intégrale simple  $\int_a^b f(x) dx$  peut être définie comme une aire algébrique. Pour la calculer, on subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  de même longueur

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

- **Exemple n° 1** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 4$  intervalles.

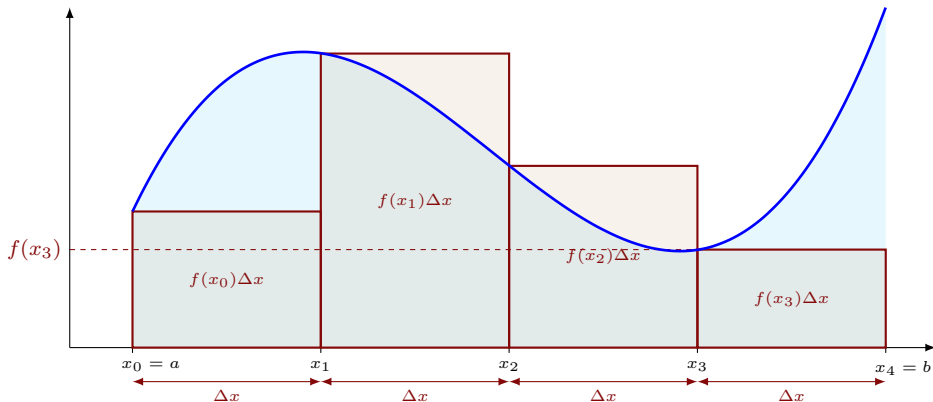


# I. Intégrales simples.

La notion d'intégrale simple  $\int_a^b f(x) dx$  peut être définie comme une aire algébrique. Pour la calculer, on subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  de même longueur

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

- **Exemple n° 1** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 4$  intervalles.

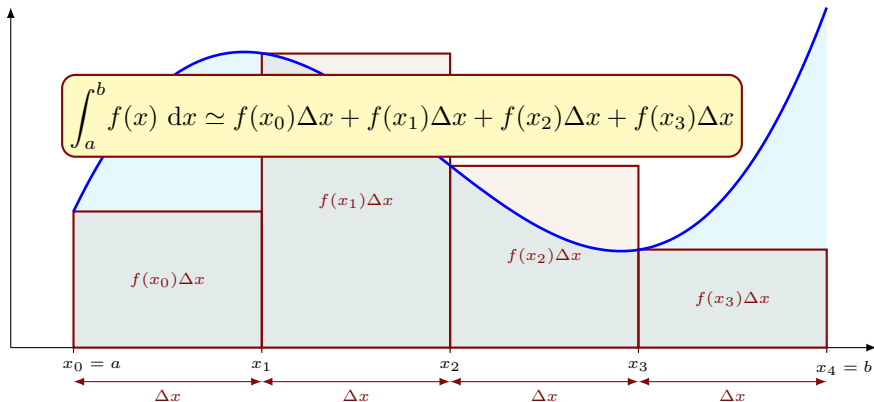


# I. Intégrales simples.

La notion d'intégrale simple  $\int_a^b f(x) dx$  peut être définie comme une aire algébrique. Pour la calculer, on subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  de même longueur

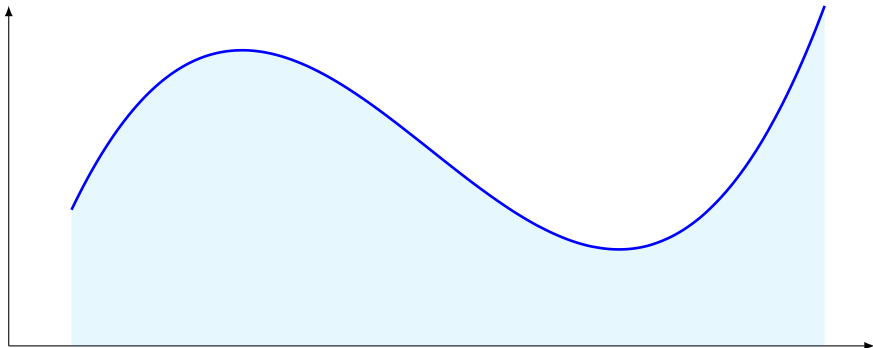
$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

- **Exemple n° 1** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 4$  intervalles.



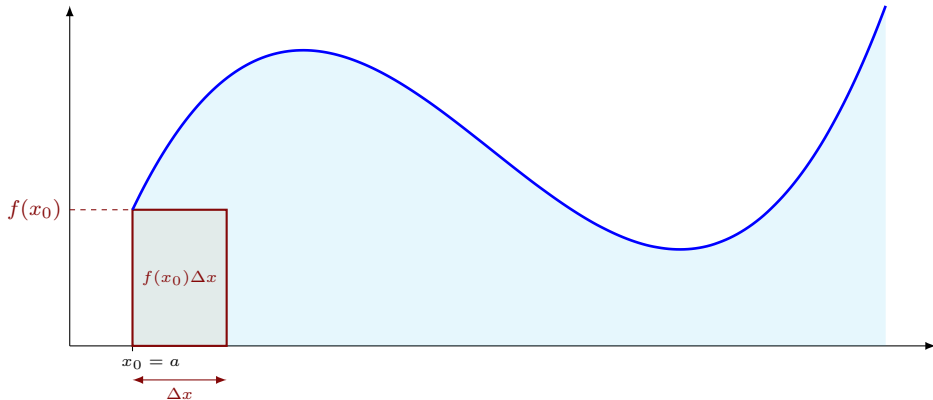
# I. Intégrales simples.

- Exemple n° 2 : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 8$  intervalles.



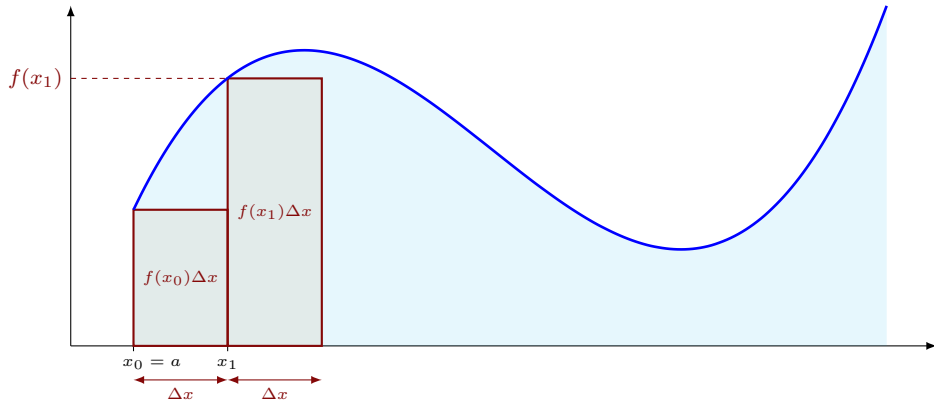
# I. Intégrales simples.

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 8$  intervalles.



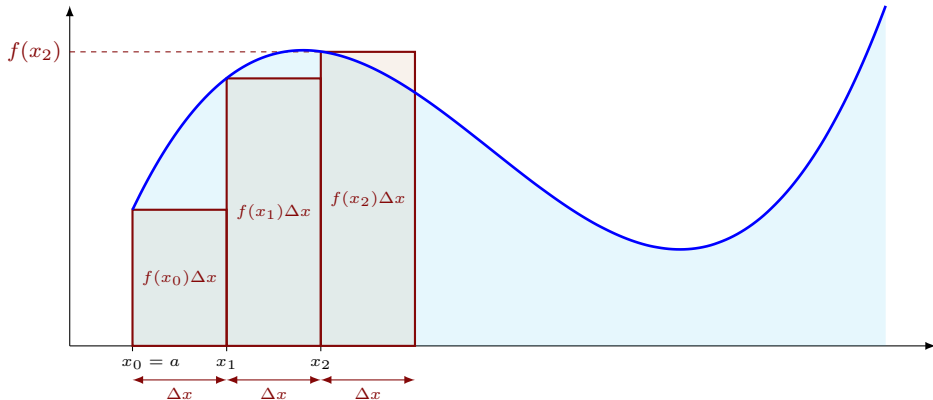
# I. Intégrales simples.

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 8$  intervalles.



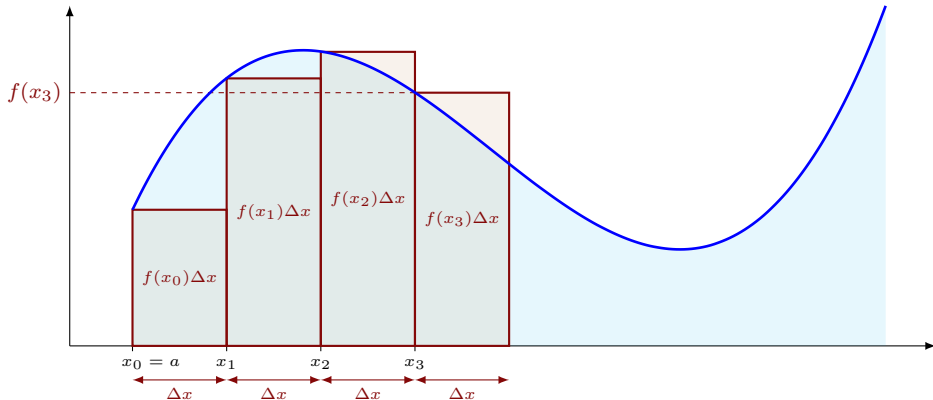
# I. Intégrales simples.

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 8$  intervalles.



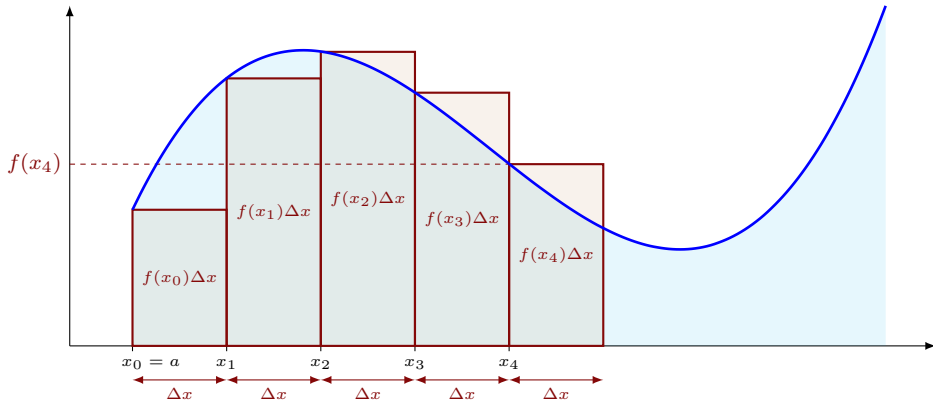
# I. Intégrales simples.

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 8$  intervalles.



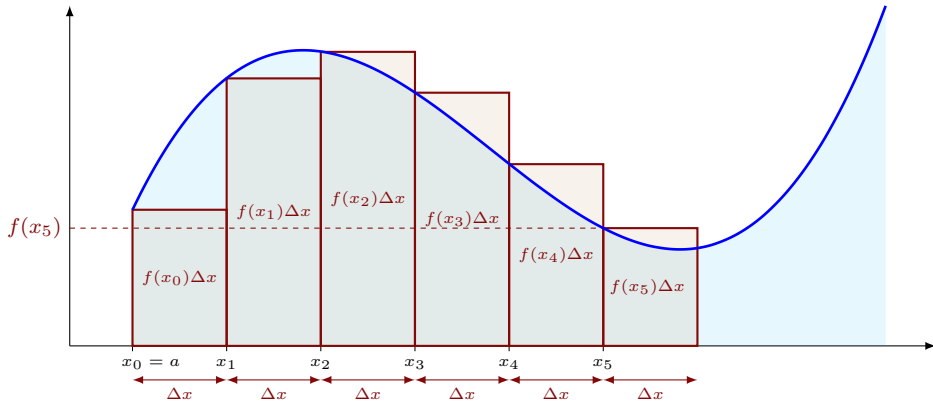
# I. Intégrales simples.

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 8$  intervalles.



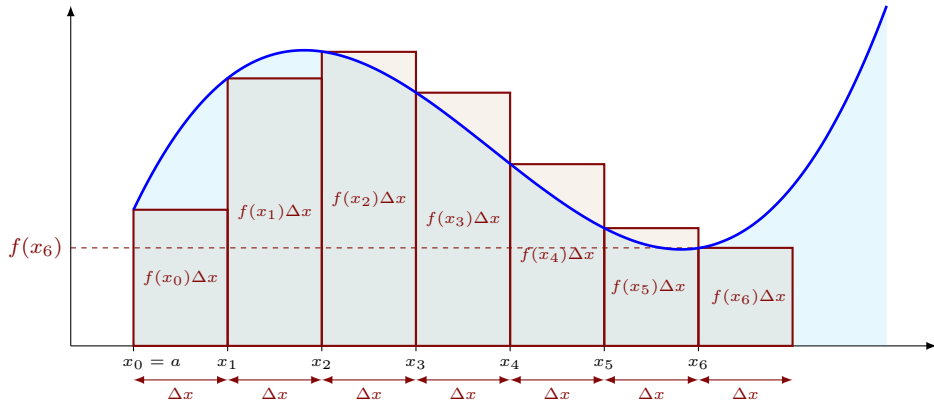
# I. Intégrales simples.

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 8$  intervalles.



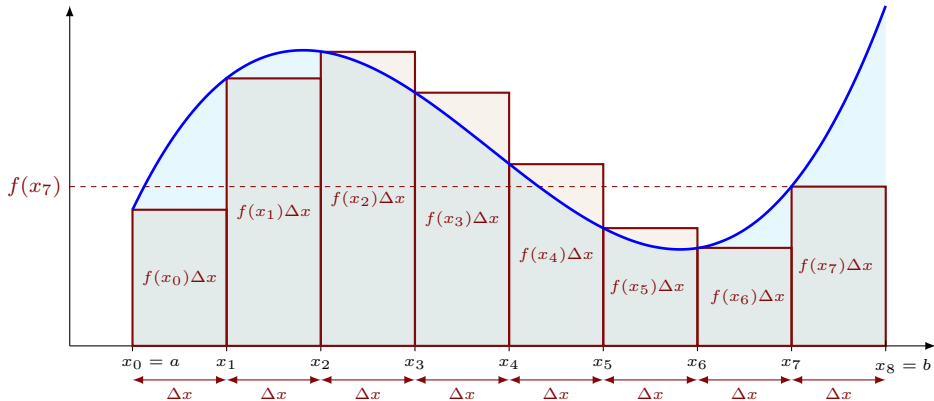
# I. Intégrales simples.

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 8$  intervalles.



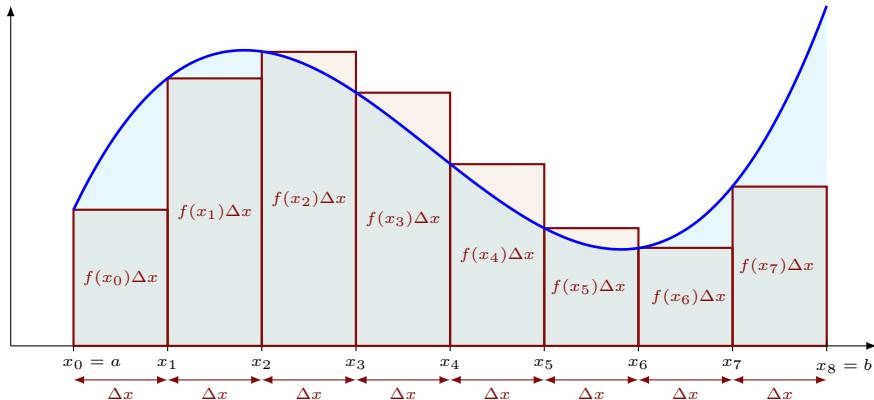
# I. Intégrales simples.

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 8$  intervalles.



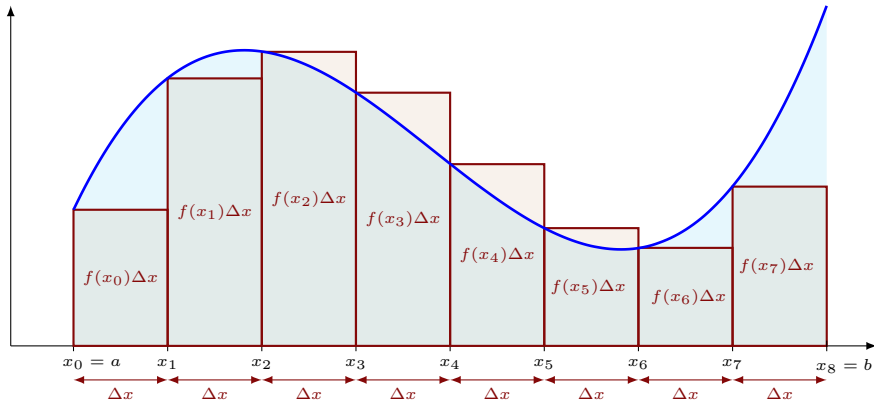
# I. Intégrales simples.

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 8$  intervalles.



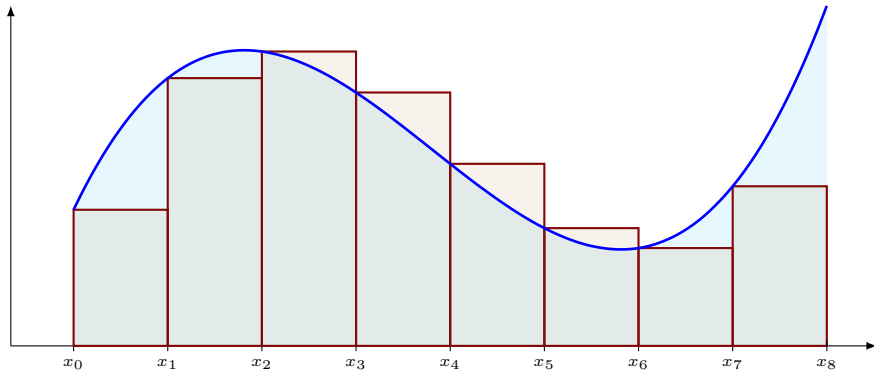
$$\int_a^b f(x) dx \simeq f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_7)\Delta x =$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 8$  intervalles.



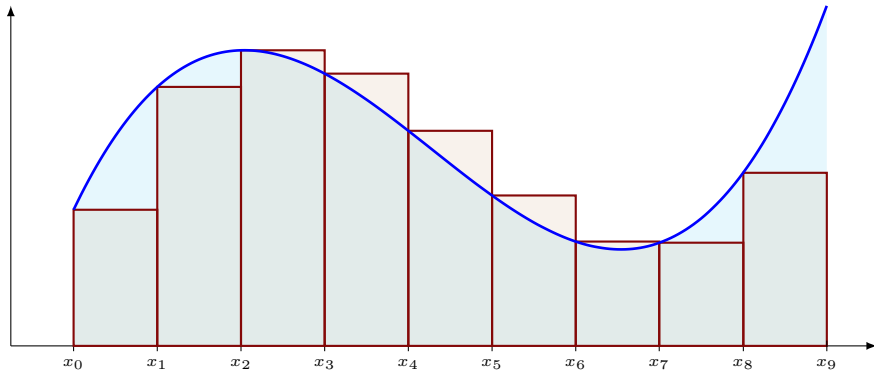
$$\int_a^b f(x) dx \simeq f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_7)\Delta x = \sum_{i=0}^7 f(x_i)\Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 8$  intervalles.



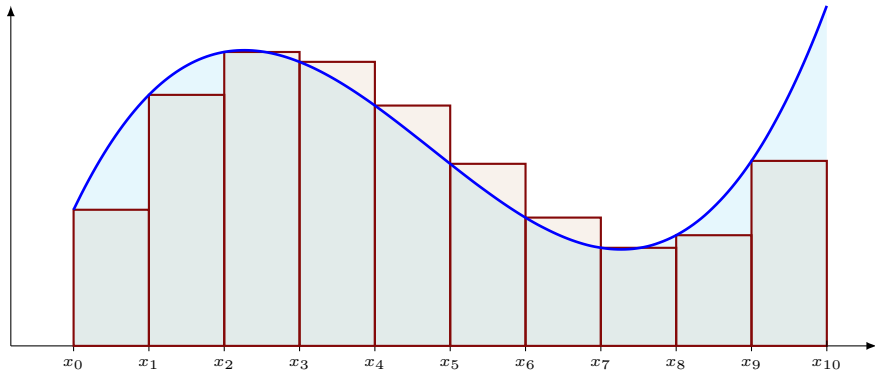
$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^7 f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 9$  intervalles.



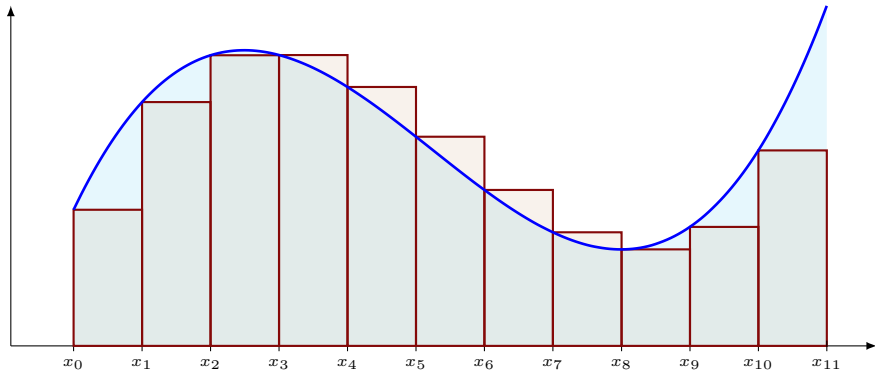
$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^8 f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 10$  intervalles.



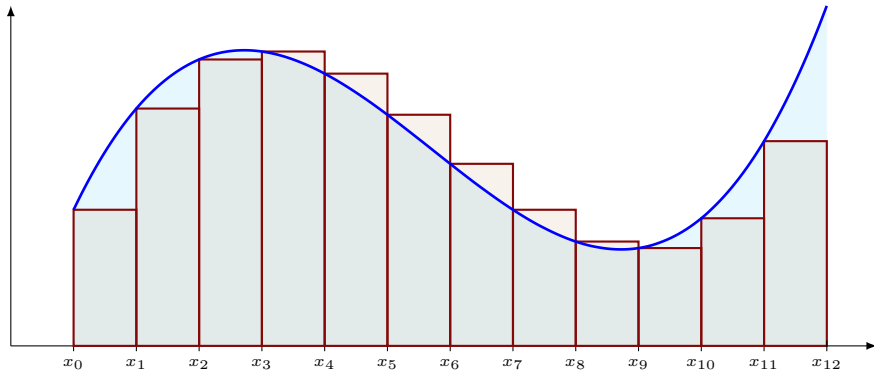
$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^9 f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 11$  intervalles.



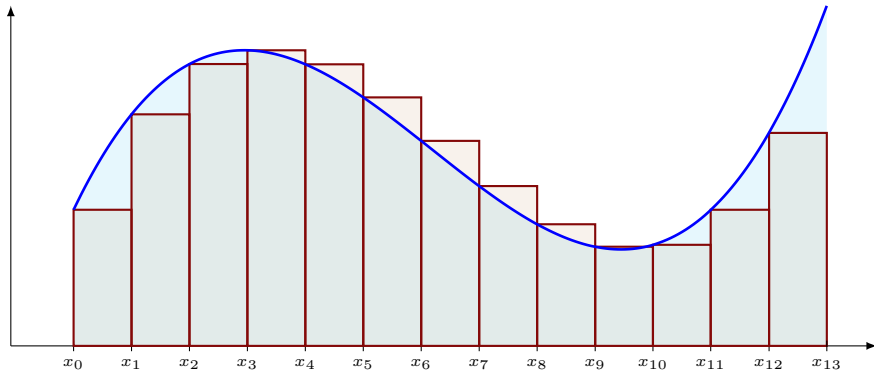
$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{10} f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 12$  intervalles.



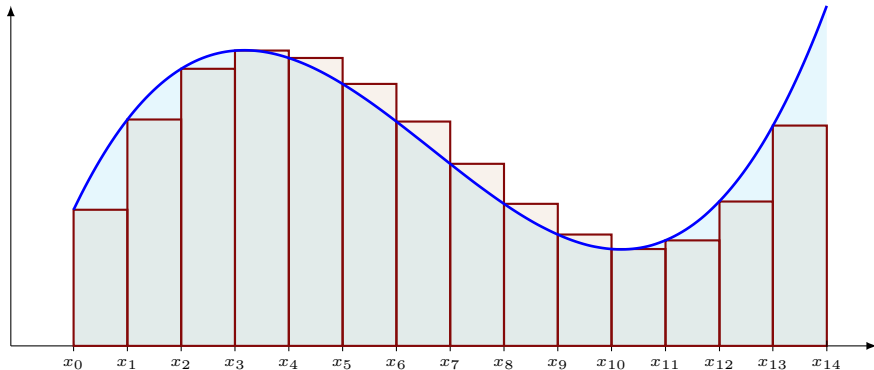
$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{11} f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 13$  intervalles.



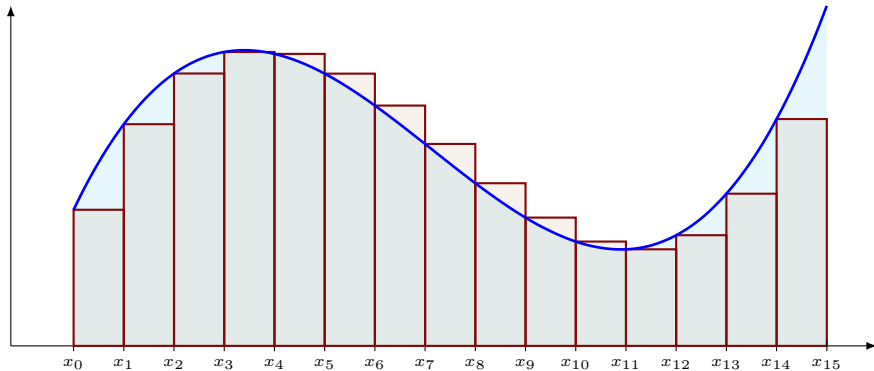
$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{12} f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 14$  intervalles.



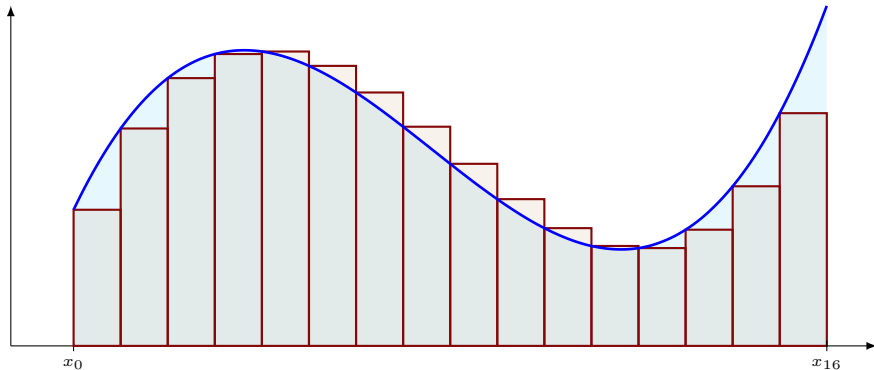
$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{13} f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 15$  intervalles.



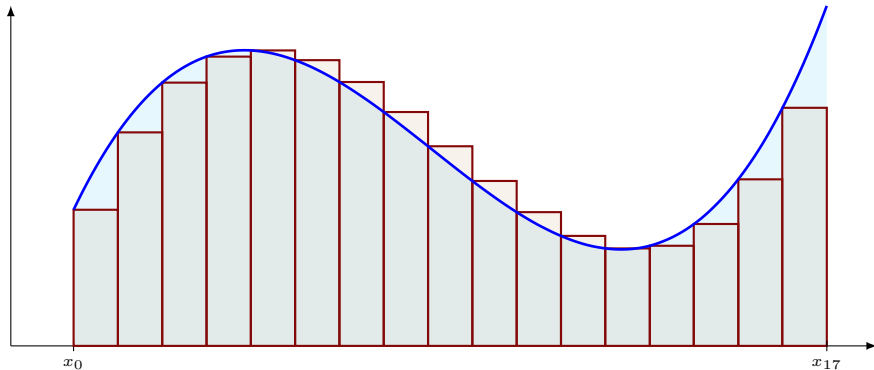
$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{14} f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 16$  intervalles.



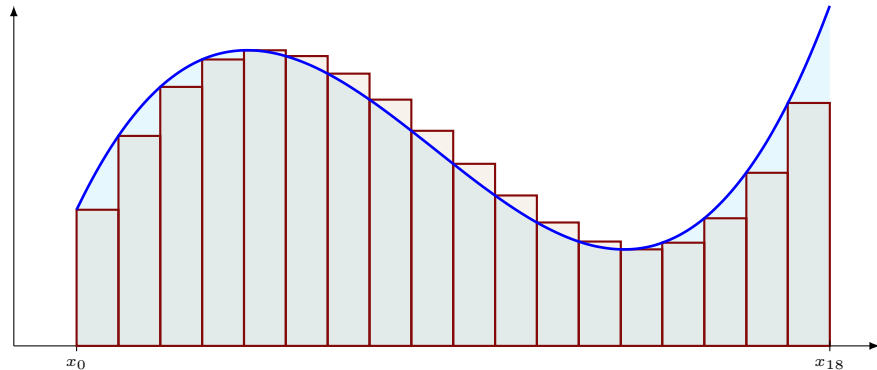
$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{15} f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 17$  intervalles.



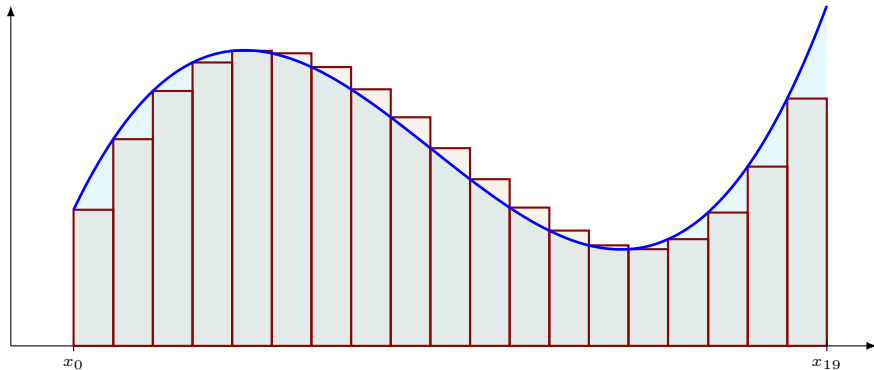
$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{16} f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 18$  intervalles.



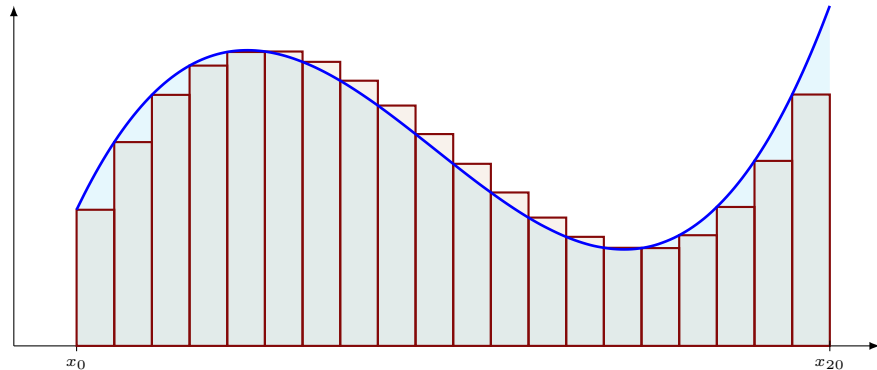
$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{17} f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 19$  intervalles.



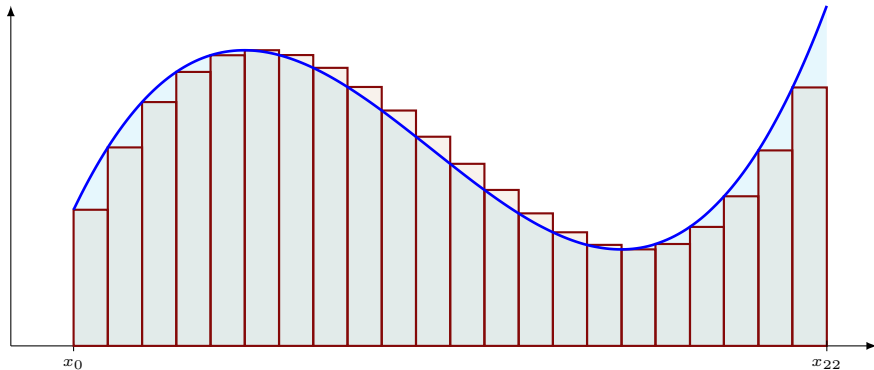
$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{18} f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 20$  intervalles.



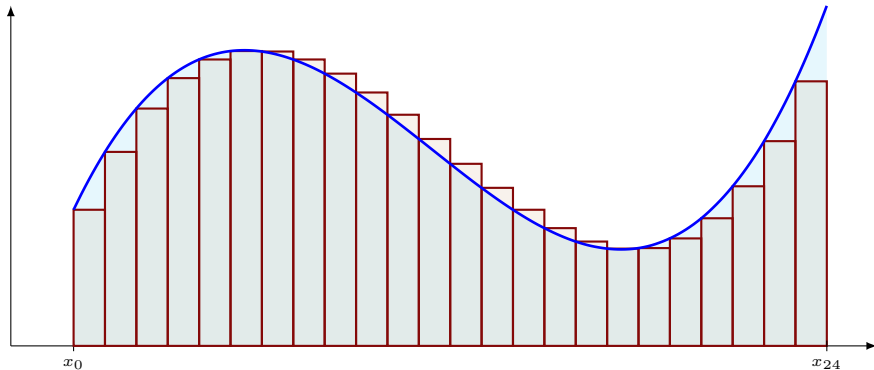
$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{19} f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 22$  intervalles.



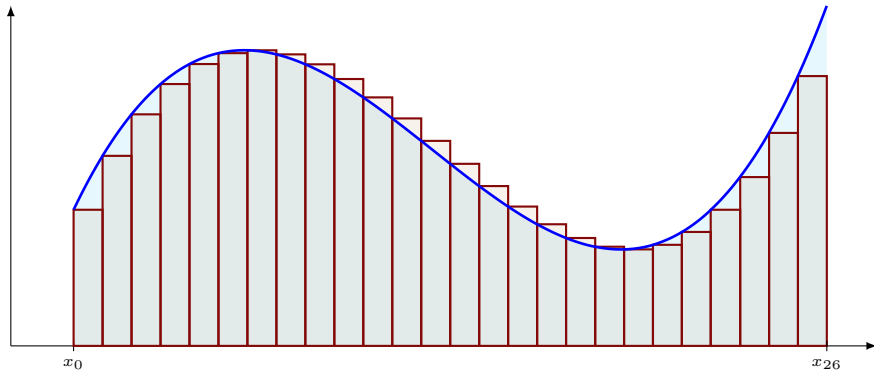
$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{21} f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 24$  intervalles.



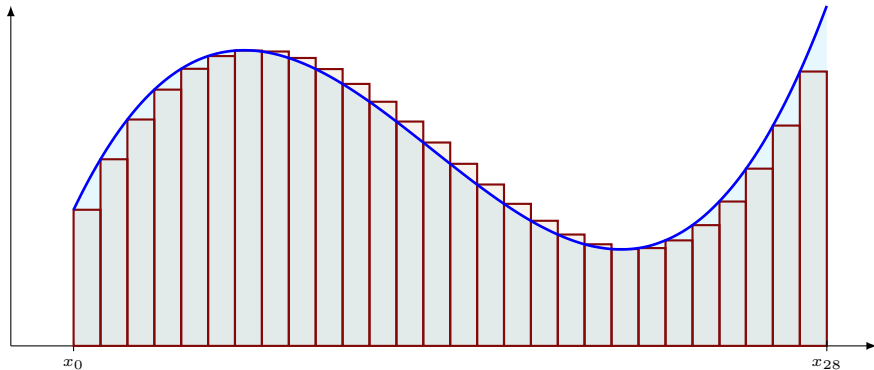
$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{23} f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 26$  intervalles.



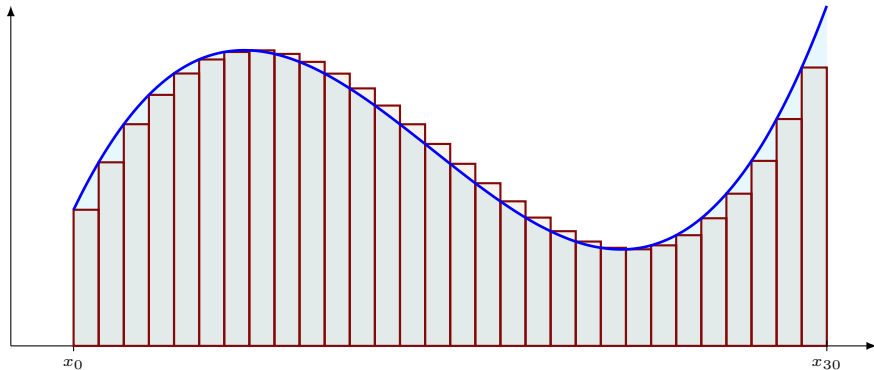
$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{25} f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 28$  intervalles.



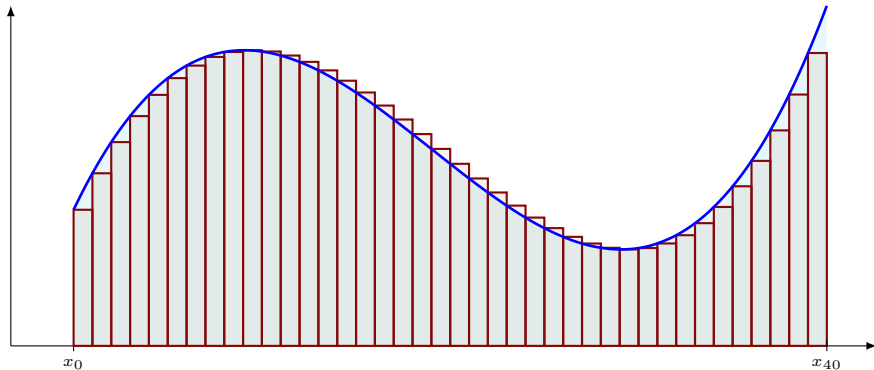
$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{27} f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 30$  intervalles.



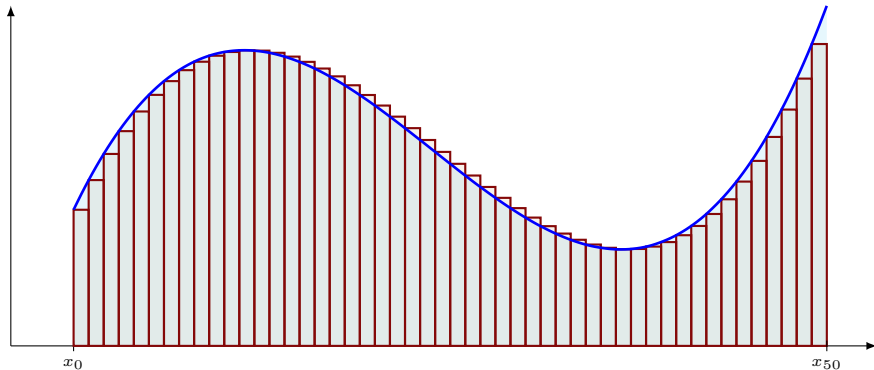
$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{29} f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 40$  intervalles.



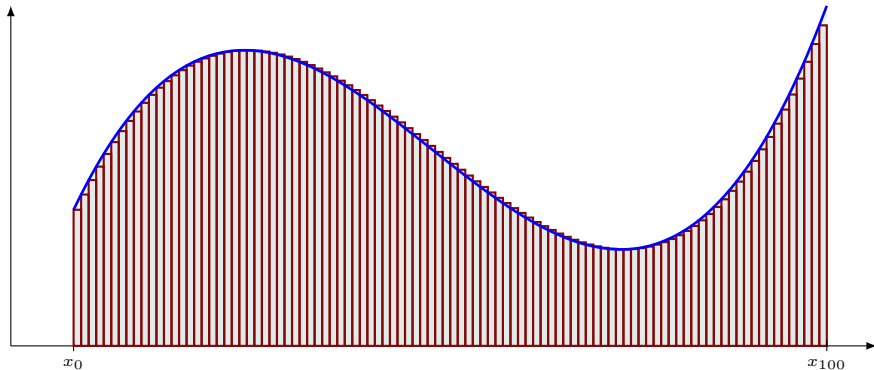
$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{39} f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 50$  intervalles.

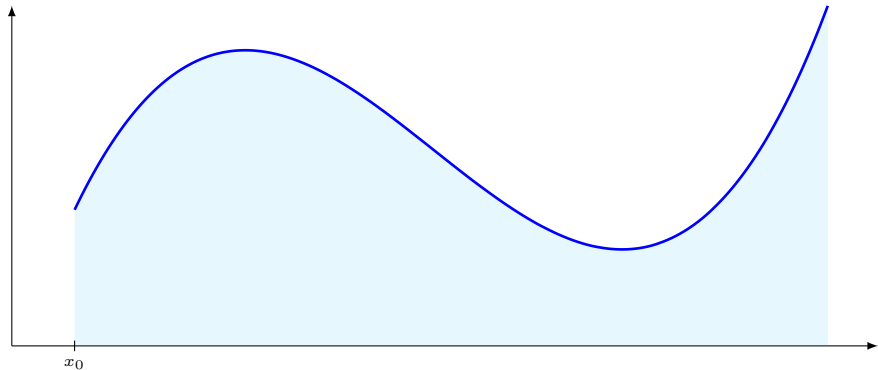


$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{49} f(x_i) \Delta x$$

- **Exemple n° 2** : on divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n = 100$  intervalles.



$$\int_a^b f(x) \, dx \simeq \sum_{i=0}^{99} f(x_i) \Delta x$$

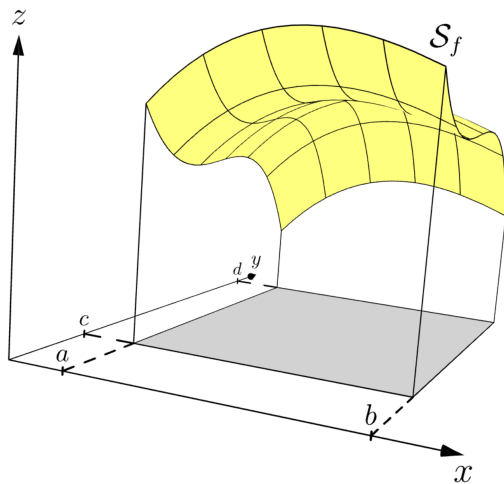


L'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  est définie par : 
$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \frac{b-a}{n}.$$

## II. L'intégrale double.

Considérons une fonction continue  $f$  à deux variables définie sur un rectangle  $[a, b] \times [c, d]$  du plan  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} f: [a, b] \times [c, d] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$



## II. L'intégrale double.

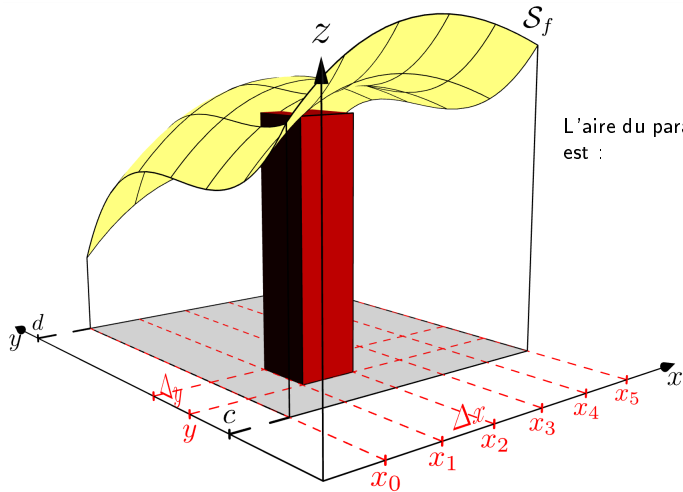
On va construire une notion d'intégrale double  $\iint_R f(x, y) \, dx \, dy$  de la fonction  $f$  sur le rectangle  $R = [a, b] \times [c, d]$ .

## II. L'intégrale double.

On va construire une notion d'intégrale double  $\iint_R f(x, y) \, dx \, dy$  de la fonction  $f$  sur le rectangle  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Pour cela, comme dans la construction de l'intégrale simple, on va diviser le segment  $[a, b]$  en  $n$  et le segment  $[c, d]$  en  $m$ .

## II. L'intégrale double.

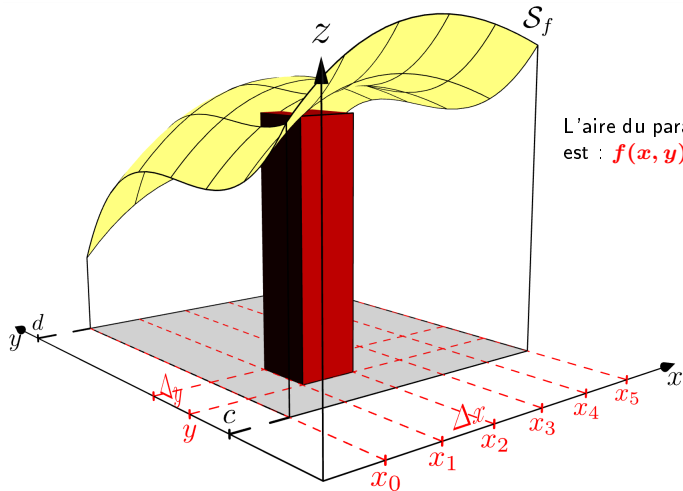
On va construire une notion d'intégrale double  $\iint_R f(x, y) \, dx \, dy$  de la fonction  $f$  sur le rectangle  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Pour cela, comme dans la construction de l'intégrale simple, on va diviser le segment  $[a, b]$  en  $n$  et le segment  $[c, d]$  en  $m$ .



L'aire du parallélépipède rectangle est :

## II. L'intégrale double.

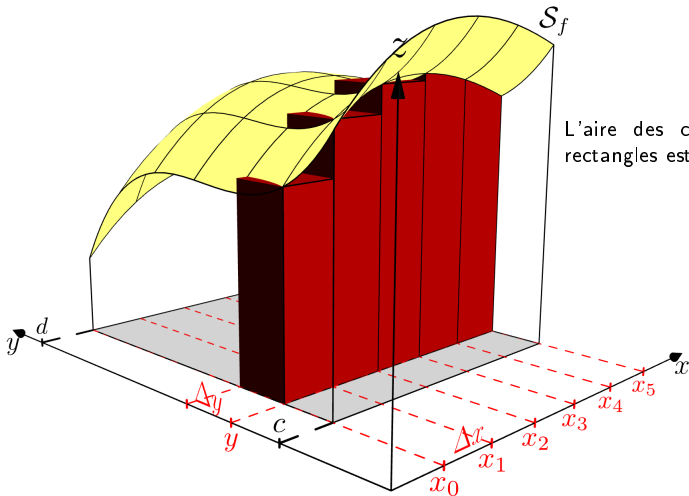
On va construire une notion d'intégrale double  $\iint_R f(x, y) \, dx \, dy$  de la fonction  $f$  sur le rectangle  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Pour cela, comme dans la construction de l'intégrale simple, on va diviser le segment  $[a, b]$  en  $n$  et le segment  $[c, d]$  en  $m$ .



L'aire du parallélépipède rectangle est :  $f(x, y)\Delta x\Delta y$

## II. L'intégrale double.

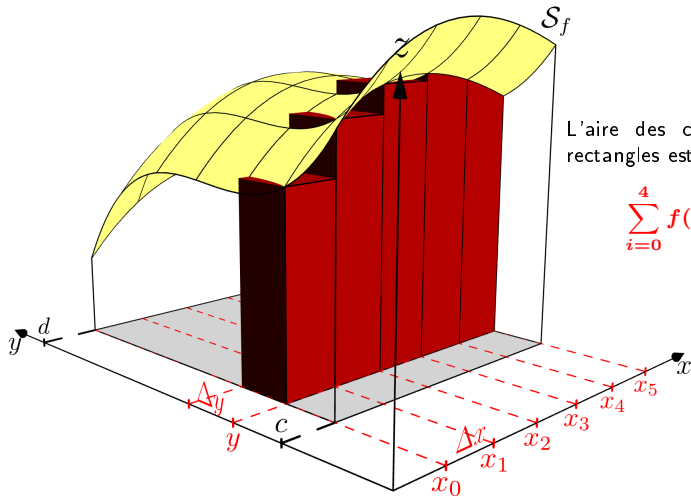
On va construire une notion d'intégrale double  $\iint_R f(x, y) \, dx \, dy$  de la fonction  $f$  sur le rectangle  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Pour cela, comme dans la construction de l'intégrale simple, on va diviser le segment  $[a, b]$  en  $n$  et le segment  $[c, d]$  en  $m$ .



L'aire des cinq parallélépipèdes rectangles est :

## II. L'intégrale double.

On va construire une notion d'intégrale double  $\iint_R f(x, y) \, dx \, dy$  de la fonction  $f$  sur le rectangle  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Pour cela, comme dans la construction de l'intégrale simple, on va diviser le segment  $[a, b]$  en  $n$  et le segment  $[c, d]$  en  $m$ .

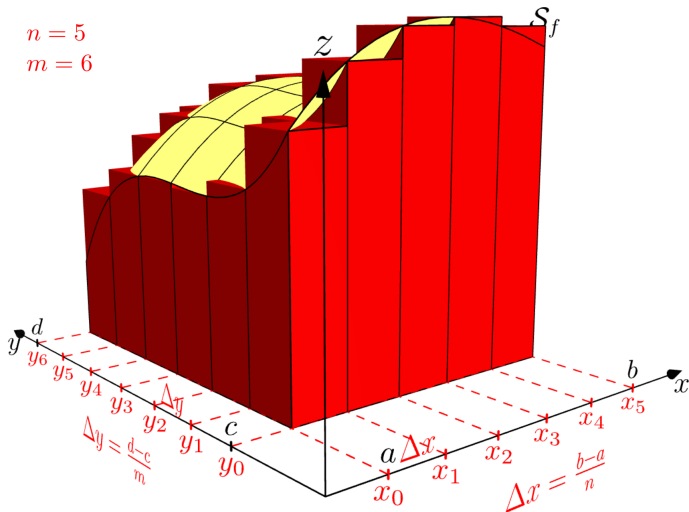


L'aire des cinq parallélépipèdes rectangles est :

$$\sum_{i=0}^4 f(x_i, y) \Delta x \Delta y$$

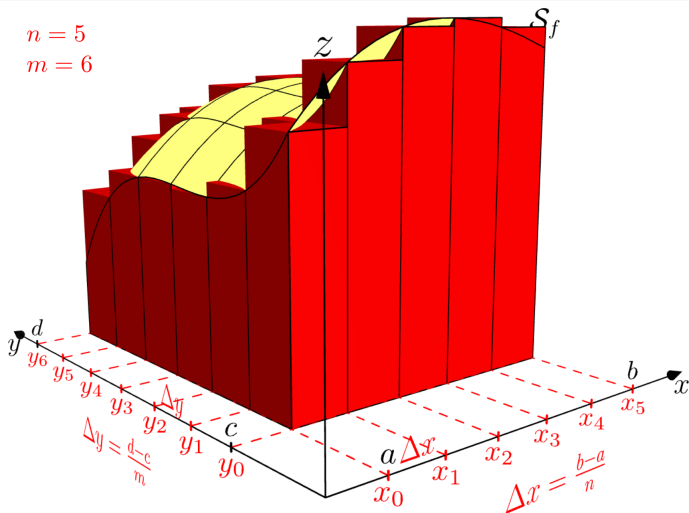
## II. L'intégrale double.

$n = 5$   
 $m = 6$



$$\iint_R f(x, y) dx dy =$$

## II. L'intégrale double.



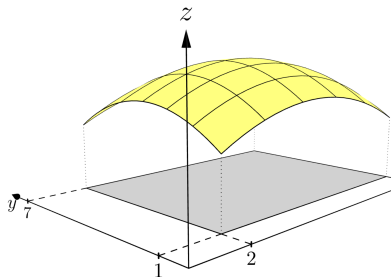
$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y$$

### Exemple n° 1 : Calcul d'un volume

On considère la fonction continue  $f$  à deux variables définie sur un rectangle  $R = [2, 10] \times [1, 7]$  du plan  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} f: [2, 10] \times [1, 7] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \end{aligned}$$

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy =$$

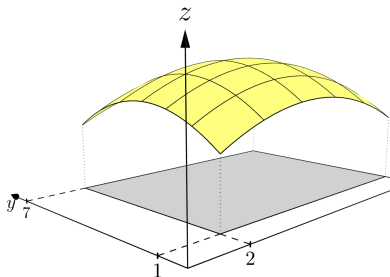


### Exemple n° 1 : Calcul d'un volume

On considère la fonction continue  $f$  à deux variables définie sur un rectangle  $R = [2, 10] \times [1, 7]$  du plan  $\mathbb{R}^2$  :

$$f: [2, 10] \times [1, 7] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144}$$



$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy$$

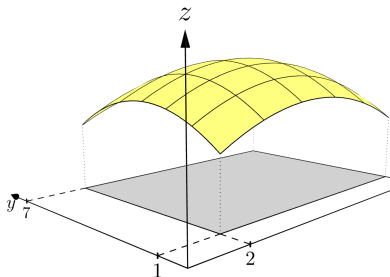
=

**Exemple n° 1** : Calcul d'un volume

On considère la fonction continue  $f$  à deux variables définie sur un rectangle  $R = [2, 10] \times [1, 7]$  du plan  $\mathbb{R}^2$  :

$$f: [2, 10] \times [1, 7] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144}$$



$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy$$

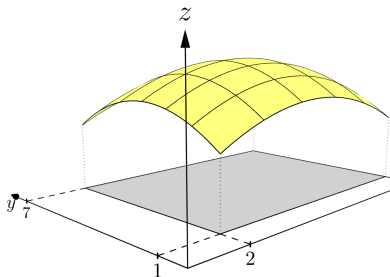
$$= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( \int_2^{10} -9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y \, dx \right) dy$$

$$=$$

### Exemple n° 1 : Calcul d'un volume

On considère la fonction continue  $f$  à deux variables définie sur un rectangle  $R = [2, 10] \times [1, 7]$  du plan  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} f: [2, 10] \times [1, 7] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \end{aligned}$$

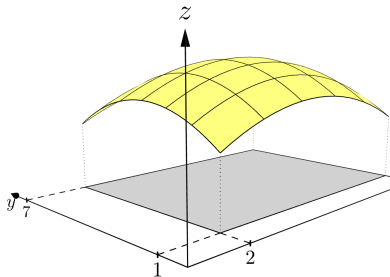


$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( \int_2^{10} -9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left[ -3x^3 \right. \end{aligned}$$

### Exemple n° 1 : Calcul d'un volume

On considère la fonction continue  $f$  à deux variables définie sur un rectangle  $R = [2, 10] \times [1, 7]$  du plan  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} f: [2, 10] \times [1, 7] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \end{aligned}$$

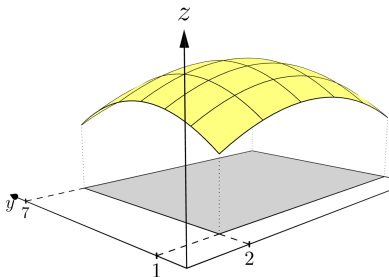


$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( \int_2^{10} -9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left[ -3x^3 + 54x^2 \right. \end{aligned}$$

### Exemple n° 1 : Calcul d'un volume

On considère la fonction continue  $f$  à deux variables définie sur un rectangle  $R = [2, 10] \times [1, 7]$  du plan  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} f: [2, 10] \times [1, 7] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \end{aligned}$$



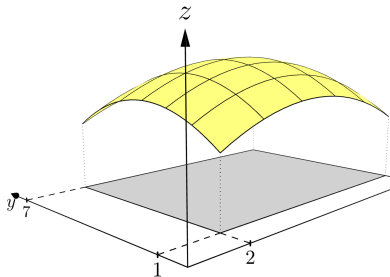
$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( \int_2^{10} -9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left[ -3x^3 + 54x^2 - 16xy^2 + \right. \end{aligned}$$

### Exemple n° 1 : Calcul d'un volume

On considère la fonction continue  $f$  à deux variables définie sur un rectangle  $R = [2, 10] \times [1, 7]$  du plan  $\mathbb{R}^2$  :

$$f: [2, 10] \times [1, 7] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144}$$



$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy$$

$$= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( \int_2^{10} -9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y \, dx \right) dy$$

$$= \frac{1}{144} \int_1^7 \left[ -3x^3 + 54x^2 - 16xy^2 + 128xy \right]_{x=2}^{x=10} dy$$

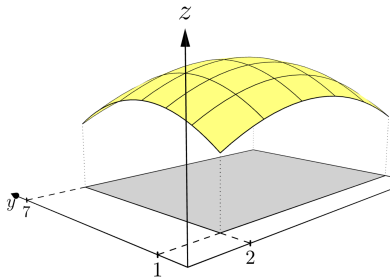
$$=$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 1** : Calcul d'un volume

On considère la fonction continue  $f$  à deux variables définie sur un rectangle  $R = [2, 10] \times [1, 7]$  du plan  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} f: [2, 10] \times [1, 7] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \end{aligned}$$



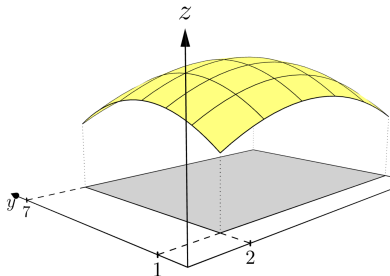
$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( \int_2^{10} -9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left[ -3x^3 + 54x^2 - 16xy^2 + 128xy \right]_{x=2}^{x=10} dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( [-160y^2 + \right. \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 1 :** Calcul d'un volume

On considère la fonction continue  $f$  à deux variables définie sur un rectangle  $R = [2, 10] \times [1, 7]$  du plan  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} f: [2, 10] \times [1, 7] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \end{aligned}$$



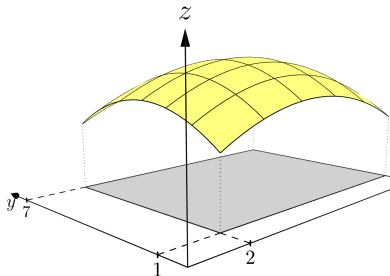
$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( \int_2^{10} -9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left[ -3x^3 + 54x^2 - 16xy^2 + 128xy \right]_{x=2}^{x=10} dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( [-160y^2 + 1280y + \right. \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 1** : Calcul d'un volume

On considère la fonction continue  $f$  à deux variables définie sur un rectangle  $R = [2, 10] \times [1, 7]$  du plan  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} f: [2, 10] \times [1, 7] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \end{aligned}$$



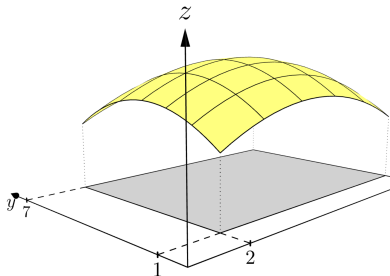
$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( \int_2^{10} -9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left[ -3x^3 + 54x^2 - 16xy^2 + 128xy \right]_{x=2}^{x=10} dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( [-160y^2 + 1280y + 2400] - [ \right. \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 1 :** Calcul d'un volume

On considère la fonction continue  $f$  à deux variables définie sur un rectangle  $R = [2, 10] \times [1, 7]$  du plan  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} f: [2, 10] \times [1, 7] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \end{aligned}$$



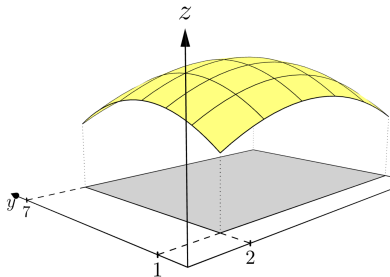
$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( \int_2^{10} -9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left[ -3x^3 + 54x^2 - 16xy^2 + 128xy \right]_{x=2}^{x=10} dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( [-160y^2 + 1280y + 2400] - [-32y^2 + \right. \end{aligned}$$

### Exemple n° 1 : Calcul d'un volume

On considère la fonction continue  $f$  à deux variables définie sur un rectangle  $R = [2, 10] \times [1, 7]$  du plan  $\mathbb{R}^2$  :

$$f: [2, 10] \times [1, 7] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144}$$



$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( \int_2^{10} -9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left[ -3x^3 + 54x^2 - 16xy^2 + 128xy \right]_{x=2}^{x=10} dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( [-160y^2 + 1280y + 2400] - [-32y^2 + 256y + 192] \right) dy \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( \int_2^{10} -9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left[ -3x^3 - 16xy^2 + 54x^2 + 128xy \right]_{x=2}^{x=10} dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( [-160y^2 + 1280y + 2400] - [-32y^2 + 256y + 192] \right) dy \\ &= \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( \int_2^{10} -9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left[ -3x^3 - 16xy^2 + 54x^2 + 128xy \right]_{x=2}^{x=10} dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( [-160y^2 + 1280y + 2400] - [-32y^2 + 256y + 192] \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 (-128y^2 + 1024y +\end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( \int_2^{10} -9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left[ -3x^3 - 16xy^2 + 54x^2 + 128xy \right]_{x=2}^{x=10} dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( [-160y^2 + 1280y + 2400] - [-32y^2 + 256y + 192] \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 (-128y^2 + 1024y + 2208) \, dy \\ &= \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( \int_2^{10} -9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left[ -3x^3 - 16xy^2 + 54x^2 + 128xy \right]_{x=2}^{x=10} dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( [-160y^2 + 1280y + 2400] - [-32y^2 + 256y + 192] \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 (-128y^2 + 1024y + 2208) \, dy \\ &= \frac{1}{144} \left[ -\frac{128}{3}y^3 + \right.\end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( \int_2^{10} -9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left[ -3x^3 - 16xy^2 + 54x^2 + 128xy \right]_{x=2}^{x=10} dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( [-160y^2 + 1280y + 2400] - [-32y^2 + 256y + 192] \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 (-128y^2 + 1024y + 2208) \, dy \\ &= \frac{1}{144} \left[ -\frac{128}{3}y^3 + 512y^2 + 2208y \right]_1^7 =\end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( \int_2^{10} -9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left[ -3x^3 - 16xy^2 + 54x^2 + 128xy \right]_{x=2}^{x=10} dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( [-160y^2 + 1280y + 2400] - [-32y^2 + 256y + 192] \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 (-128y^2 + 1024y + 2208) \, dy \\ &= \frac{1}{144} \left[ -\frac{128}{3}y^3 + 512y^2 + 2208y \right]_1^7 = \frac{1}{144} \left[ \frac{77728}{3} - \frac{8032}{3} \right] \\ &= \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( \int_2^{10} -9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left[ -3x^3 - 16xy^2 + 54x^2 + 128xy \right]_{x=2}^{x=10} dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( [-160y^2 + 1280y + 2400] - [-32y^2 + 256y + 192] \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 (-128y^2 + 1024y + 2208) \, dy \\ &= \frac{1}{144} \left[ -\frac{128}{3}y^3 + 512y^2 + 2208y \right]_1^7 = \frac{1}{144} \left[ \frac{77728}{3} - \frac{8032}{3} \right] \\ &= \frac{1}{3 \times 144} [77728 - 8032] =\end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( \int_2^{10} -9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left[ -3x^3 - 16xy^2 + 54x^2 + 128xy \right]_{x=2}^{x=10} dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( [-160y^2 + 1280y + 2400] - [-32y^2 + 256y + 192] \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 (-128y^2 + 1024y + 2208) \, dy \\ &= \frac{1}{144} \left[ -\frac{128}{3}y^3 + 512y^2 + 2208y \right]_1^7 = \frac{1}{144} \left[ \frac{77728}{3} - \frac{8032}{3} \right] \\ &= \frac{1}{3 \times 144} [77728 - 8032] = \frac{69696}{432} =\end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) \, dx \, dy &= \int_1^7 \left( \int_2^{10} \frac{-9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y}{144} \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( \int_2^{10} -9x^2 + 108x - 16y^2 + 128y \, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left[ -3x^3 - 16xy^2 + 54x^2 + 128xy \right]_{x=2}^{x=10} dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 \left( [-160y^2 + 1280y + 2400] - [-32y^2 + 256y + 192] \right) dy \\ &= \frac{1}{144} \int_1^7 (-128y^2 + 1024y + 2208) \, dy \\ &= \frac{1}{144} \left[ -\frac{128}{3}y^3 + 512y^2 + 2208y \right]_1^7 = \frac{1}{144} \left[ \frac{77728}{3} - \frac{8032}{3} \right] \\ &= \frac{1}{3 \times 144} [77728 - 8032] = \frac{69696}{432} = \frac{484}{3}\end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 2** : Calculons de deux façons différentes  $\iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle

$[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy =$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 2** : Calculons de deux façons différentes  $\iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy = \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \cos(x + y) \, dx \right) dy =$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 2** : Calculons de deux façons différentes  $\iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy = \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \cos(x + y) \, dx \right) dy = \int_0^\pi \left[ \sin(x + y) \right]_{x=0}^{x=2\pi} dy$$
$$=$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 2** : Calculons de deux façons différentes  $\iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\begin{aligned} \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy &= \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \cos(x + y) \, dx \right) dy = \int_0^\pi \left[ \sin(x + y) \right]_{x=0}^{x=2\pi} dy \\ &= \int_0^\pi \left[ \sin(2\pi + y) - \sin(y) \right] dy = \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 2** : Calculons de deux façons différentes  $\iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\begin{aligned} \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy &= \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \cos(x + y) \, dx \right) dy = \int_0^\pi \left[ \sin(x + y) \right]_{x=0}^{x=2\pi} dy \\ &= \int_0^\pi \left[ \sin(2\pi + y) - \sin(y) \right] dy = \int_0^\pi 0 \, dy = 0 \end{aligned}$$

Deuxième méthode :

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 2** : Calculons de deux façons différentes  $\iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\begin{aligned} \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy &= \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \cos(x + y) \, dx \right) dy = \int_0^\pi \left[ \sin(x + y) \right]_{x=0}^{x=2\pi} dy \\ &= \int_0^\pi \left[ \sin(2\pi + y) - \sin(y) \right] dy = \int_0^\pi 0 \, dy = 0 \end{aligned}$$

Deuxième méthode :

$$\iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy =$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 2** : Calculons de deux façons différentes  $\iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\begin{aligned} \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy &= \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \cos(x + y) \, dx \right) dy = \int_0^\pi \left[ \sin(x + y) \right]_{x=0}^{x=2\pi} dy \\ &= \int_0^\pi \left[ \sin(2\pi + y) - \sin(y) \right] dy = \int_0^\pi 0 \, dy = 0 \end{aligned}$$

Deuxième méthode :

$$\iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \cos(x + y) \, dy \right) dx =$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 2** : Calculons de deux façons différentes  $\iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\begin{aligned} \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy &= \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \cos(x + y) \, dx \right) dy = \int_0^\pi \left[ \sin(x + y) \right]_{x=0}^{x=2\pi} dy \\ &= \int_0^\pi \left[ \sin(2\pi + y) - \sin(y) \right] dy = \int_0^\pi 0 \, dy = 0 \end{aligned}$$

Deuxième méthode :

$$\begin{aligned} \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \cos(x + y) \, dy \right) dx = \int_0^{2\pi} \left[ \sin(x + y) \right]_{y=0}^{y=\pi} dx \\ &= \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 2** : Calculons de deux façons différentes  $\iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\begin{aligned}\iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy &= \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \cos(x + y) \, dx \right) dy = \int_0^\pi \left[ \sin(x + y) \right]_{x=0}^{x=2\pi} dy \\ &= \int_0^\pi \left[ \sin(2\pi + y) - \sin(y) \right] dy = \int_0^\pi 0 \, dy = 0\end{aligned}$$

Deuxième méthode :

$$\begin{aligned}\iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \cos(x + y) \, dy \right) dx = \int_0^{2\pi} \left[ \sin(x + y) \right]_{y=0}^{y=\pi} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \sin(x + \pi) - \sin(x) \right) dx \\ &= \end{aligned}$$

**Exemple n° 2** : Calculons de deux façons différentes  $\iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\begin{aligned} \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy &= \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \cos(x + y) \, dx \right) dy = \int_0^\pi \left[ \sin(x + y) \right]_{x=0}^{x=2\pi} dy \\ &= \int_0^\pi \left[ \sin(2\pi + y) - \sin(y) \right] dy = \int_0^\pi 0 \, dy = 0 \end{aligned}$$

Deuxième méthode :

$$\begin{aligned} \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \cos(x + y) \, dy \right) dx = \int_0^{2\pi} \left[ \sin(x + y) \right]_{y=0}^{y=\pi} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \sin(x + \pi) - \sin(x) \right) dx \\ &= \int_0^{2\pi} -2 \sin(x) \, dx = \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 2** : Calculons de deux façons différentes  $\iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\begin{aligned} \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy &= \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \cos(x + y) \, dx \right) dy = \int_0^\pi \left[ \sin(x + y) \right]_{x=0}^{x=2\pi} dy \\ &= \int_0^\pi \left[ \sin(2\pi + y) - \sin(y) \right] dy = \int_0^\pi 0 \, dy = 0 \end{aligned}$$

Deuxième méthode :

$$\begin{aligned} \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \cos(x + y) \, dy \right) dx = \int_0^{2\pi} \left[ \sin(x + y) \right]_{y=0}^{y=\pi} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \sin(x + \pi) - \sin(x) \right) dx \\ &= \int_0^{2\pi} -2 \sin(x) \, dx = -2 \left[ -\cos(x) \right]_0^{2\pi} = \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 2** : Calculons de deux façons différentes  $\iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

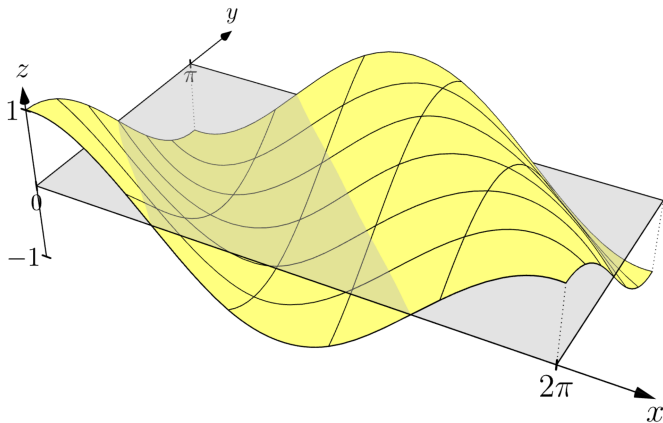
$$\begin{aligned} \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy &= \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \cos(x + y) \, dx \right) dy = \int_0^\pi \left[ \sin(x + y) \right]_{x=0}^{x=2\pi} dy \\ &= \int_0^\pi \left[ \sin(2\pi + y) - \sin(y) \right] dy = \int_0^\pi 0 \, dy = 0 \end{aligned}$$

Deuxième méthode :

$$\begin{aligned} \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \cos(x + y) \, dy \right) dx = \int_0^{2\pi} \left[ \sin(x + y) \right]_{y=0}^{y=\pi} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \sin(x + \pi) - \sin(x) \right) dx \\ &= \int_0^{2\pi} -2 \sin(x) \, dx = -2 \left[ -\cos(x) \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

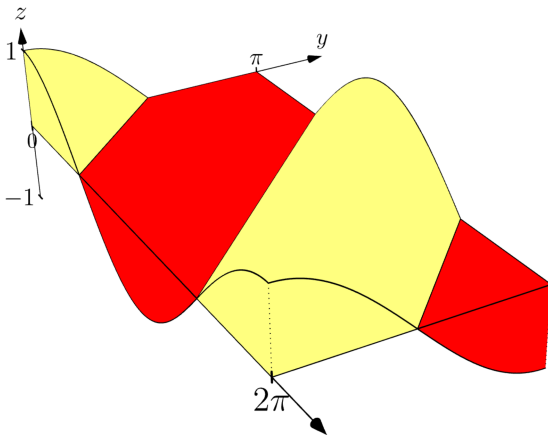
Exemple n° 2 : 
$$\iint_{[0,2\pi] \times [0,\pi]} \cos(x+y) \, dx \, dy = 0$$



Interprétons géométriquement cette nullité : l'intégrale est nulle, car les volumes situés sous le plan (Oxy), sont comptés négativement alors que ceux situés au-dessus le sont positivement. Les volumes positifs se complètent avec les volumes négatifs pour donner un volume algébrique nul.

## II. L'intégrale double.

Exemple n° 2 : 
$$\iint_{[0,2\pi] \times [0,\pi]} \cos(x+y) \, dx \, dy = 0$$



Interprétons géométriquement cette nullité : l'intégrale est nulle, car les volumes situés sous le plan (Oxy), sont comptés négativement alors que ceux situés au-dessus le sont positivement. Les volumes positifs se complètent avec les volumes négatifs pour donner un volume algébrique nul.

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 3** : En déduire  $\iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy =$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 3** : En déduire  $\iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\begin{aligned} \iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy &= \iint_R 1 \, dx \, dy + \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy \\ &= \end{aligned}$$

**Exemple n° 3** : En déduire  $\iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\begin{aligned}\iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy &= \iint_R 1 \, dx \, dy + \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} 1 \, dx \right) dy =\end{aligned}$$

**Exemple n° 3** : En déduire  $\iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\begin{aligned}\iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy &= \iint_R 1 \, dx \, dy + \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} 1 \, dx \right) dy = \int_0^\pi [x]_{x=0}^{x=2\pi} dy \\ &= \end{aligned}$$

**Exemple n° 3** : En déduire  $\iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\begin{aligned}\iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy &= \iint_R 1 \, dx \, dy + \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} 1 \, dx \right) dy = \int_0^\pi [x]_{x=0}^{x=2\pi} dy \\ &= \int_0^\pi 2\pi \, dy = [2\pi y]_0^\pi =\end{aligned}$$

**Exemple n° 3** : En déduire  $\iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\begin{aligned}\iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy &= \iint_R 1 \, dx \, dy + \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} 1 \, dx \right) dy = \int_0^\pi [x]_{x=0}^{x=2\pi} dy \\ &= \int_0^\pi 2\pi \, dy = [2\pi y]_0^\pi = 2\pi \times \pi =\end{aligned}$$

**Exemple n° 3** : En déduire  $\iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\begin{aligned}\iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy &= \iint_R 1 \, dx \, dy + \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} 1 \, dx \right) dy = \int_0^\pi [x]_{x=0}^{x=2\pi} dy \\ &= \int_0^\pi 2\pi \, dy = [2\pi y]_0^\pi = 2\pi \times \pi = 2\pi^2\end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 3 :** En déduire  $\iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\begin{aligned}\iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy &= \iint_R 1 \, dx \, dy + \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} 1 \, dx \right) dy = \int_0^\pi [x]_{x=0}^{x=2\pi} dy \\ &= \int_0^\pi 2\pi \, dy = [2\pi y]_0^\pi = 2\pi \times \pi = 2\pi^2\end{aligned}$$



### Théorème : de Fubini

Si  $f$  est une fonction définie et continue sur un rectangle  $R = [a, b] \times [c, d]$ , alors :

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 3 :** En déduire  $\iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\begin{aligned}\iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy &= \iint_R 1 \, dx \, dy + \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} 1 \, dx \right) dy = \int_0^\pi [x]_{x=0}^{x=2\pi} dy \\ &= \int_0^\pi 2\pi \, dy = [2\pi y]_0^\pi = 2\pi \times \pi = 2\pi^2\end{aligned}$$



### Théorème : de Fubini

Si  $f$  est une fonction définie et continue sur un rectangle  $R = [a, b] \times [c, d]$ , alors :

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$

En particulier, si  $f(x, y) = g(x)h(y)$ , alors on dit que la fonction est à **variables séparées** et on obtient :

**Exemple n° 3 :** En déduire  $\iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy$  où  $R$  est le rectangle  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

$$\begin{aligned} \iint_R (1 + \cos(x + y)) \, dx \, dy &= \iint_R 1 \, dx \, dy + \iint_R \cos(x + y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} 1 \, dx \right) dy = \int_0^\pi [x]_{x=0}^{x=2\pi} dy \\ &= \int_0^\pi 2\pi \, dy = [2\pi y]_0^\pi = 2\pi \times \pi = 2\pi^2 \end{aligned}$$



### Théorème : de Fubini

Si  $f$  est une fonction définie et continue sur un rectangle  $R = [a, b] \times [c, d]$ , alors :

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$

En particulier, si  $f(x, y) = g(x)h(y)$ , alors on dit que la fonction est à **variables séparées** et on obtient :

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \left( \int_a^b g(x) \, dx \right) \left( \int_c^d h(y) \, dy \right)$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \text{ et } J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \text{ et } J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

❶  $I =$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \text{ et } J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

❶  $I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt =$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \text{ et } J = \int_0^{\pi} \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

$$\textcircled{1} I = \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^{\pi} \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt =$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \text{ et } J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

$$\textcircled{1} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt =$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \text{ et } J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

$$\bullet I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = [\sin(t)]_0^\pi =$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \text{ et } J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

❶  $I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = [\sin(t)]_0^\pi = 0$

❷  $I =$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \text{ et } J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

$$\textcircled{1} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = [\sin(t)]_0^\pi = 0$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \cos(t) \sin(x) \, dt \, dx =$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \text{ et } J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

$$\textcircled{1} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = [\sin(t)]_0^\pi = 0$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \cos(t) \sin(x) \, dt \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) [\sin(t)]_0^\pi \, dx =$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \text{ et } J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

$$\textcircled{1} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = [\sin(t)]_0^\pi = 0$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \cos(t) \sin(x) \, dt \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \left[ \sin(t) \right]_0^\pi dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times 0 \, dx = 0$$

$$\textcircled{3} \quad I =$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \text{ et } J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

$$\textcircled{1} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = \left[ \sin(t) \right]_0^\pi = 0$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \cos(t) \sin(x) \, dt \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \left[ \sin(t) \right]_0^\pi dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times 0 \, dx = 0$$

$$\textcircled{3} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt =$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \text{ et } J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

$$\textcircled{1} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = \left[ \sin(t) \right]_0^\pi = 0$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \cos(t) \sin(x) \, dt \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \left[ \sin(t) \right]_0^\pi dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times 0 \, dx = 0$$

$$\textcircled{3} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \left( \int_0^\pi \cos(t) \, dt \right) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx \right).$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

$$\textcircled{1} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = \left[ \sin(t) \right]_0^\pi = 0$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \cos(t) \sin(x) \, dt \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \left[ \sin(t) \right]_0^\pi dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times 0 \, dx = 0$$

$$\textcircled{3} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \underbrace{\left( \int_0^\pi \cos(t) \, dt \right)}_{=0} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx \right).$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = [\sin(t)]_0^\pi = 0$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \cos(t) \sin(x) \, dt \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) [\sin(t)]_0^\pi \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times 0 \, dx = 0$$

$$\textcircled{3} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \underbrace{\left( \int_0^\pi \cos(t) \, dt \right)}_{=0} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx \right).$$

$$\textcircled{4} \quad J =$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = [\sin(t)]_0^\pi = 0$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \cos(t) \sin(x) \, dt \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) [\sin(t)]_0^\pi \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times 0 \, dx = 0$$

$$\textcircled{3} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \underbrace{\left( \int_0^\pi \cos(t) \, dt \right)}_{=0} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx \right).$$

$$\textcircled{4} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt =$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = [\sin(t)]_0^\pi = 0$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \cos(t) \sin(x) \, dt \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) [\sin(t)]_0^\pi \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times 0 \, dx = 0$$

$$\textcircled{3} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \underbrace{\left( \int_0^\pi \cos(t) \, dt \right)}_{=0} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx \right).$$

$$\textcircled{4} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt = \int_0^\pi 8 \sin(t) \, dt =$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = [\sin(t)]_0^\pi = 0$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \cos(t) \sin(x) \, dt \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) [\sin(t)]_0^\pi \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times 0 \, dx = 0$$

$$\textcircled{3} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \underbrace{\left( \int_0^\pi \cos(t) \, dt \right)}_{=0} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx \right).$$

$$\textcircled{4} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt = \int_0^\pi 8 \sin(t) \, dt = 8 [-\cos(t)]_0^\pi =$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = [\sin(t)]_0^\pi = 0$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \cos(t) \sin(x) \, dt \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) [\sin(t)]_0^\pi \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times 0 \, dx = 0$$

$$\textcircled{3} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \underbrace{\left( \int_0^\pi \cos(t) \, dt \right)}_{=0} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx \right).$$

$$\textcircled{1} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt = \int_0^\pi 8 \sin(t) \, dt = 8 [-\cos(t)]_0^\pi = 16$$

$$\textcircled{2} \quad J =$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = [\sin(t)]_0^\pi = 0$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \cos(t) \sin(x) \, dt \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) [\sin(t)]_0^\pi \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times 0 \, dx = 0$$

$$\textcircled{3} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \underbrace{\left( \int_0^\pi \cos(t) \, dt \right)}_{=0} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx \right).$$

$$\textcircled{1} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt = \int_0^\pi 8 \sin(t) \, dt = 8 [-\cos(t)]_0^\pi = 16$$

$$\textcircled{2} \quad J = \int_0^2 \int_0^\pi 3x^2 \sin(t) \, dt \, dx =$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = [\sin(t)]_0^\pi = 0$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \cos(t) \sin(x) \, dt \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) [\sin(t)]_0^\pi \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times 0 \, dx = 0$$

$$\textcircled{3} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \underbrace{\left( \int_0^\pi \cos(t) \, dt \right)}_{=0} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx \right).$$

$$\textcircled{1} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt = \int_0^\pi 8 \sin(t) \, dt = 8 [-\cos(t)]_0^\pi = 16$$

$$\textcircled{2} \quad J = \int_0^2 \int_0^\pi 3x^2 \sin(t) \, dt \, dx = \int_0^2 6x^2 \, dx =$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = [\sin(t)]_0^\pi = 0$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \cos(t) \sin(x) \, dt \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) [\sin(t)]_0^\pi \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times 0 \, dx = 0$$

$$\textcircled{3} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \underbrace{\left( \int_0^\pi \cos(t) \, dt \right)}_{=0} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx \right).$$

$$\textcircled{1} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt = \int_0^\pi 8 \sin(t) \, dt = 8 [-\cos(t)]_0^\pi = 16$$

$$\textcircled{2} \quad J = \int_0^2 \int_0^\pi 3x^2 \sin(t) \, dt \, dx = \int_0^2 6x^2 \, dx = 16$$

$$\textcircled{3} \quad J =$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \text{ et } J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = [\sin(t)]_0^\pi = 0$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \cos(t) \sin(x) \, dt \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) [\sin(t)]_0^\pi \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times 0 \, dx = 0$$

$$\textcircled{3} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \underbrace{\left( \int_0^\pi \cos(t) \, dt \right)}_{=0} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx \right).$$

$$\textcircled{1} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt = \int_0^\pi 8 \sin(t) \, dt = 8 [-\cos(t)]_0^\pi = 16$$

$$\textcircled{2} \quad J = \int_0^2 \int_0^\pi 3x^2 \sin(t) \, dt \, dx = \int_0^2 6x^2 \, dx = 16$$

$$\textcircled{3} \quad J = \left( \int_0^2 3x^2 \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(t) \, dt \right) =$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = [\sin(t)]_0^\pi = 0$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \cos(t) \sin(x) \, dt \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) [\sin(t)]_0^\pi \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times 0 \, dx = 0$$

$$\textcircled{3} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \underbrace{\left( \int_0^\pi \cos(t) \, dt \right)}_{=0} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx \right).$$

$$\textcircled{1} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt = \int_0^\pi 8 \sin(t) \, dt = 8 [-\cos(t)]_0^\pi = 16$$

$$\textcircled{2} \quad J = \int_0^2 \int_0^\pi 3x^2 \sin(t) \, dt \, dx = \int_0^2 6x^2 \, dx = 16$$

$$\textcircled{3} \quad J = \left( \int_0^2 3x^2 \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(t) \, dt \right) = 8 \times$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = [\sin(t)]_0^\pi = 0$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \cos(t) \sin(x) \, dt \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) [\sin(t)]_0^\pi \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times 0 \, dx = 0$$

$$\textcircled{3} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \underbrace{\left( \int_0^\pi \cos(t) \, dt \right)}_{=0} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx \right).$$

$$\textcircled{1} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt = \int_0^\pi 8 \sin(t) \, dt = 8 [-\cos(t)]_0^\pi = 16$$

$$\textcircled{2} \quad J = \int_0^2 \int_0^\pi 3x^2 \sin(t) \, dt \, dx = \int_0^2 6x^2 \, dx = 16$$

$$\textcircled{3} \quad J = \left( \int_0^2 3x^2 \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(t) \, dt \right) = 8 \times 2 = 16$$

**Exercice n° 1** : Calcule de trois façons différentes chacune des deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \int_0^\pi \cos(t) \left[ -\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^\pi \cos(t) \, dt = [\sin(t)]_0^\pi = 0$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \cos(t) \sin(x) \, dt \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) [\sin(t)]_0^\pi \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times 0 \, dx = 0$$

$$\textcircled{3} \quad I = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(x) \, dx \, dt = \underbrace{\left( \int_0^\pi \cos(t) \, dt \right)}_{=0} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx \right).$$

$$\textcircled{1} \quad J = \int_0^\pi \int_0^2 3x^2 \sin(t) \, dx \, dt = \int_0^\pi 8 \sin(t) \, dt = 8 [-\cos(t)]_0^\pi = 16$$

$$\textcircled{2} \quad J = \int_0^2 \int_0^\pi 3x^2 \sin(t) \, dt \, dx = \int_0^2 6x^2 \, dx = 16$$

$$\textcircled{3} \quad J = \left( \int_0^2 3x^2 \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(t) \, dt \right) = 8 \times 2 = 16$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n°2** : Calcule les deux intégrales doubles suivantes lorsque  $R$  est le rectangle  $[0, 1] \times [0, \pi]$  :

$$1. \iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy \quad 2. \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy$$

[CORRIGÉ](#) :

## II. L'intégrale double.

**Exercice n°2** : Calcule les deux intégrales doubles suivantes lorsque  $R$  est le rectangle  $[0, 1] \times [0, \pi]$  :

$$1. \iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy \quad 2. \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

❶ Nous notons que l'intégrande  $x e^{x^2} \sin(y)$  est à variables séparées, donc :

## II. L'intégrale double.

**Exercice n°2** : Calcule les deux intégrales doubles suivantes lorsque  $R$  est le rectangle  $[0, 1] \times [0, \pi]$  :

$$1. \iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy \quad 2. \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

❶ Nous notons que l'intégrande  $x e^{x^2} \sin(y)$  est à variables séparées, donc :

$$\iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy =$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n°2** : Calcule les deux intégrales doubles suivantes lorsque  $R$  est le rectangle  $[0, 1] \times [0, \pi]$  :

$$1. \iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy \quad 2. \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

❶ Nous notons que l'intégrande  $x e^{x^2} \sin(y)$  est à variables séparées, donc :

$$\iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy = \left( \int_0^1 x e^{x^2} \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) \, dy \right) =$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n°2** : Calcule les deux intégrales doubles suivantes lorsque  $R$  est le rectangle  $[0, 1] \times [0, \pi]$  :

$$1. \iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy \quad 2. \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

❶ Nous notons que l'intégrande  $x e^{x^2} \sin(y)$  est à variables séparées, donc :

$$\iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy = \left( \int_0^1 x e^{x^2} \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) \, dy \right) = \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 \times \left[ -\cos(y) \right]_0^\pi =$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n°2** : Calcule les deux intégrales doubles suivantes lorsque  $R$  est le rectangle  $[0, 1] \times [0, \pi]$  :

$$1. \iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy \quad 2. \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

❶ Nous notons que l'intégrande  $x e^{x^2} \sin(y)$  est à variables séparées, donc :

$$\iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy = \left( \int_0^1 x e^{x^2} \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) \, dy \right) = \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 \times [-\cos(y)]_0^\pi = e - 1$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n°2** : Calcule les deux intégrales doubles suivantes lorsque  $R$  est le rectangle  $[0, 1] \times [0, \pi]$  :

$$1. \iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy \quad 2. \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

❶ Nous notons que l'intégrande  $x e^{x^2} \sin(y)$  est à variables séparées, donc :

$$\iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy = \left( \int_0^1 x e^{x^2} \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) \, dy \right) = \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 \times \left[ -\cos(y) \right]_0^\pi = e - 1$$

❷ Nous notons que l'intégrande  $x \sin(y) e^{x+\cos(y)} = x e^x \sin(y) e^{\cos(y)}$  est aussi à variables séparées, donc :

## II. L'intégrale double.

**Exercice n°2** : Calcule les deux intégrales doubles suivantes lorsque  $R$  est le rectangle  $[0, 1] \times [0, \pi]$  :

1. 
$$\iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy$$

2. 
$$\iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

❶ Nous notons que l'intégrande  $x e^{x^2} \sin(y)$  est à variables séparées, donc :

$$\iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy = \left( \int_0^1 x e^{x^2} \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) \, dy \right) = \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 \times \left[ -\cos(y) \right]_0^\pi = e - 1$$

❷ Nous notons que l'intégrande  $x \sin(y) e^{x+\cos(y)} = x e^x \sin(y) e^{\cos(y)}$  est aussi à variables séparées, donc :

$$\iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy =$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n°2** : Calcule les deux intégrales doubles suivantes lorsque  $R$  est le rectangle  $[0, 1] \times [0, \pi]$  :

1.  $\iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy$       2.  $\iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy$

CORRIGÉ :

❶ Nous notons que l'intégrande  $x e^{x^2} \sin(y)$  est à variables séparées, donc :

$$\iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy = \left( \int_0^1 x e^{x^2} \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) \, dy \right) = \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 \times \left[ -\cos(y) \right]_0^\pi = e - 1$$

❷ Nous notons que l'intégrande  $x \sin(y) e^{x+\cos(y)} = x e^x \sin(y) e^{\cos(y)}$  est aussi à variables séparées, donc :

$$\iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy = \left( \int_0^1 x e^x \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) e^{\cos(y)} \, dy \right)$$

=

## II. L'intégrale double.

**Exercice n°2** : Calcule les deux intégrales doubles suivantes lorsque  $R$  est le rectangle  $[0, 1] \times [0, \pi]$  :

$$1. \iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy \quad 2. \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

❶ Nous notons que l'intégrande  $x e^{x^2} \sin(y)$  est à variables séparées, donc :

$$\iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy = \left( \int_0^1 x e^{x^2} \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) \, dy \right) = \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 \times \left[ -\cos(y) \right]_0^\pi = e - 1$$

❷ Nous notons que l'intégrande  $x \sin(y) e^{x+\cos(y)} = x e^x \sin(y) e^{\cos(y)}$  est aussi à variables séparées, donc :

$$\begin{aligned} \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy &= \left( \int_0^1 x e^x \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) e^{\cos(y)} \, dy \right) \\ &= \left[ \quad \right]_0^1 \times \left[ \quad \right]_0^\pi = \end{aligned}$$

car, par IPP,  $\int x e^x \, dx =$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n°2** : Calcule les deux intégrales doubles suivantes lorsque  $R$  est le rectangle  $[0, 1] \times [0, \pi]$  :

$$1. \iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy \quad 2. \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

❶ Nous notons que l'intégrande  $x e^{x^2} \sin(y)$  est à variables séparées, donc :

$$\iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy = \left( \int_0^1 x e^{x^2} \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) \, dy \right) = \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 \times \left[ -\cos(y) \right]_0^\pi = e - 1$$

❷ Nous notons que l'intégrande  $x \sin(y) e^{x+\cos(y)} = x e^x \sin(y) e^{\cos(y)}$  est aussi à variables séparées, donc :

$$\begin{aligned} \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy &= \left( \int_0^1 x e^x \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) e^{\cos(y)} \, dy \right) \\ &= \left[ \quad \right]_0^1 \times \left[ \quad \right]_0^\pi = \end{aligned}$$

car, par IPP,  $\int x e^x \, dx = x e^x -$

**Exercice n°2** : Calcule les deux intégrales doubles suivantes lorsque  $R$  est le rectangle  $[0, 1] \times [0, \pi]$  :

$$1. \iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy \quad 2. \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

❶ Nous notons que l'intégrande  $x e^{x^2} \sin(y)$  est à variables séparées, donc :

$$\iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy = \left( \int_0^1 x e^{x^2} \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) \, dy \right) = \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 \times \left[ -\cos(y) \right]_0^\pi = e - 1$$

❷ Nous notons que l'intégrande  $x \sin(y) e^{x+\cos(y)} = x e^x \sin(y) e^{\cos(y)}$  est aussi à variables séparées, donc :

$$\begin{aligned} \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy &= \left( \int_0^1 x e^x \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) e^{\cos(y)} \, dy \right) \\ &= \left[ \quad \right]_0^1 \times \left[ \quad \right]_0^\pi = \end{aligned}$$

car, par IPP,  $\int x e^x \, dx = x e^x - \int 1 \times e^x \, dx =$

**Exercice n°2** : Calcule les deux intégrales doubles suivantes lorsque  $R$  est le rectangle  $[0, 1] \times [0, \pi]$  :

$$1. \iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy \quad 2. \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

❶ Nous notons que l'intégrande  $x e^{x^2} \sin(y)$  est à variables séparées, donc :

$$\iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy = \left( \int_0^1 x e^{x^2} \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) \, dy \right) = \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 \times \left[ -\cos(y) \right]_0^\pi = e - 1$$

❷ Nous notons que l'intégrande  $x \sin(y) e^{x+\cos(y)} = x e^x \sin(y) e^{\cos(y)}$  est aussi à variables séparées, donc :

$$\begin{aligned} \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy &= \left( \int_0^1 x e^x \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) e^{\cos(y)} \, dy \right) \\ &= \left[ \quad \quad \right]_0^1 \times \left[ \quad \quad \right]_0^\pi = \end{aligned}$$

car, par IPP,  $\int x e^x \, dx = x e^x - \int 1 \times e^x \, dx = x e^x - e^x$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n°2** : Calcule les deux intégrales doubles suivantes lorsque  $R$  est le rectangle  $[0, 1] \times [0, \pi]$  :

$$1. \iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy \quad 2. \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

❶ Nous notons que l'intégrande  $x e^{x^2} \sin(y)$  est à variables séparées, donc :

$$\iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy = \left( \int_0^1 x e^{x^2} \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) \, dy \right) = \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 \times \left[ -\cos(y) \right]_0^\pi = e - 1$$

❷ Nous notons que l'intégrande  $x \sin(y) e^{x+\cos(y)} = x e^x \sin(y) e^{\cos(y)}$  est aussi à variables séparées, donc :

$$\begin{aligned} \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy &= \left( \int_0^1 x e^x \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) e^{\cos(y)} \, dy \right) \\ &= \left[ (x-1)e^x \right]_0^1 \times \left[ \quad \right]_0^\pi = \end{aligned}$$

car, par IPP,  $\int x e^x \, dx = x e^x - \int 1 \times e^x \, dx = x e^x - e^x$

**Exercice n°2** : Calcule les deux intégrales doubles suivantes lorsque  $R$  est le rectangle  $[0, 1] \times [0, \pi]$  :

$$1. \iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy \quad 2. \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

❶ Nous notons que l'intégrande  $x e^{x^2} \sin(y)$  est à variables séparées, donc :

$$\iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy = \left( \int_0^1 x e^{x^2} \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) \, dy \right) = \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 \times \left[ -\cos(y) \right]_0^\pi = e - 1$$

❷ Nous notons que l'intégrande  $x \sin(y) e^{x+\cos(y)} = x e^x \sin(y) e^{\cos(y)}$  est aussi à variables séparées, donc :

$$\begin{aligned} \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy &= \left( \int_0^1 x e^x \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) e^{\cos(y)} \, dy \right) \\ &= \left[ (x-1)e^x \right]_0^1 \times \left[ -e^{\cos(y)} \right]_0^\pi = \end{aligned}$$

car, par IPP,  $\int x e^x \, dx = x e^x - \int 1 \times e^x \, dx = x e^x - e^x$

**Exercice n°2** : Calcule les deux intégrales doubles suivantes lorsque  $R$  est le rectangle  $[0, 1] \times [0, \pi]$  :

$$1. \iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy \quad 2. \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

❶ Nous notons que l'intégrande  $x e^{x^2} \sin(y)$  est à variables séparées, donc :

$$\iint_R x e^{x^2} \sin(y) \, dx \, dy = \left( \int_0^1 x e^{x^2} \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) \, dy \right) = \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 \times \left[ -\cos(y) \right]_0^\pi = e - 1$$

❷ Nous notons que l'intégrande  $x \sin(y) e^{x+\cos(y)} = x e^x \sin(y) e^{\cos(y)}$  est aussi à variables séparées, donc :

$$\begin{aligned} \iint_R x \sin(y) e^{x+\cos(y)} \, dx \, dy &= \left( \int_0^1 x e^x \, dx \right) \left( \int_0^\pi \sin(y) e^{\cos(y)} \, dy \right) \\ &= \left[ (x-1)e^x \right]_0^1 \times \left[ -e^{\cos(y)} \right]_0^\pi = -e^{-1} + e \end{aligned}$$

$$\text{car, par IPP, } \int x e^x \, dx = x e^x - \int 1 \times e^x \, dx = x e^x - e^x$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$① \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$② \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2}$$

$$④ \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

[CORRIGÉ](#) :

**Exercice n°3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$① \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$② \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2}$$

$$④ \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$① \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy =$$

**Exercice n° 3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$① \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$② \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2}$$

$$④ \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$① \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy = \int_0^2 \left[ \frac{x^2 y}{2} \right]_{-1}^3 \, dy =$$

**Exercice n° 3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$\textcircled{2} \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$\textcircled{3} \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2}$$

$$\textcircled{4} \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy = \int_0^2 \left[ \frac{x^2 y}{2} \right]_{-1}^3 \, dy = \int_0^2 4y \, dy =$$

**Exercice n° 3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$\textcircled{2} \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$\textcircled{3} \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2}$$

$$\textcircled{4} \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy = \int_0^2 \left[ \frac{x^2 y}{2} \right]_{-1}^3 \, dy = \int_0^2 4y \, dy = 8$$

**Exercice n°3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$\textcircled{2} \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$\textcircled{3} \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2}$$

$$\textcircled{4} \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy = \int_0^2 \left[ \frac{x^2 y}{2} \right]_{-1}^3 \, dy = \int_0^2 4y \, dy = 8$$

$$\textcircled{2} \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy =$$

**Exercice n°3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$\textcircled{2} \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$\textcircled{3} \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2}$$

$$\textcircled{4} \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy = \int_0^2 \left[ \frac{x^2 y}{2} \right]_{-1}^3 \, dy = \int_0^2 4y \, dy = 8$$

$$\textcircled{2} \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \left[ \frac{2x^3}{3} + 3xy \right]_{-y}^y \, dy$$

=

**Exercice n°3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$\textcircled{2} \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$\textcircled{3} \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x+y+1)^2}$$

$$\textcircled{4} \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy = \int_0^2 \left[ \frac{x^2 y}{2} \right]_{-1}^3 \, dy = \int_0^2 4y \, dy = 8$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy &= \int_{-1}^1 \left[ \frac{2x^3}{3} + 3xy \right]_{-y}^y \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{2y^3 + 9y^2}{3} - \frac{-2y^3 - 9y^2}{3} \right) \, dy \\ &= \end{aligned}$$

**Exercice n°3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$\textcircled{2} \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$\textcircled{3} \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x+y+1)^2}$$

$$\textcircled{4} \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy = \int_0^2 \left[ \frac{x^2 y}{2} \right]_{-1}^3 \, dy = \int_0^2 4y \, dy = 8$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy &= \int_{-1}^1 \left[ \frac{2x^3}{3} + 3xy \right]_{-y}^y \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{2y^3 + 9y^2}{3} - \frac{-2y^3 - 9y^2}{3} \right) \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{4}{3}y^3 + 6y^2 \right) \, dy = \end{aligned}$$

**Exercice n°3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$\textcircled{2} \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$\textcircled{3} \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2}$$

$$\textcircled{4} \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy = \int_0^2 \left[ \frac{x^2 y}{2} \right]_{-1}^3 \, dy = \int_0^2 4y \, dy = 8$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy &= \int_{-1}^1 \left[ \frac{2x^3}{3} + 3xy \right]_{-y}^y \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{2y^3 + 9y^2}{3} - \frac{-2y^3 - 9y^2}{3} \right) \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{4}{3}y^3 + 6y^2 \right) \, dy = \left[ \frac{1}{3}y^4 + 2y^3 \right]_{-1}^1 \, dy = \end{aligned}$$

**Exercice n°3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$\textcircled{2} \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$\textcircled{3} \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2}$$

$$\textcircled{4} \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy = \int_0^2 \left[ \frac{x^2 y}{2} \right]_{-1}^3 \, dy = \int_0^2 4y \, dy = 8$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy &= \int_{-1}^1 \left[ \frac{2x^3}{3} + 3xy \right]_{-y}^y \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{2y^3 + 9y^2}{3} - \frac{-2y^3 - 9y^2}{3} \right) \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{4}{3}y^3 + 6y^2 \right) \, dy = \left[ \frac{1}{3}y^4 + 2y^3 \right]_{-1}^1 \, dy = 4 \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$① \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$② \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2}$$

$$④ \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

[CORRIGÉ](#) :

**Exercice n°3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$① \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$② \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2}$$

$$④ \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2} =$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$① \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$② \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2}$$

$$④ \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(x + y + 1)^2} \, dx \, dy =$$

**Exercice n° 3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$① \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$② \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2}$$

$$④ \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(x + y + 1)^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{-1}{x + y + 1} \right]_0^1 \, dy$$

=

**Exercice n°3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$\textcircled{2} \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$\textcircled{3} \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x+y+1)^2}$$

$$\textcircled{4} \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x+y+1)^2} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(x+y+1)^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{-1}{x+y+1} \right]_0^1 \, dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{-1}{y+2} + \frac{1}{y+1} \right) \, dy = \end{aligned}$$

**Exercice n°3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$① \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$② \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x+y+1)^2}$$

$$④ \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$\begin{aligned} ③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x+y+1)^2} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(x+y+1)^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{-1}{x+y+1} \right]_0^1 \, dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{-1}{y+2} + \frac{1}{y+1} \right) \, dy = \left[ \ln(y+1) - \ln(y+2) \right]_0^1 \\ &= \end{aligned}$$

**Exercice n° 3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$① \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$② \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2}$$

$$④ \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$\begin{aligned} ③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(x + y + 1)^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{-1}{x + y + 1} \right]_0^1 \, dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{-1}{y + 2} + \frac{1}{y + 1} \right) \, dy = \left[ \ln(y + 1) - \ln(y + 2) \right]_0^1 \\ &= (\ln(2) - \ln(3)) - \end{aligned}$$

**Exercice n° 3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$① \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$② \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2}$$

$$④ \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$\begin{aligned} ③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(x + y + 1)^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{-1}{x + y + 1} \right]_0^1 \, dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{-1}{y + 2} + \frac{1}{y + 1} \right) \, dy = \left[ \ln(y + 1) - \ln(y + 2) \right]_0^1 \\ &= (\ln(2) - \ln(3)) - (0 - \ln(2)) = \end{aligned}$$

**Exercice n° 3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$\textcircled{2} \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$\textcircled{3} \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2}$$

$$\textcircled{4} \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(x + y + 1)^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{-1}{x + y + 1} \right]_0^1 \, dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{-1}{y + 2} + \frac{1}{y + 1} \right) \, dy = \left[ \ln(y + 1) - \ln(y + 2) \right]_0^1 \\ &= (\ln(2) - \ln(3)) - (0 - \ln(2)) = 2 \ln(2) - \ln(3) = \end{aligned}$$

**Exercice n° 3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$\textcircled{2} \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$\textcircled{3} \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2}$$

$$\textcircled{4} \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(x + y + 1)^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{-1}{x + y + 1} \right]_0^1 \, dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{-1}{y + 2} + \frac{1}{y + 1} \right) \, dy = \left[ \ln(y + 1) - \ln(y + 2) \right]_0^1 \\ &= (\ln(2) - \ln(3)) - (0 - \ln(2)) = 2 \ln(2) - \ln(3) = \ln \left( \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

**Exercice n°3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$① \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$② \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x+y+1)^2}$$

$$④ \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$\begin{aligned} ③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x+y+1)^2} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(x+y+1)^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{-1}{x+y+1} \right]_0^1 \, dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{-1}{y+2} + \frac{1}{y+1} \right) \, dy = \left[ \ln(y+1) - \ln(y+2) \right]_0^1 \\ &= (\ln(2) - \ln(3)) - (0 - \ln(2)) = 2 \ln(2) - \ln(3) = \ln \left( \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

$$④ \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy =$$

**Exercice n°3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$\textcircled{2} \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$\textcircled{3} \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2}$$

$$\textcircled{4} \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x + y + 1)^2} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(x + y + 1)^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{-1}{x + y + 1} \right]_0^1 \, dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{-1}{y + 2} + \frac{1}{y + 1} \right) \, dy = \left[ \ln(y + 1) - \ln(y + 2) \right]_0^1 \\ &= (\ln(2) - \ln(3)) - (0 - \ln(2)) = 2 \ln(2) - \ln(3) = \ln \left( \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy = \left( \int_{-1}^1 x^2 \, dx \right) \left( \int_1^2 \frac{dy}{y} \right) =$$

**Exercice n°3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$\textcircled{2} \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$\textcircled{3} \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x+y+1)^2}$$

$$\textcircled{4} \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x+y+1)^2} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(x+y+1)^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{-1}{x+y+1} \right]_0^1 \, dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{-1}{y+2} + \frac{1}{y+1} \right) \, dy = \left[ \ln(y+1) - \ln(y+2) \right]_0^1 \\ &= (\ln(2) - \ln(3)) - (0 - \ln(2)) = 2 \ln(2) - \ln(3) = \ln \left( \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy = \left( \int_{-1}^1 x^2 \, dx \right) \left( \int_1^2 \frac{dy}{y} \right) = \frac{2}{3} \times$$

**Exercice n°3** : Calcule les intégrales suivantes :

$$① \int_0^2 \int_{-1}^3 xy \, dx \, dy$$

$$② \int_{-1}^1 \int_{-y}^y (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$$

$$③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x+y+1)^2}$$

$$④ \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy$$

CORRIGÉ :

$$\begin{aligned} ③ \iint_{[0,1]^2} \frac{dx \, dy}{(x+y+1)^2} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(x+y+1)^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{-1}{x+y+1} \right]_0^1 \, dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{-1}{y+2} + \frac{1}{y+1} \right) \, dy = \left[ \ln(y+1) - \ln(y+2) \right]_0^1 \\ &= (\ln(2) - \ln(3)) - (0 - \ln(2)) = 2 \ln(2) - \ln(3) = \ln \left( \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

$$④ \iint_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} \, dx \, dy = \left( \int_{-1}^1 x^2 \, dx \right) \left( \int_1^2 \frac{dy}{y} \right) = \frac{2}{3} \times \ln(2)$$

### 1. Intégrale double sur un domaine quelconque.



#### Définition:

On dit que  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  est **intégrable** dans  $\mathcal{D}$  s'il existe un rectangle  $R$  contenant  $\mathcal{D}$  tel que la fonction  $\tilde{f}$  définie sur  $R$  par :  $\tilde{f} = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in \mathcal{D} \\ 0 & \text{si } (x, y) \in R \setminus \mathcal{D} \end{cases}$  est intégrable sur le rectangle  $R$ .

## 1. Intégrale double sur un domaine quelconque.



### Définition:

On dit que  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  est **intégrable** dans  $\mathcal{D}$  s'il existe un rectangle  $R$  contenant  $\mathcal{D}$  tel que la fonction  $\tilde{f}$  définie sur  $R$  par :

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in \mathcal{D} \\ 0 & \text{si } (x, y) \in R \setminus \mathcal{D} \end{cases}$$

est intégrable sur le rectangle  $R$ .

Remarque : Dans ce cas, 
$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_R \tilde{f}(x, y) \, dx \, dy$$

## 1. Intégrale double sur un domaine quelconque.



### Définition:

On dit que  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  est **intégrable** dans  $\mathcal{D}$  s'il existe un rectangle  $R$  contenant  $\mathcal{D}$  tel que la fonction  $\tilde{f}$  définie sur  $R$  par :

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in \mathcal{D} \\ 0 & \text{si } (x, y) \in R \setminus \mathcal{D} \end{cases}$$

est intégrable sur le rectangle  $R$ .

Remarque : Dans ce cas, 
$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_R \tilde{f}(x, y) \, dx \, dy$$

On démontre que cette définition ne dépend pas du choix du rectangle  $\mathcal{R}$ .



### Définition:

On dit qu'un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  est

- **régulier** selon l'axe des  $x$  s'il est délimité par deux droites horizontales  $y = c$  et  $y = d$ , et deux courbes continues  $x = \varphi_1(y)$  et  $x = \varphi_2(y)$  avec  $\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$  pour tout  $y \in [c, d]$ , autrement dit :



### Définition:

On dit qu'un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  est

- **régulier** selon l'axe des  $x$  s'il est délimité par deux droites horizontales  $y = c$  et  $y = d$ , et deux courbes continues  $x = \varphi_1(y)$  et  $x = \varphi_2(y)$  avec  $\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$  pour tout  $y \in [c, d]$ , autrement dit :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y \in [c, d], \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$$



### Définition:

On dit qu'un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  est

- **régulier** selon l'axe des  $x$  s'il est délimité par deux droites horizontales  $y = c$  et  $y = d$ , et deux courbes continues  $x = \varphi_1(y)$  et  $x = \varphi_2(y)$  avec  $\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$  pour tout  $y \in [c, d]$ , autrement dit :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y \in [c, d], \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$$

- **régulier** selon l'axe des  $y$  s'il est délimité par deux droites verticales  $x = a$  et  $x = b$ , et deux courbes continues  $y = \psi_1(x)$  et  $y = \psi_2(x)$  avec  $\psi_1(x) \leq \psi_2(x)$  pour tout  $x \in [a, b]$ , autrement dit :



### Définition:

On dit qu'un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  est

- **régulier** selon l'axe des  $x$  s'il est délimité par deux droites horizontales  $y = c$  et  $y = d$ , et deux courbes continues  $x = \varphi_1(y)$  et  $x = \varphi_2(y)$  avec  $\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$  pour tout  $y \in [c, d]$ , autrement dit :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y \in [c, d], \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$$

- **régulier** selon l'axe des  $y$  s'il est délimité par deux droites verticales  $x = a$  et  $x = b$ , et deux courbes continues  $y = \psi_1(x)$  et  $y = \psi_2(x)$  avec  $\psi_1(x) \leq \psi_2(x)$  pour tout  $x \in [a, b]$ , autrement dit :

$$\mathcal{D} =$$



### Définition:

On dit qu'un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  est

- **régulier** selon l'axe des  $x$  s'il est délimité par deux droites horizontales  $y = c$  et  $y = d$ , et deux courbes continues  $x = \varphi_1(y)$  et  $x = \varphi_2(y)$  avec  $\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$  pour tout  $y \in [c, d]$ , autrement dit :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y \in [c, d], \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$$

- **régulier** selon l'axe des  $y$  s'il est délimité par deux droites verticales  $x = a$  et  $x = b$ , et deux courbes continues  $y = \psi_1(x)$  et  $y = \psi_2(x)$  avec  $\psi_1(x) \leq \psi_2(x)$  pour tout  $x \in [a, b]$ , autrement dit :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in [a, b], \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x)\}$$



### Définition:

On dit qu'un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  est

- **régulier** selon l'axe des  $x$  s'il est délimité par deux droites horizontales  $y = c$  et  $y = d$ , et deux courbes continues  $x = \varphi_1(y)$  et  $x = \varphi_2(y)$  avec  $\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$  pour tout  $y \in [c, d]$ , autrement dit :

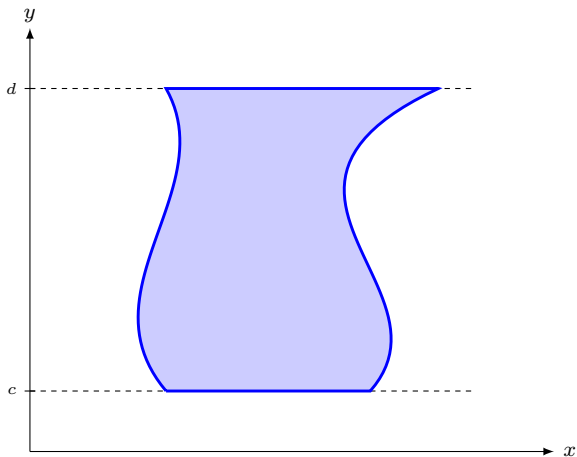
$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y \in [c, d], \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$$

- **régulier** selon l'axe des  $y$  s'il est délimité par deux droites verticales  $x = a$  et  $x = b$ , et deux courbes continues  $y = \psi_1(x)$  et  $y = \psi_2(x)$  avec  $\psi_1(x) \leq \psi_2(x)$  pour tout  $x \in [a, b]$ , autrement dit :

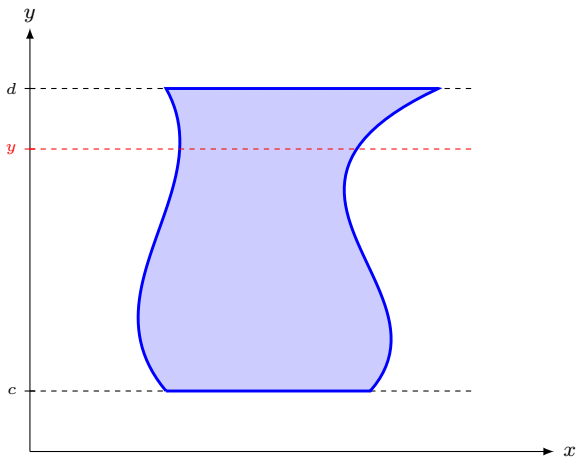
$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in [a, b], \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x)\}$$

- **régulier** s'il l'est par rapport à l'axe des  $x$  ou des  $y$ .

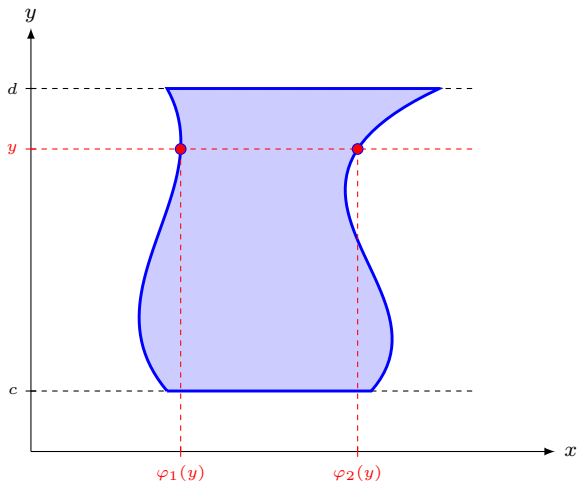
## II. L'intégrale double.



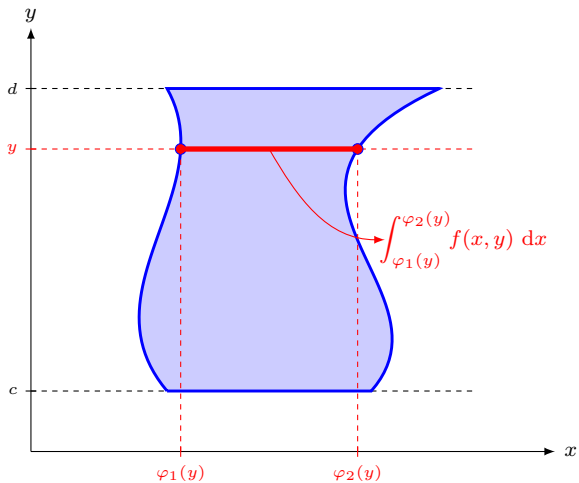
## II. L'intégrale double.



## II. L'intégrale double.

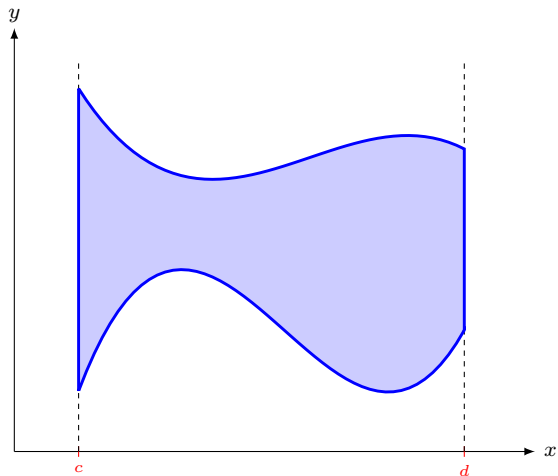


## II. L'intégrale double.

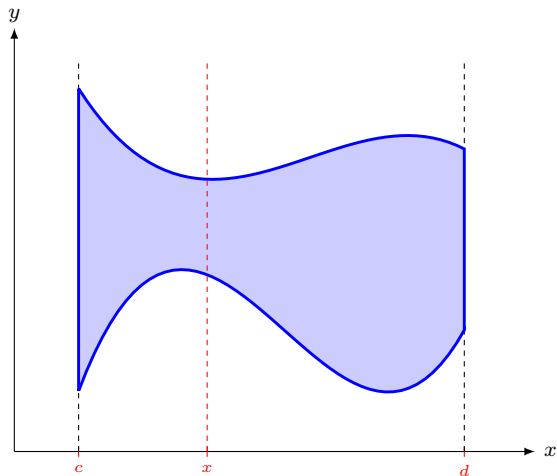


*Domaine régulier selon l'axe des  $x$ .*

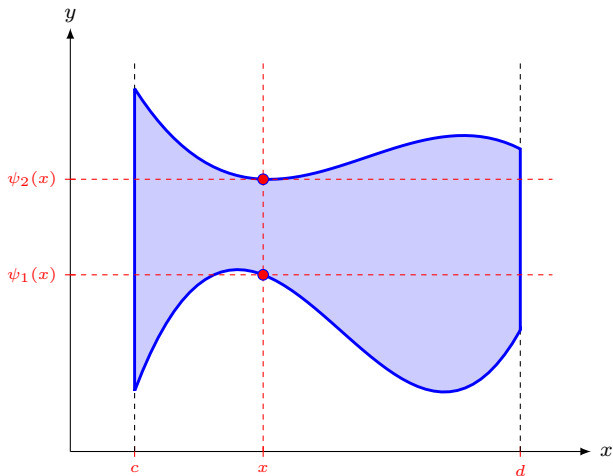
## II. L'intégrale double.



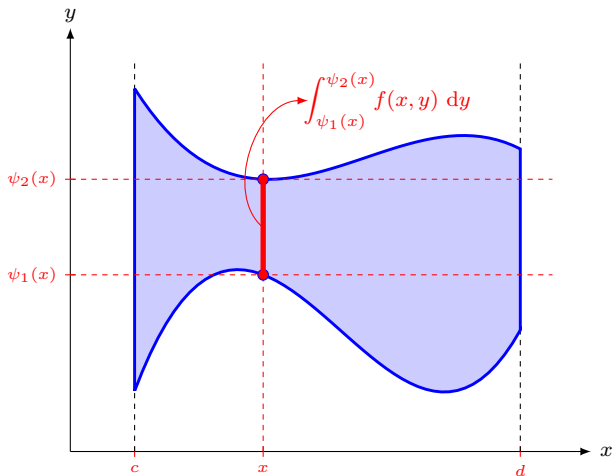
## II. L'intégrale double.



## II. L'intégrale double.



## II. L'intégrale double.



*Domaine régulier selon l'axe des  $y$ .*

### Théorème : de Fubini pour les domaines réguliers

Si  $f$  est une fonction continue sur un domaine régulier  $\mathcal{D}$  selon l'axe des  $x$ , alors :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$$

### Théorème : de Fubini pour les domaines réguliers

Si  $f$  est une fonction continue sur un domaine régulier  $\mathcal{D}$  selon l'axe des  $x$ , alors :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$$

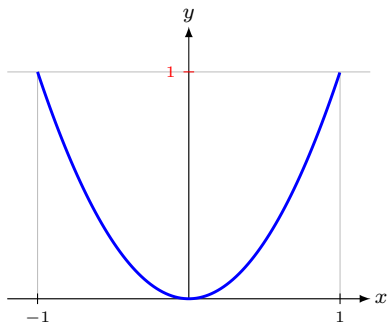
Si  $f$  est une fonction continue sur un domaine régulier  $\mathcal{D}$  selon l'axe des  $y$ , alors :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

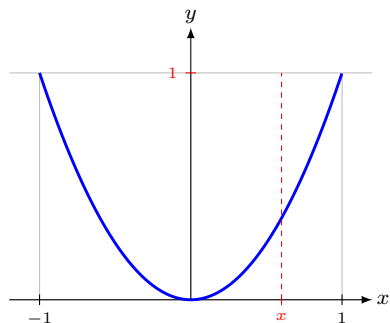
④ Interprétons graphiquement les bornes de cette intégrale :  $I = \int_{-1}^1 \left( \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \right) dx$



## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

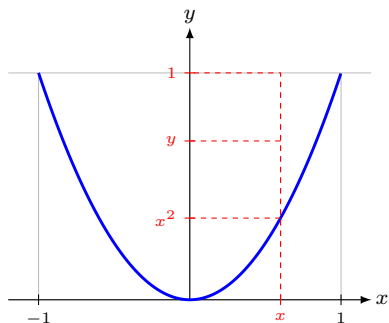
🕒 Interprétons graphiquement les bornes de cette intégrale :  $I = \int_{-1}^1 \left( \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \right) dx$



## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

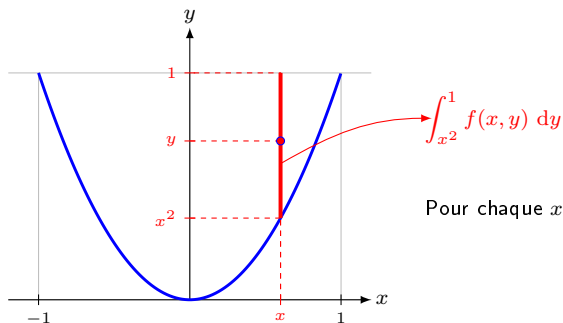
🕒 Interprétons graphiquement les bornes de cette intégrale :  $I = \int_{-1}^1 \left( \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \right) dx$



## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

🕒 Interprétons graphiquement les bornes de cette intégrale :  $I = \int_{-1}^1 \left( \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \right) dx$

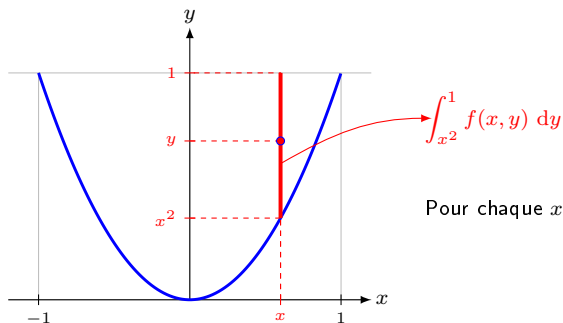


Pour chaque  $x \in [-1, 1]$ ,  $y$  varie entre  $x^2$  et 1.

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

❶ Interprétons graphiquement les bornes de cette intégrale :  $I = \int_{-1}^1 \left( \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \right) dx$



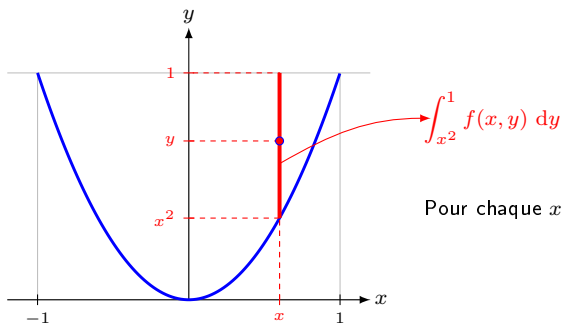
Pour chaque  $x \in [-1, 1]$ ,  $y$  varie entre  $x^2$  et 1.

❷ Le domaine d'intégration est-il régulier ? Si oui, selon quel axe ?

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

① Interprétons graphiquement les bornes de cette intégrale :  $I = \int_{-1}^1 \left( \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \right) dx$



Pour chaque  $x \in [-1, 1]$ ,  $y$  varie entre  $x^2$  et  $1$ .

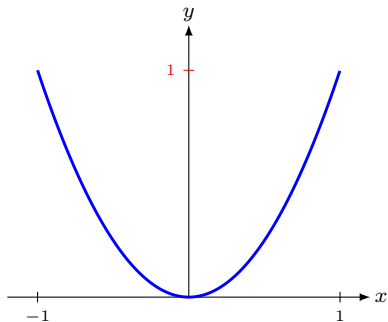
② Le domaine d'intégration est-il régulier ? Si oui, selon quel axe ?

**Le domaine est régulier selon l'axe des  $y$**

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

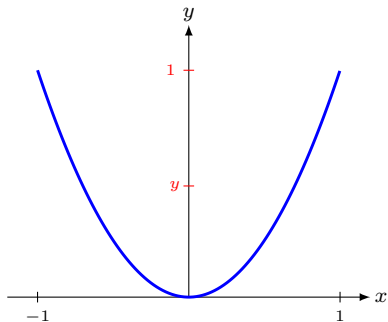
- ③ Exprimons cette intégrale double pour que son domaine d'intégration soit régulier selon l'axe des  $x$ .



## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

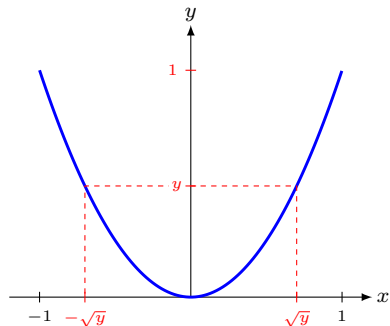
- ③ Exprimons cette intégrale double pour que son domaine d'intégration soit régulier selon l'axe des  $x$ .



## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

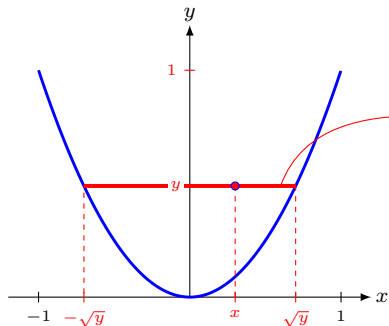
- ③ Exprimons cette intégrale double pour que son domaine d'intégration soit régulier selon l'axe des  $x$ .



## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

- ③ Exprimons cette intégrale double pour que son domaine d'intégration soit régulier selon l'axe des  $x$ .



$$\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx$$

Pour chaque  $y \in [0, 1]$ ,  $x$  varie entre  $-\sqrt{y}$  et  $\sqrt{y}$ .

$$I = \int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

④ Déterminons  $I$  pour  $f(x, y) = x^2$  en utilisant

(a) le domaine régulier selon l'axe des  $y$  :

$$I =$$

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

④ Déterminons  $I$  pour  $f(x, y) = x^2$  en utilisant

(a) le domaine régulier selon l'axe des  $y$  :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 \, dy \, dx =$$

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

④ Déterminons  $I$  pour  $f(x, y) = x^2$  en utilisant

(a) le domaine régulier selon l'axe des  $y$  :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \left[ x^2 y \right]_{x^2}^1 \, dx =$$

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

④ Déterminons  $I$  pour  $f(x, y) = x^2$  en utilisant

(a) le domaine régulier selon l'axe des  $y$  :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \left[ x^2 y \right]_{x^2}^1 \, dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) \, dx =$$

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

④ Déterminons  $I$  pour  $f(x, y) = x^2$  en utilisant

(a) le domaine régulier selon l'axe des  $y$  :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \left[ x^2 y \right]_{x^2}^1 \, dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1$$

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

④ Déterminons  $I$  pour  $f(x, y) = x^2$  en utilisant

(a) le domaine régulier selon l'axe des  $y$  :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \left[ x^2 y \right]_{x^2}^1 \, dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1$$

=

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

④ Déterminons  $I$  pour  $f(x, y) = x^2$  en utilisant

(a) le domaine régulier selon l'axe des  $y$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \left[ x^2 y \right]_{x^2}^1 \, dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

④ Déterminons  $I$  pour  $f(x, y) = x^2$  en utilisant

(a) le domaine régulier selon l'axe des  $y$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \left[ x^2 y \right]_{x^2}^1 \, dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{15} - \left( -\frac{2}{15} \right) = \end{aligned}$$

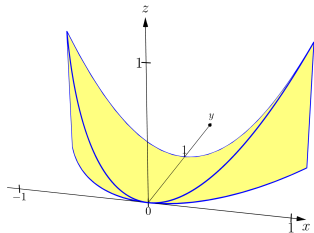
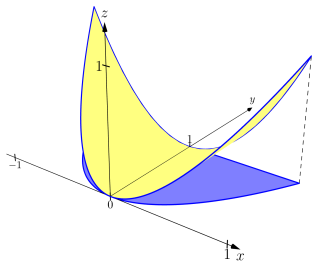
## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

④ Déterminons  $I$  pour  $f(x, y) = x^2$  en utilisant

(a) le domaine régulier selon l'axe des  $y$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 [x^2 y]_{x^2}^1 \, dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{15} - \left( -\frac{2}{15} \right) = \frac{4}{15} \end{aligned}$$



**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

④ Déterminons  $I$  pour  $f(x, y) = x^2$  en utilisant

(a) le domaine régulier selon l'axe des  $y$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 [x^2 y]_{x^2}^1 \, dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{15} - \left( -\frac{2}{15} \right) = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

(b) le domaine régulier selon l'axe des  $x$  :

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

④ Déterminons  $I$  pour  $f(x, y) = x^2$  en utilisant

(a) le domaine régulier selon l'axe des  $y$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 [x^2 y]_{x^2}^1 \, dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{15} - \left( -\frac{2}{15} \right) = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

(b) le domaine régulier selon l'axe des  $x$  :

$$I =$$

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

④ Déterminons  $I$  pour  $f(x, y) = x^2$  en utilisant

(a) le domaine régulier selon l'axe des  $y$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 [x^2 y]_{x^2}^1 \, dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{15} - \left( -\frac{2}{15} \right) = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

(b) le domaine régulier selon l'axe des  $x$  :

$$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 \, dx \, dy =$$

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

④ Déterminons  $I$  pour  $f(x, y) = x^2$  en utilisant

(a) le domaine régulier selon l'axe des  $y$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 [x^2 y]_{x^2}^1 \, dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{15} - \left( -\frac{2}{15} \right) = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

(b) le domaine régulier selon l'axe des  $x$  :

$$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \, dy =$$

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

④ Déterminons  $I$  pour  $f(x, y) = x^2$  en utilisant

(a) le domaine régulier selon l'axe des  $y$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 [x^2 y]_{x^2}^1 \, dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{15} - \left( -\frac{2}{15} \right) = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

(b) le domaine régulier selon l'axe des  $x$  :

$$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 \left( \frac{y\sqrt{y}}{3} - \right.$$

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

④ Déterminons  $I$  pour  $f(x, y) = x^2$  en utilisant

(a) le domaine régulier selon l'axe des  $y$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 [x^2 y]_{x^2}^1 \, dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{15} - \left( -\frac{2}{15} \right) = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

(b) le domaine régulier selon l'axe des  $x$  :

$$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 \left( \frac{y\sqrt{y}}{3} - \frac{-y\sqrt{y}}{3} \right) \, dy$$

=

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

④ Déterminons  $I$  pour  $f(x, y) = x^2$  en utilisant

(a) le domaine régulier selon l'axe des  $y$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 [x^2 y]_{x^2}^1 \, dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{15} - \left( -\frac{2}{15} \right) = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

(b) le domaine régulier selon l'axe des  $x$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 \left( \frac{y\sqrt{y}}{3} - \frac{-y\sqrt{y}}{3} \right) \, dy \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \, dy = \end{aligned}$$

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

④ Déterminons  $I$  pour  $f(x, y) = x^2$  en utilisant

(a) le domaine régulier selon l'axe des  $y$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 [x^2 y]_{x^2}^1 \, dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{15} - \left( -\frac{2}{15} \right) = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

(b) le domaine régulier selon l'axe des  $x$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 \left( \frac{y\sqrt{y}}{3} - \frac{-y\sqrt{y}}{3} \right) \, dy \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \, dy = \frac{2}{3} \left[ \frac{y^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} \right]_0^1 = \end{aligned}$$

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

④ Déterminons  $I$  pour  $f(x, y) = x^2$  en utilisant

(a) le domaine régulier selon l'axe des  $y$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 [x^2 y]_{x^2}^1 \, dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{15} - \left( -\frac{2}{15} \right) = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

(b) le domaine régulier selon l'axe des  $x$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 \left( \frac{y\sqrt{y}}{3} - \frac{-y\sqrt{y}}{3} \right) \, dy \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \, dy = \frac{2}{3} \left[ \frac{y^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \left[ \frac{y^{2,5}}{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \end{aligned}$$

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

• Déterminons  $I$  pour  $f(x, y) = x^2$  en utilisant

(a) le domaine régulier selon l'axe des  $y$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 [x^2 y]_{x^2}^1 \, dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{15} - \left( -\frac{2}{15} \right) = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

(b) le domaine régulier selon l'axe des  $x$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 \left( \frac{y\sqrt{y}}{3} - \frac{-y\sqrt{y}}{3} \right) \, dy \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \, dy = \frac{2}{3} \left[ \frac{y^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \left[ \frac{y^{2,5}}{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

- ⑤ Calculons cette intégrale double avec  $f(x, y) = 1$  :

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

- ⑤ Calculons cette intégrale double avec  $f(x, y) = 1$  :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \mathbf{dy \, dx} = \int_{-1}^1 \left[ \mathbf{y} \right]_{x^2}^1 \mathbf{dx} =$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

⑤ Calculons cette intégrale double avec  $f(x, y) = 1$  :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \mathbf{dy \, dx} = \int_{-1}^1 \left[ \mathbf{y} \right]_{x^2}^1 \mathbf{dx} = \int_{-1}^1 (1 - x^2) \mathbf{dx} =$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

6 Calculons cette intégrale double avec  $f(x, y) = 1$  :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \mathbf{dy \, dx} = \int_{-1}^1 \left[ \mathbf{y} \right]_{x^2}^1 \mathbf{dx} = \int_{-1}^1 (1 - x^2) \mathbf{dx} = \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1$$

=

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

⑤ Calculons cette intégrale double avec  $f(x, y) = 1$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \mathbf{dy \, dx} = \int_{-1}^1 \left[ \mathbf{y} \right]_{x^2}^1 \mathbf{dx} = \int_{-1}^1 (1 - x^2) \mathbf{dx} = \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

⑤ Calculons cette intégrale double avec  $f(x, y) = 1$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \mathbf{dy \, dx} = \int_{-1}^1 \left[ \mathbf{y} \right]_{x^2}^1 \mathbf{dx} = \int_{-1}^1 (1 - x^2) \mathbf{dx} = \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{3} - \left( -\frac{2}{3} \right) = \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

- ⑤ Calculons cette intégrale double avec  $f(x, y) = 1$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \mathbf{dy \, dx} = \int_{-1}^1 \left[ \mathbf{y} \right]_{x^2}^1 \mathbf{dx} = \int_{-1}^1 (1 - x^2) \mathbf{dx} = \left[ \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{3}} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} - \left( -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \right) = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} \end{aligned}$$

- ⑥ Que dire de cette dernière intégrale double?

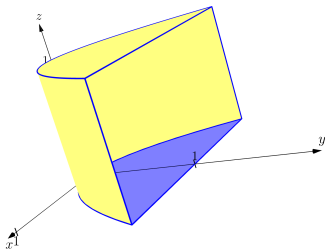
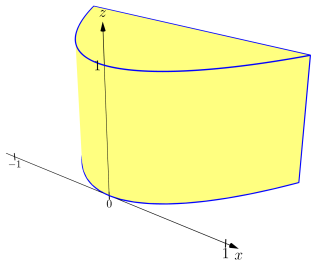
## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$

⑤ Calculons cette intégrale double avec  $f(x, y) = 1$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \mathbf{dy \, dx} = \int_{-1}^1 \left[ \mathbf{y} \right]_{x^2}^1 \mathbf{dx} = \int_{-1}^1 (1 - x^2) \, dx = \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{3} - \left( -\frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

⑥ Que dire de cette dernière intégrale double? **Elle donne l'aire du domaine.**



## II. L'intégrale double.

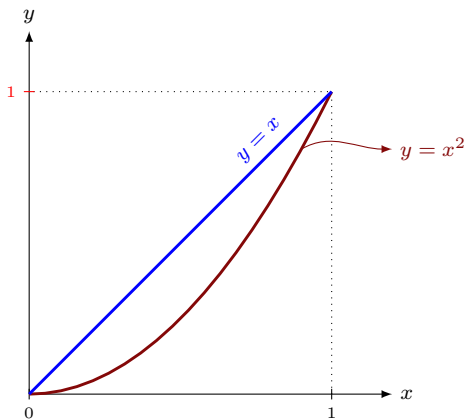
**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

- 1 Dessine le domaine d'intégration  $\mathcal{D}$  dans un repère adapté.

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

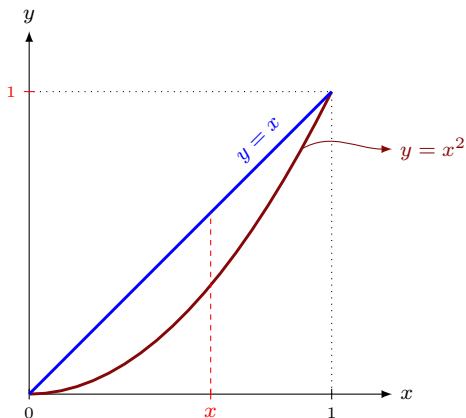
1 Dessine le domaine d'intégration  $\mathcal{D}$  dans un repère adapté.



## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

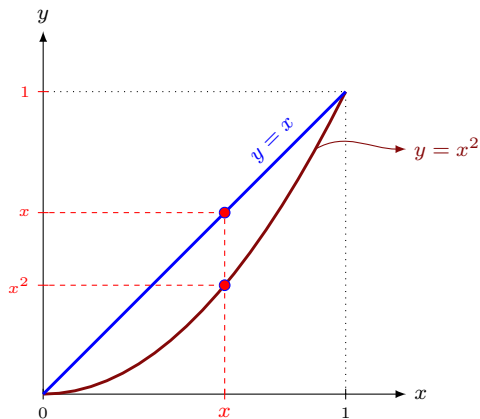
④ Dessine le domaine d'intégration  $\mathcal{D}$  dans un repère adapté.



## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

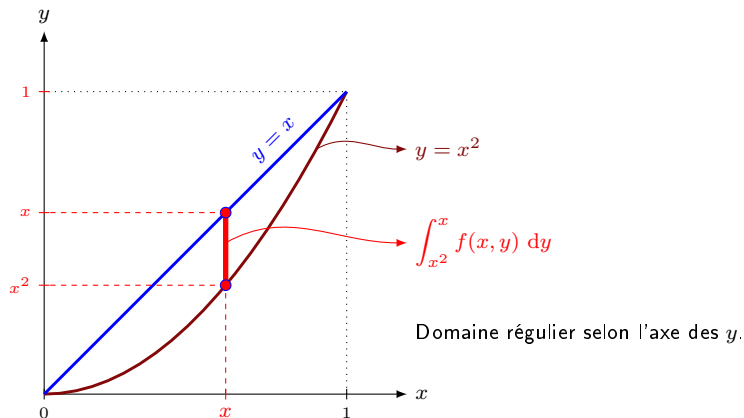
④ Dessine le domaine d'intégration  $\mathcal{D}$  dans un repère adapté.



## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

④ Dessine le domaine d'intégration  $\mathcal{D}$  dans un repère adapté.



## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

- 2 Calcule cette intégrale avec  $f(x, y) = 16x + 10y$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

② Calcule cette intégrale avec  $f(x, y) = 16x + 10y$

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^x (16x + 10y) \, dy \, dx =$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

② Calcule cette intégrale avec  $f(x, y) = 16x + 10y$

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^x (16x + 10y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[ 16xy + 5y^2 \right]_{y=x^2}^{y=x} \, dx =$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

② Calcule cette intégrale avec  $f(x, y) = 16x + 10y$

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^x (16x + 10y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[ 16xy + 5y^2 \right]_{y=x^2}^{y=x} \, dx = \int_0^1 (21x^2) - (16x^3 + 5x^4) \, dx$$

=

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

② Calcule cette intégrale avec  $f(x, y) = 16x + 10y$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{x^2}^x (16x + 10y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[ 16xy + 5y^2 \right]_{y=x^2}^{y=x} \, dx = \int_0^1 (21x^2) - (16x^3 + 5x^4) \, dx \\ &= \int_0^1 -5x^4 - 16x^3 + 21x^2 \, dx = \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

② Calcule cette intégrale avec  $f(x, y) = 16x + 10y$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{x^2}^x (16x + 10y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[ 16xy + 5y^2 \right]_{y=x^2}^{y=x} \, dx = \int_0^1 (21x^2) - (16x^3 + 5x^4) \, dx \\ &= \int_0^1 -5x^4 - 16x^3 + 21x^2 \, dx = \left[ -x^5 - 4x^4 + 7x^3 \right]_0^1 = \end{aligned}$$

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

② Calcule cette intégrale avec  $f(x, y) = 16x + 10y$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{x^2}^x (16x + 10y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[ 16xy + 5y^2 \right]_{y=x^2}^{y=x} \, dx = \int_0^1 (21x^2) - (16x^3 + 5x^4) \, dx \\ &= \int_0^1 -5x^4 - 16x^3 + 21x^2 \, dx = \left[ -x^5 - 4x^4 + 7x^3 \right]_0^1 = 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

② Calcule cette intégrale avec  $f(x, y) = 16x + 10y$

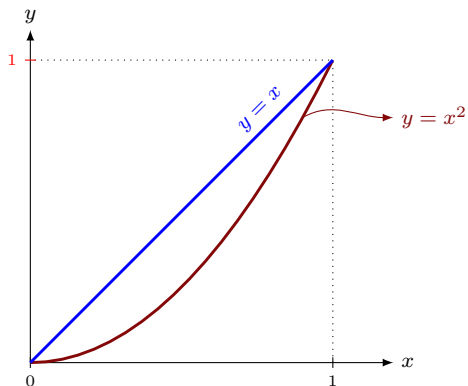
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{x^2}^x (16x + 10y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[ 16xy + 5y^2 \right]_{y=x^2}^{y=x} \, dx = \int_0^1 (21x^2) - (16x^3 + 5x^4) \, dx \\ &= \int_0^1 -5x^4 - 16x^3 + 21x^2 \, dx = \left[ -x^5 - 4x^4 + 7x^3 \right]_0^1 = 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

③ Retrouve ce résultat en intégrant le domaine selon l'autre axe.

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

- ③ Retrouve ce résultat en intégrant le domaine selon l'autre axe.

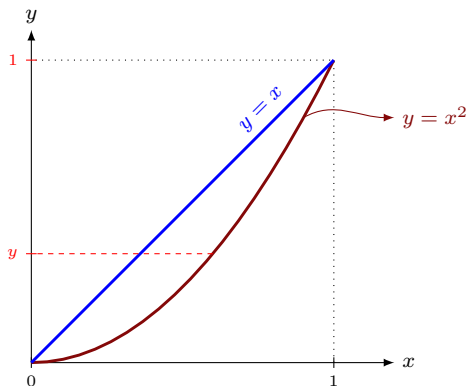


$$I = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (16x + 10y) \, dx \, dy = \int_0^1 [8x^2 + 10xy]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 (8y + 10y\sqrt{y}) - (18y^2) \, dy$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

- ③ Retrouve ce résultat en intégrant le domaine selon l'autre axe.

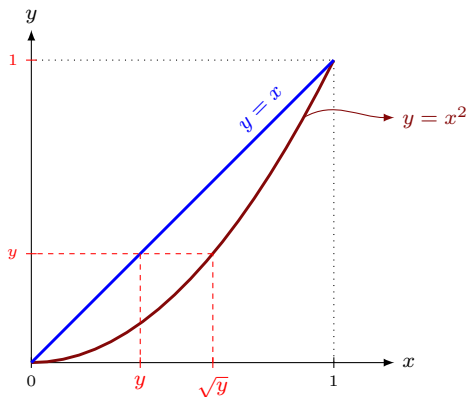


$$I = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (16x + 10y) \, dx \, dy = \int_0^1 [8x^2 + 10xy]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 (8y + 10y\sqrt{y}) - (18y^2) \, dy$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

- ③ Retrouve ce résultat en intégrant le domaine selon l'autre axe.

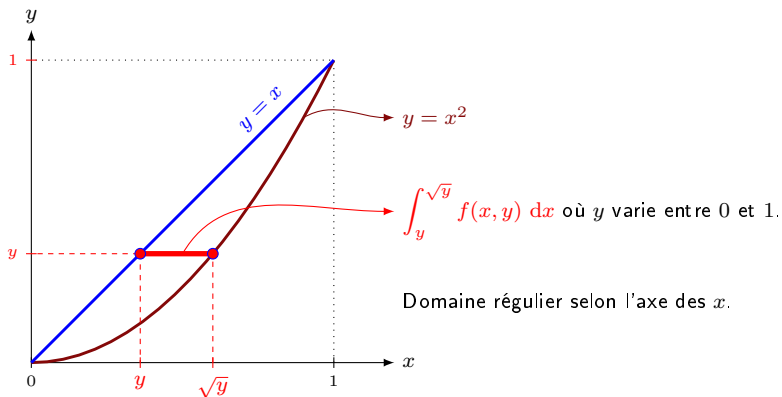


$$I = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (16x + 10y) \, dx \, dy = \int_0^1 [8x^2 + 10xy]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 (8y + 10y\sqrt{y}) - (18y^2) \, dy$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

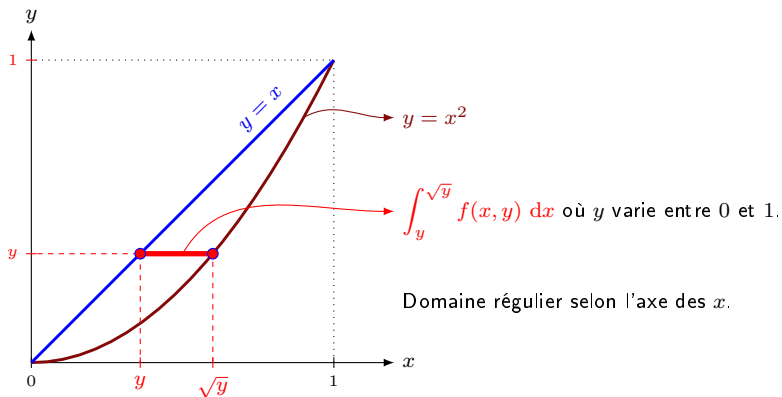
- ③ Retrouve ce résultat en intégrant le domaine selon l'autre axe.



## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

- ③ Retrouve ce résultat en intégrant le domaine selon l'autre axe.



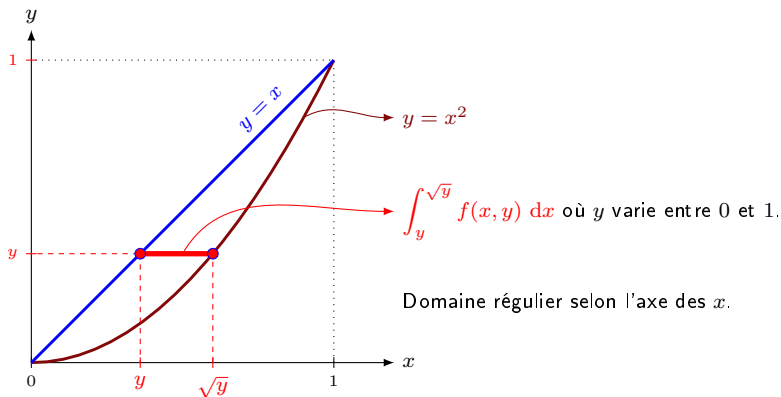
Domaine régulier selon l'axe des  $x$ .

$I =$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

- ③ Retrouve ce résultat en intégrant le domaine selon l'autre axe.



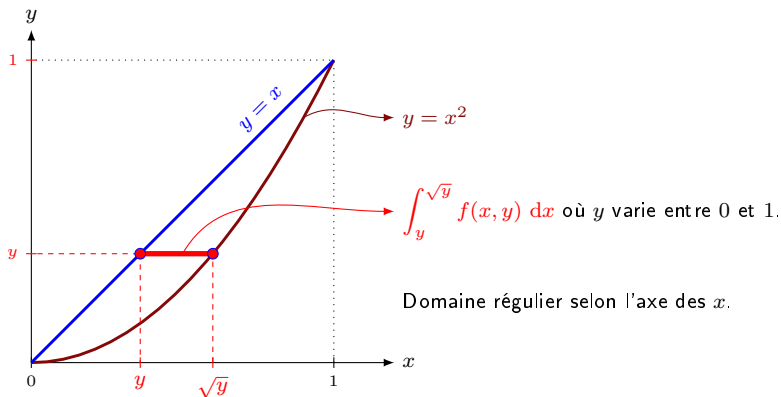
Domaine régulier selon l'axe des  $x$ .

$$I = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (16x + 10y) \, dx \, dy =$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

- ③ Retrouve ce résultat en intégrant le domaine selon l'autre axe.

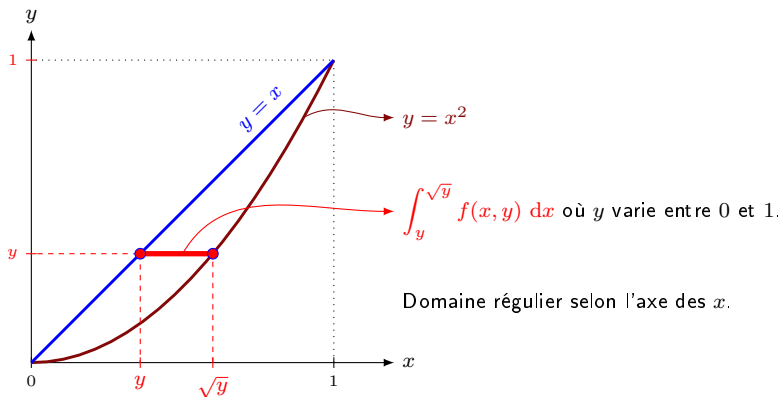


$$I = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (16x + 10y) \, dx \, dy = \int_0^1 [8x^2 + 10xy]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} \, dy =$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

③ Retrouve ce résultat en intégrant le domaine selon l'autre axe.



$$I = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (16x + 10y) \, dx \, dy = \int_0^1 [8x^2 + 10xy]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 (8y + 10y\sqrt{y}) - (18y^2) \, dy$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

- ③ Retrouve ce résultat en intégrant le domaine selon l'autre axe.

$$I = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (16x + 10y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ 8x^2 + 10xy \right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 (8y + 10y\sqrt{y}) - (18y^2) \, dy$$

=

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

③ Retrouve ce résultat en intégrant le domaine selon l'autre axe.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (16x + 10y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ 8x^2 + 10xy \right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 (8y + 10y\sqrt{y}) - (18y^2) \, dy \\ &= \int_0^1 -18y^2 + 8y + 10y^{3/2} \, dy = \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

③ Retrouve ce résultat en intégrant le domaine selon l'autre axe.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (16x + 10y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ 8x^2 + 10xy \right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 (8y + 10y\sqrt{y}) - (18y^2) \, dy \\ &= \int_0^1 -18y^2 + 8y + 10y^{3/2} \, dy = \left[ -6y^3 + 4y^2 + 10 \frac{y^{2,5}}{2,5} \right]_0^1 \\ &= \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

③ Retrouve ce résultat en intégrant le domaine selon l'autre axe.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (16x + 10y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ 8x^2 + 10xy \right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 (8y + 10y\sqrt{y}) - (18y^2) \, dy \\ &= \int_0^1 -18y^2 + 8y + 10y^{3/2} \, dy = \left[ -6y^3 + 4y^2 + 10 \frac{y^{2,5}}{2,5} \right]_0^1 \\ &= \left[ -6y^3 + 4y^2 + 4y^2\sqrt{y} \right]_0^1 = \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

- ③ Retrouve ce résultat en intégrant le domaine selon l'autre axe.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (16x + 10y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ 8x^2 + 10xy \right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 (8y + 10y\sqrt{y}) - (18y^2) \, dy \\ &= \int_0^1 -18y^2 + 8y + 10y^{3/2} \, dy = \left[ -6y^3 + 4y^2 + 10 \frac{y^{2,5}}{2,5} \right]_0^1 \\ &= \left[ -6y^3 + 4y^2 + 4y^2\sqrt{y} \right]_0^1 = 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

- ④ Détermine l'aire du domaine d'intégration.

$\mathcal{A} =$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

- ③ Retrouve ce résultat en intégrant le domaine selon l'autre axe.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (16x + 10y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ 8x^2 + 10xy \right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 (8y + 10y\sqrt{y}) - (18y^2) \, dy \\ &= \int_0^1 -18y^2 + 8y + 10y^{3/2} \, dy = \left[ -6y^3 + 4y^2 + 10 \frac{y^{2,5}}{2,5} \right]_0^1 \\ &= \left[ -6y^3 + 4y^2 + 4y^2\sqrt{y} \right]_0^1 = 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

- ④ Détermine l'aire du domaine d'intégration.

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \int_{x^2}^x dy \, dx =$$

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

- ③ Retrouve ce résultat en intégrant le domaine selon l'autre axe.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (16x + 10y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ 8x^2 + 10xy \right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 (8y + 10y\sqrt{y}) - (18y^2) \, dy \\ &= \int_0^1 -18y^2 + 8y + 10y^{3/2} \, dy = \left[ -6y^3 + 4y^2 + 10 \frac{y^{2,5}}{2,5} \right]_0^1 \\ &= \left[ -6y^3 + 4y^2 + 4y^2\sqrt{y} \right]_0^1 = 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

- ④ Détermine l'aire du domaine d'intégration.

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \int_{x^2}^x dy \, dx = \int_0^1 \left[ y \right]_{y=x^2}^{y=x} \, dx =$$

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

- ③ Retrouve ce résultat en intégrant le domaine selon l'autre axe.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (16x + 10y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ 8x^2 + 10xy \right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 (8y + 10y\sqrt{y}) - (18y^2) \, dy \\ &= \int_0^1 -18y^2 + 8y + 10y^{3/2} \, dy = \left[ -6y^3 + 4y^2 + 10 \frac{y^{2,5}}{2,5} \right]_0^1 \\ &= \left[ -6y^3 + 4y^2 + 4y^2\sqrt{y} \right]_0^1 = 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

- ④ Détermine l'aire du domaine d'intégration.

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \int_{x^2}^x dy \, dx = \int_0^1 \left[ y \right]_{y=x^2}^{y=x} \, dx = \int_0^1 (x - x^2) \, dx =$$

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

- ③ Retrouve ce résultat en intégrant le domaine selon l'autre axe.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (16x + 10y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ 8x^2 + 10xy \right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 (8y + 10y\sqrt{y}) - (18y^2) \, dy \\ &= \int_0^1 -18y^2 + 8y + 10y^{3/2} \, dy = \left[ -6y^3 + 4y^2 + 10 \frac{y^{2,5}}{2,5} \right]_0^1 \\ &= \left[ -6y^3 + 4y^2 + 4y^2\sqrt{y} \right]_0^1 = 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

- ④ Détermine l'aire du domaine d'intégration.

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \int_{x^2}^x dy \, dx = \int_0^1 \left[ y \right]_{y=x^2}^{y=x} \, dx = \int_0^1 (x - x^2) \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 =$$

**Exercice n° 4** : On considère l'intégrale double  $I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) \, dy \, dx$

- ③ Retrouve ce résultat en intégrant le domaine selon l'autre axe.

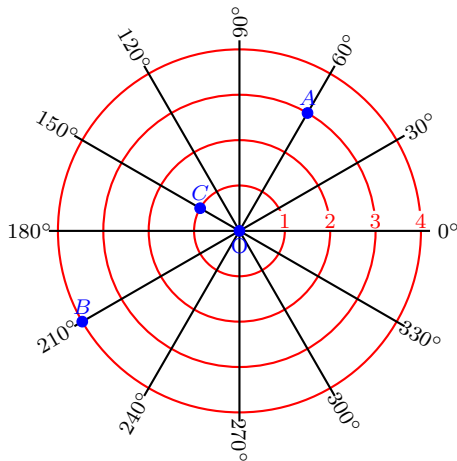
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (16x + 10y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left[ 8x^2 + 10xy \right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} \, dy = \int_0^1 (8y + 10y\sqrt{y}) - (18y^2) \, dy \\ &= \int_0^1 -18y^2 + 8y + 10y^{3/2} \, dy = \left[ -6y^3 + 4y^2 + 10 \frac{y^{2,5}}{2,5} \right]_0^1 \\ &= \left[ -6y^3 + 4y^2 + 4y^2\sqrt{y} \right]_0^1 = 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

- ④ Détermine l'aire du domaine d'intégration.

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \int_{x^2}^x dy \, dx = \int_0^1 \left[ y \right]_{y=x^2}^{y=x} \, dx = \int_0^1 (x - x^2) \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

### 2. Passage en coordonnées polaires.

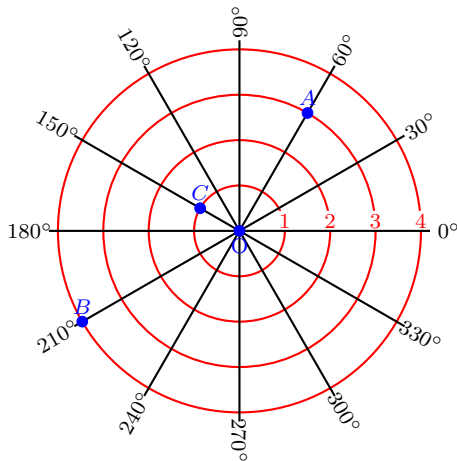
### 2. Passage en coordonnées polaires.



Point  $\left( \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{radiale} \end{array} ; \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{angulaire} \end{array} \right)$

Les coordonnées **radiales**,

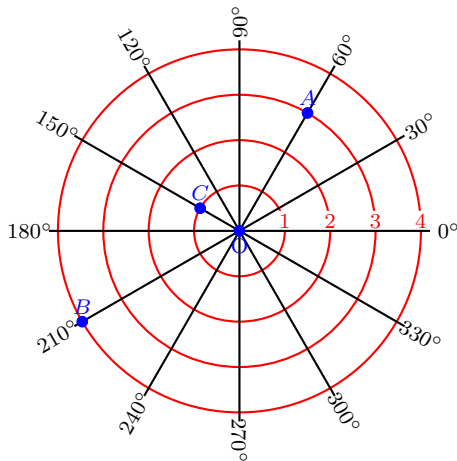
## 2. Passage en coordonnées polaires.



Point  $\left( \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{radiale} \end{array} ; \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{angulaire} \end{array} \right)$

Les coordonnées **radiales**, notées  $\rho$  ou  $r$

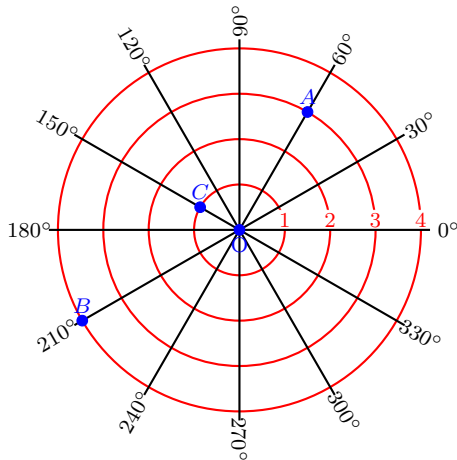
## 2. Passage en coordonnées polaires.



Point  $\left( \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{radiale} \end{array} ; \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{angulaire} \end{array} \right)$

Les coordonnées **radiales**, notées  $\rho$  ou  $r$  expriment la distance entre le point et l'origine du repère appelé **pôle**.

## 2. Passage en coordonnées polaires.

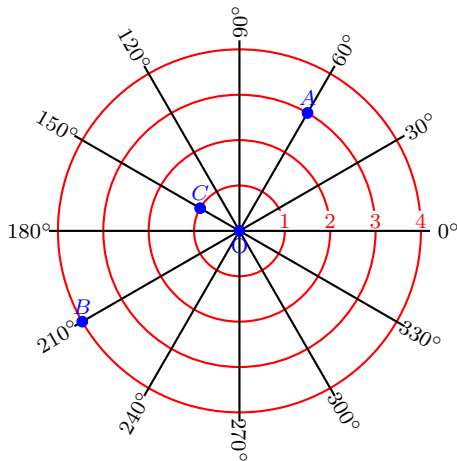


Point  $\left( \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{radiale} \end{array} ; \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{angulaire} \end{array} \right)$

Les coordonnées **radiales**, notées  $\rho$  ou  $r$  expriment la distance entre le point et l'origine du repère appelé **pôle**.

Les coordonnées **angulaires**,

## 2. Passage en coordonnées polaires.

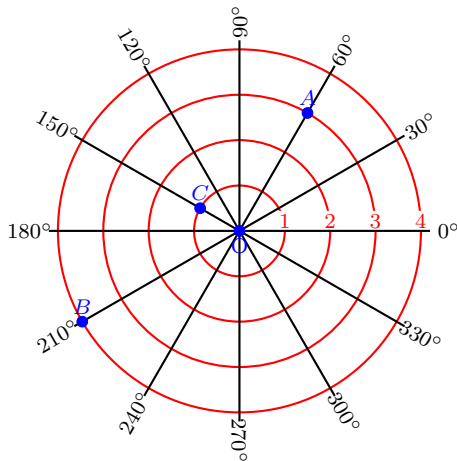


Point  $\left( \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{radiale} \end{array} ; \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{angulaire} \end{array} \right)$

Les coordonnées **radiales**, notées  $\rho$  ou  $r$  expriment la distance entre le point et l'origine du repère appelé **pôle**.

Les coordonnées **angulaires**, notées  $\theta$

## 2. Passage en coordonnées polaires.

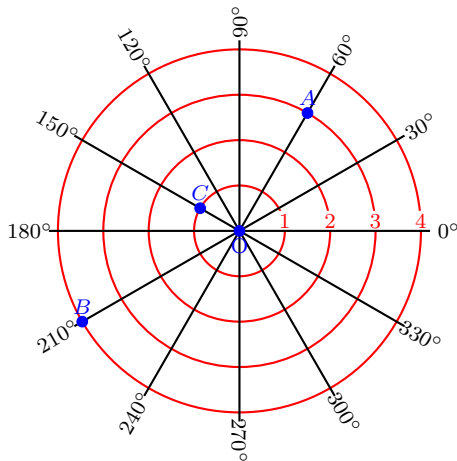


Point  $\left( \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{radiale} \end{array} ; \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{angulaire} \end{array} \right)$

Les coordonnées **radiales**, notées  $\rho$  ou  $r$  expriment la distance entre le point et l'origine du repère appelé **pôle**.

Les coordonnées **angulaires**, notées  $\theta$  également appelé angle **polaire** exprime la mesure,

## 2. Passage en coordonnées polaires.

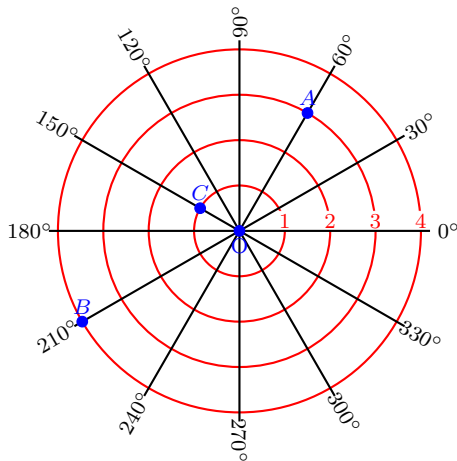


Point  $\left( \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{radiale} \end{array} ; \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{angulaire} \end{array} \right)$

Les coordonnées **radiales**, notées  $\rho$  ou  $r$  expriment la distance entre le point et l'origine du repère appelé **pôle**.

Les coordonnées **angulaires**, notées  $\theta$  également appelé angle **polaire** exprime la mesure, dans le sens trigonométrique, de l'angle formé par la demi droite d'angle ( $0^\circ$ ),

## 2. Passage en coordonnées polaires.

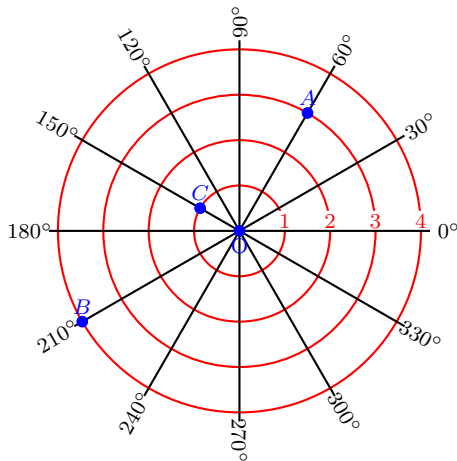


Point  $\left( \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{radiale} \end{array} ; \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{angulaire} \end{array} \right)$

Les coordonnées **radiales**, notées  $\rho$  ou  $r$  expriment la distance entre le point et l'origine du repère appelé **pôle**.

Les coordonnées **angulaires**, notées  $\theta$  également appelé angle **polaire** exprime la mesure, dans le sens trigonométrique, de l'angle formé par la demi droite d'angle ( $0^\circ$ ), appelée **axe polaire** et le point.

## 2. Passage en coordonnées polaires.



Point  $\left( \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{radiale} \end{array} ; \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{angulaire} \end{array} \right)$

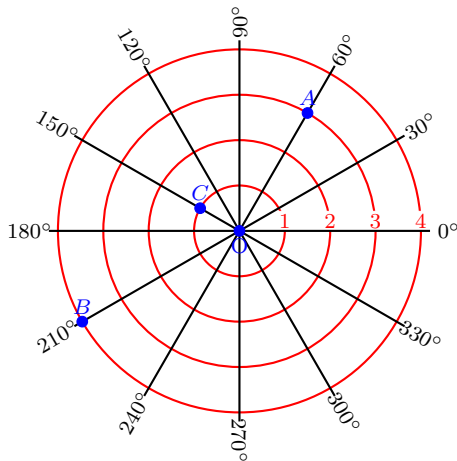
Les coordonnées **radiales**, notées  $\rho$  ou  $r$  expriment la distance entre le point et l'origine du repère appelé **pôle**.

Les coordonnées **angulaires**, notées  $\theta$  également appelé angle **polaire** exprime la mesure, dans le sens trigonométrique, de l'angle formé par la demi droite d'angle ( $0^\circ$ ), appelée **axe polaire** et le point.

En coordonnées polaires, on a :

•  $A$

## 2. Passage en coordonnées polaires.



Point  $\left( \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{radiale} \end{array} ; \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{angulaire} \end{array} \right)$

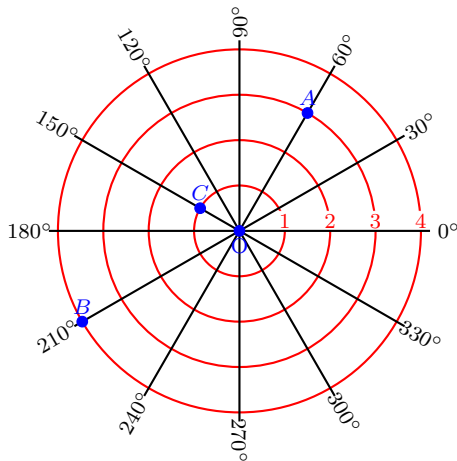
Les coordonnées **radiales**, notées  $\rho$  ou  $r$  expriment la distance entre le point et l'origine du repère appelé **pôle**.

Les coordonnées **angulaires**, notées  $\theta$  également appelé angle **polaire** exprime la mesure, dans le sens trigonométrique, de l'angle formé par la demi droite d'angle ( $0^\circ$ ), appelée **axe polaire** et le point.

En coordonnées polaires, on a :

- $A(3; 30^\circ)$

## 2. Passage en coordonnées polaires.



Point  $\left( \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{radiale} \end{array} ; \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{angulaire} \end{array} \right)$

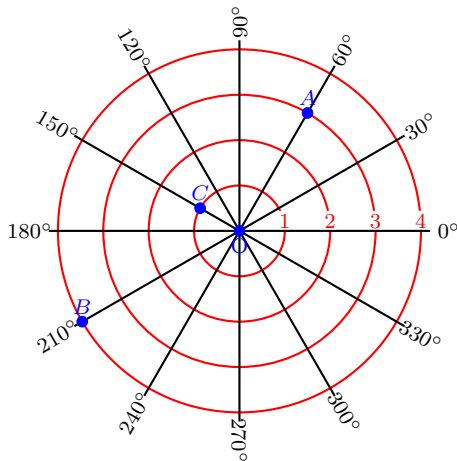
Les coordonnées **radiales**, notées  $\rho$  ou  $r$  expriment la distance entre le point et l'origine du repère appelé **pôle**.

Les coordonnées **angulaires**, notées  $\theta$  également appelé angle **polaire** exprime la mesure, dans le sens trigonométrique, de l'angle formé par la demi droite d'angle ( $0^\circ$ ), appelée **axe polaire** et le point.

En coordonnées polaires, on a :

- $A(3; 30^\circ)$
- $B$

## 2. Passage en coordonnées polaires.



Point  $\left( \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{radiale} \end{array} ; \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{angulaire} \end{array} \right)$

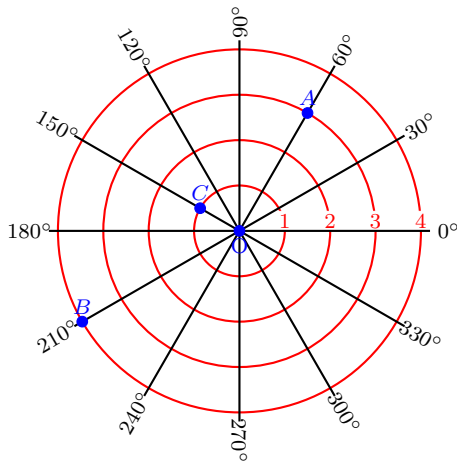
Les coordonnées **radiales**, notées  $\rho$  ou  $r$  expriment la distance entre le point et l'origine du repère appelé **pôle**.

Les coordonnées **angulaires**, notées  $\theta$  également appelé angle **polaire** exprime la mesure, dans le sens trigonométrique, de l'angle formé par la demi droite d'angle ( $0^\circ$ ), appelée **axe polaire** et le point.

En coordonnées polaires, on a :

- $A(3; 30^\circ)$
- $B(4; 210^\circ)$

## 2. Passage en coordonnées polaires.



Point  $\left( \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{radiale} \end{array} ; \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{angulaire} \end{array} \right)$

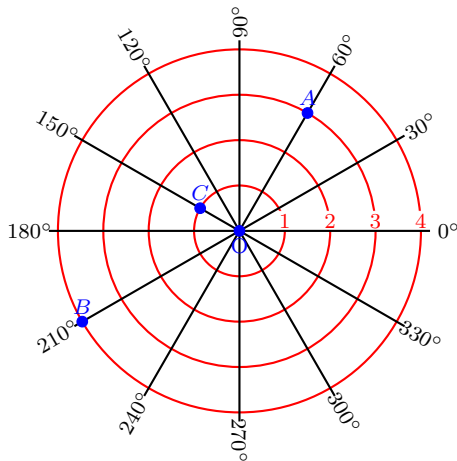
Les coordonnées **radiales**, notées  $\rho$  ou  $r$  expriment la distance entre le point et l'origine du repère appelé **pôle**.

Les coordonnées **angulaires**, notées  $\theta$  également appelé angle **polaire** exprime la mesure, dans le sens trigonométrique, de l'angle formé par la demi droite d'angle ( $0^\circ$ ), appelée **axe polaire** et le point.

En coordonnées polaires, on a :

- $A(3; 30^\circ)$
- $B(4; 210^\circ)$
- $C$

## 2. Passage en coordonnées polaires.



Point  $\left( \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{radiale} \end{array} ; \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{angulaire} \end{array} \right)$

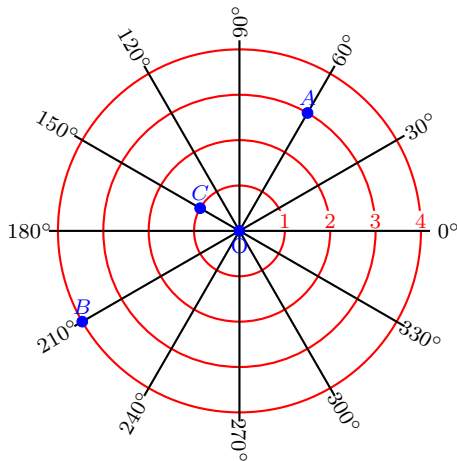
Les coordonnées **radiales**, notées  $\rho$  ou  $r$  expriment la distance entre le point et l'origine du repère appelé **pôle**.

Les coordonnées **angulaires**, notées  $\theta$  également appelé angle **polaire** exprime la mesure, dans le sens trigonométrique, de l'angle formé par la demi droite d'angle ( $0^\circ$ ), appelée **axe polaire** et le point.

En coordonnées polaires, on a :

- $A(3; 30^\circ)$
- $B(4; 210^\circ)$
- $C(1; 150^\circ)$

## 2. Passage en coordonnées polaires.



Point  $\left( \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{radiale} \end{array} ; \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{angulaire} \end{array} \right)$

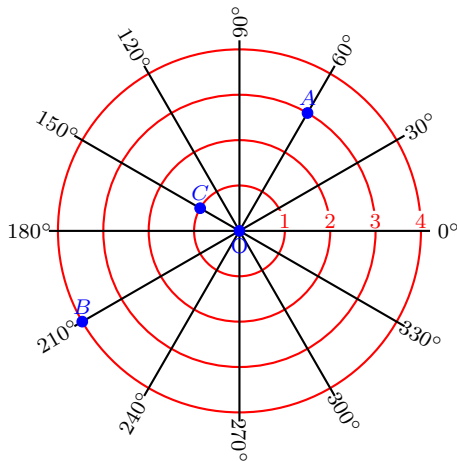
Les coordonnées **radiales**, notées  $\rho$  ou  $r$  expriment la distance entre le point et l'origine du repère appelé **pôle**.

Les coordonnées **angulaires**, notées  $\theta$  également appelé angle **polaire** exprime la mesure, dans le sens trigonométrique, de l'angle formé par la demi droite d'angle ( $0^\circ$ ), appelée **axe polaire** et le point.

En coordonnées polaires, on a :

- $A(3; 30^\circ)$
- $B(4; 210^\circ)$
- $C(1; 150^\circ)$
- $O$

## 2. Passage en coordonnées polaires.



Point  $\left( \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{radiale} \end{array} ; \begin{array}{l} \text{coordonnée} \\ \text{angulaire} \end{array} \right)$

Les coordonnées **radiales**, notées  $\rho$  ou  $r$  expriment la distance entre le point et l'origine du repère appelé **pôle**.

Les coordonnées **angulaires**, notées  $\theta$  également appelé angle **polaire** exprime la mesure, dans le sens trigonométrique, de l'angle formé par la demi droite d'angle ( $0^\circ$ ), appelée **axe polaire** et le point.

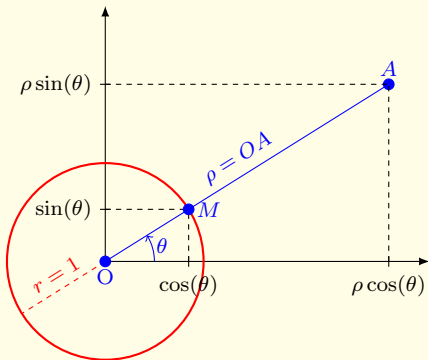
En coordonnées polaires, on a :

- $A(3; 30^\circ)$
- $B(4; 210^\circ)$
- $C(1; 150^\circ)$
- $O(0; \theta)$



### Passage des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes :

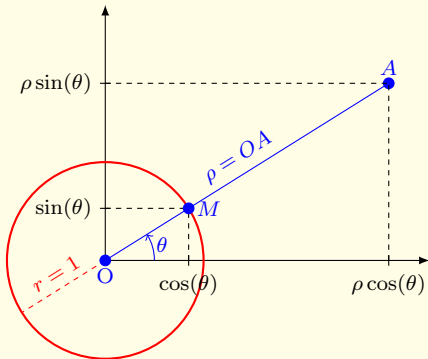
Le point  $M$  de coordonnées polaires :





### Passage des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes :

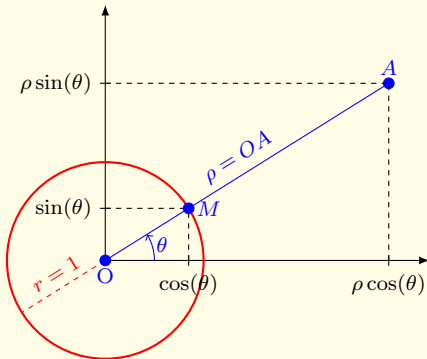
Le point  $M$  de coordonnées polaires :  $(1; \theta)$





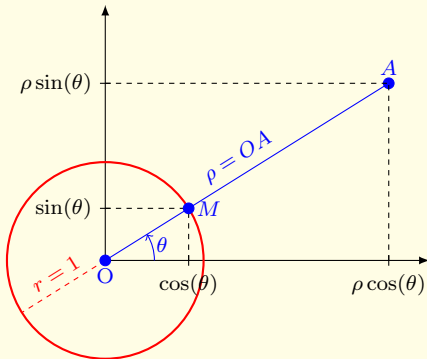
### Passage des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes :

Le point  $M$  de coordonnées polaires :  $(1; \theta)$   
est placé sur le cercle trigonométrique, donc





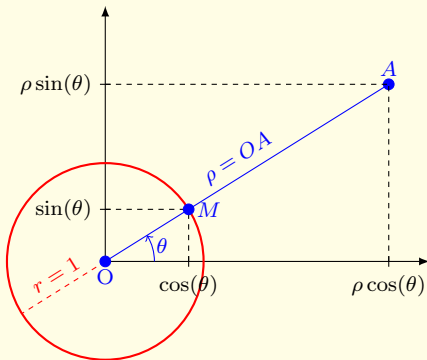
### Passage des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes :



Le point  $M$  de coordonnées polaires :  $(1; \theta)$   
est placé sur le cercle trigonométrique, donc  
ses coordonnées cartésiennes sont



### Passage des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes :



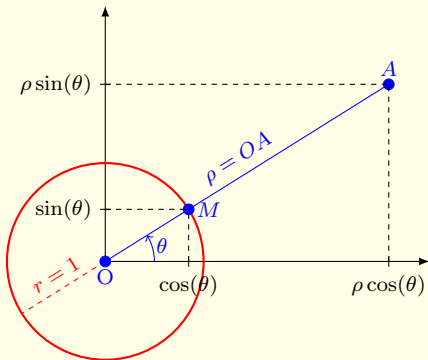
Le point  $M$  de coordonnées polaires :  $(1; \theta)$

est placé sur le cercle trigonométrique, donc

ses coordonnées cartésiennes sont  $\begin{cases} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{cases}$



### Passage des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes :



Le point  $M$  de coordonnées polaires :  $(1; \theta)$

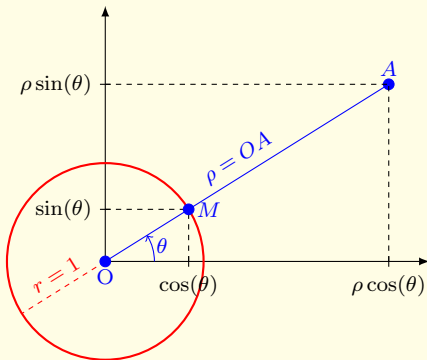
est placé sur le cercle trigonométrique, donc

ses coordonnées cartésiennes sont  $\begin{cases} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{cases}$

Le point  $A$  de coordonnées polaires :



### Passage des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes :



Le point  $M$  de coordonnées polaires :  $(1; \theta)$

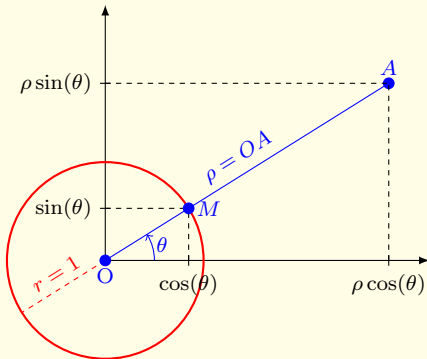
est placé sur le cercle trigonométrique, donc

ses coordonnées cartésiennes sont  $\begin{cases} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{cases}$

Le point  $A$  de coordonnées polaires :  $(\rho; \theta)$ .



### Passage des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes :



Le point  $M$  de coordonnées polaires :  $(1; \theta)$

est placé sur le cercle trigonométrique, donc

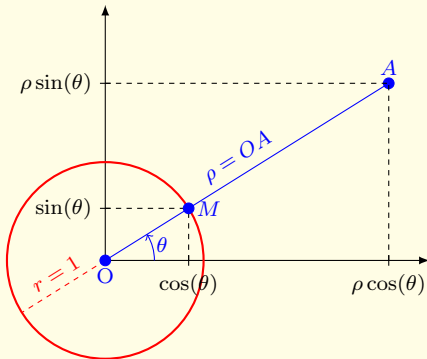
ses coordonnées cartésiennes sont  $\begin{cases} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{cases}$

Le point  $A$  de coordonnées polaires :  $(\rho; \theta)$ .

Ses coordonnées cartésiennes sont  $\begin{cases} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \end{cases}$



### Passage des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes :



Le point  $M$  de coordonnées polaires :  $(1; \theta)$

est placé sur le cercle trigonométrique, donc

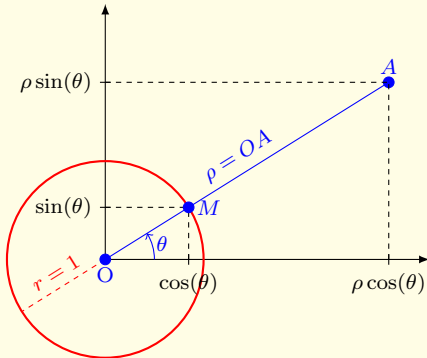
ses coordonnées cartésiennes sont  $\begin{cases} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{cases}$

Le point  $A$  de coordonnées polaires :  $(\rho; \theta)$ .

Ses coordonnées cartésiennes sont  $\begin{cases} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \end{cases}$



### Passage des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes :



Le point  $M$  de coordonnées polaires :  $(1; \theta)$

est placé sur le cercle trigonométrique, donc

ses coordonnées cartésiennes sont  $\begin{cases} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{cases}$

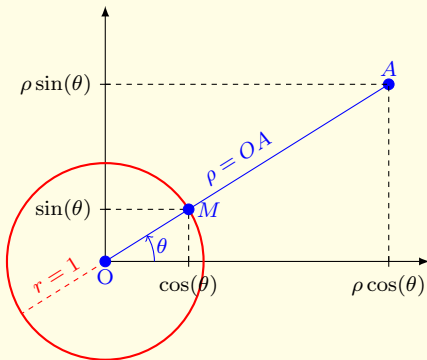
Le point  $A$  de coordonnées polaires :  $(\rho; \theta)$ .

Ses coordonnées cartésiennes sont  $\begin{cases} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \end{cases}$

**Formule de changement de coordonnées :**



### Passage des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes :



Le point  $M$  de coordonnées polaires :  $(1; \theta)$

est placé sur le cercle trigonométrique, donc

ses coordonnées cartésiennes sont  $\begin{cases} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{cases}$

Le point  $A$  de coordonnées polaires :  $(\rho; \theta)$ .

Ses coordonnées cartésiennes sont  $\begin{cases} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \end{cases}$

**Formule de changement de coordonnées :**

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

### 3. Changement de variables dans les intégrales doubles



#### **Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles**

Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux domaines de plan  $\mathbb{R}^2$  et  $\Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$  une application

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$$

injective de classe  $C^1$  telle que  $\Phi(\mathcal{D}') = \mathcal{D}$  alors on a :

### 3. Changement de variables dans les intégrales doubles



#### **Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles**

Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux domaines de plan  $\mathbb{R}^2$  et  $\Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$  une application

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$$

injective de classe  $C^1$  telle que  $\Phi(\mathcal{D}') = \mathcal{D}$  alors on a :

$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$



### Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles

$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

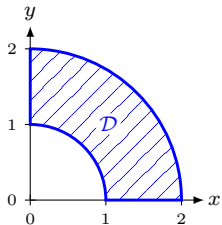
**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est la partie du plan contenue dans le premier quadrant et comprise entre les deux cercles  $\mathcal{C}(O, 1)$  et  $\mathcal{C}(O, 2)$  comme l'indique la figure ci-dessous :



### Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles

$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est la partie du plan contenue dans le premier quadrant et comprise entre les deux cercles  $\mathcal{C}(O, 1)$  et  $\mathcal{C}(O, 2)$  comme l'indique la figure ci-dessous :

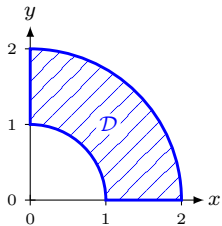




### Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles

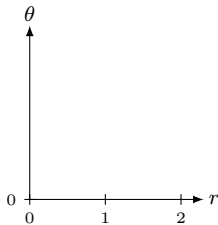
$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est la partie du plan contenue dans le premier quadrant et comprise entre les deux cercles  $\mathcal{C}(O, 1)$  et  $\mathcal{C}(O, 2)$  comme l'indique la figure ci-dessous :



Passage en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{D}' &\longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

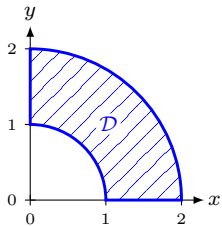




### Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles

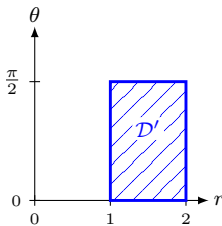
$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est la partie du plan contenue dans le premier quadrant et comprise entre les deux cercles  $\mathcal{C}(O, 1)$  et  $\mathcal{C}(O, 2)$  comme l'indique la figure ci-dessous :



Passage en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{D}' &\longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

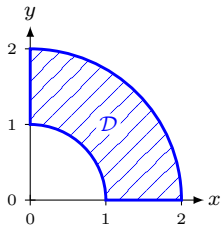




## Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles

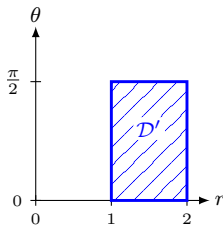
$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est la partie du plan contenue dans le premier quadrant et comprise entre les deux cercles  $\mathcal{C}(O, 1)$  et  $\mathcal{C}(O, 2)$  comme l'indique la figure ci-dessous :



Passage en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{D}' &\longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$



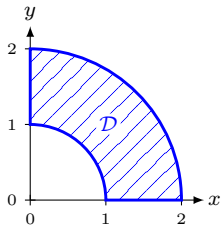
$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \left| \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} \right| =$$



## Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles

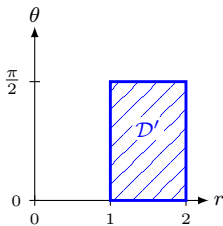
$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est la partie du plan contenue dans le premier quadrant et comprise entre les deux cercles  $\mathcal{C}(O, 1)$  et  $\mathcal{C}(O, 2)$  comme l'indique la figure ci-dessous :



Passage en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{D}' &\longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$



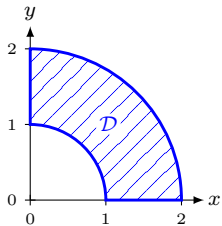
$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{vmatrix} =$$



### Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles

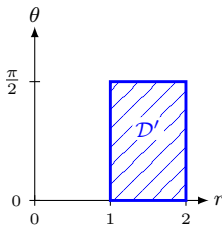
$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est la partie du plan contenue dans le premier quadrant et comprise entre les deux cercles  $\mathcal{C}(O, 1)$  et  $\mathcal{C}(O, 2)$  comme l'indique la figure ci-dessous :



Passage en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{D}' &\longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$



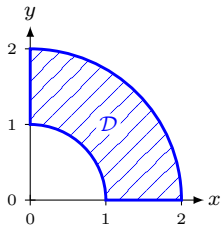
$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} =$$



### Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles

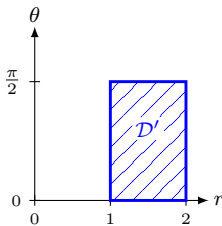
$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est la partie du plan contenue dans le premier quadrant et comprise entre les deux cercles  $\mathcal{C}(O, 1)$  et  $\mathcal{C}(O, 2)$  comme l'indique la figure ci-dessous :



Passage en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{D}' &\longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$



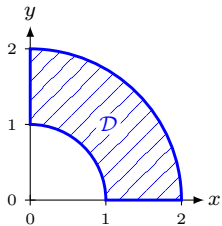
$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} =$$



## Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles

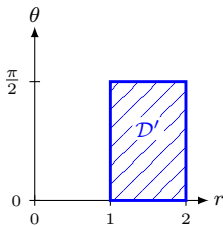
$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est la partie du plan contenue dans le premier quadrant et comprise entre les deux cercles  $\mathcal{C}(O, 1)$  et  $\mathcal{C}(O, 2)$  comme l'indique la figure ci-dessous :



Passage en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{D}' &\longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$



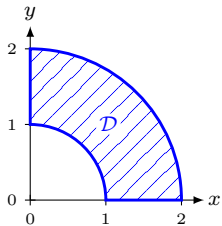
$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) +$$



### Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles

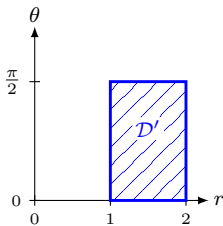
$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

**Exemple n° 5 :** Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est la partie du plan contenue dans le premier quadrant et comprise entre les deux cercles  $\mathcal{C}(O, 1)$  et  $\mathcal{C}(O, 2)$  comme l'indique la figure ci-dessous :



Passage en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{D}' &\longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$



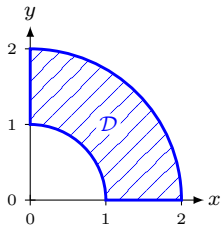
$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) =$$



### Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles

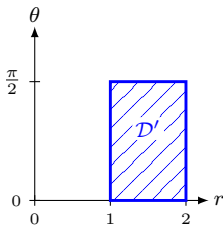
$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est la partie du plan contenue dans le premier quadrant et comprise entre les deux cercles  $\mathcal{C}(O, 1)$  et  $\mathcal{C}(O, 2)$  comme l'indique la figure ci-dessous :



Passage en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{D}' &\longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$



$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r$$



### Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles

$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r$$

$$\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy =$$


**Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles**

$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

**Exemple n° 5 :** Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r$$

$$\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} \ln(x^2 + y^2) \, r \, dr \, d\theta$$


**Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles**

$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

**Exemple n° 5 :** Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r$$

$$\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} \ln(x^2 + y^2) \, r \, dr \, d\theta$$

où  $x^2 + y^2 =$


**Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles**

$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r$$

$$\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} \ln(x^2 + y^2) \, r \, dr \, d\theta$$

$$\text{où } x^2 + y^2 = (r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 =$$


**Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles**

$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r$$

$$\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} \ln(x^2 + y^2) \, r \, dr \, d\theta$$

$$\text{où } x^2 + y^2 = (r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 = r^2$$

=


**Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles**

$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r$$

$$\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} \ln(x^2 + y^2) \, r \, dr \, d\theta$$

$$\text{où } x^2 + y^2 = (r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 = r^2$$

$$= \iint_{\mathcal{D}'} \ln(r^2) \, r \, dr \, d\theta$$


**Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles**

$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r$$

$$\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} \ln(x^2 + y^2) \, r \, dr \, d\theta$$

$$\text{où } x^2 + y^2 = (r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 = r^2$$

$$= \iint_{\mathcal{D}'} \ln(r^2) \, r \, dr \, d\theta$$

=



### Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles

$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r$$

$$\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} \ln(x^2 + y^2) \, r \, dr \, d\theta$$

$$\text{où } x^2 + y^2 = (r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 = r^2$$

$$= \iint_{\mathcal{D}'} \ln(r^2) \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) \, r \, dr \, d\theta \quad = \text{variables séparées}$$



### Théorème : Changement de variables dans les intégrales doubles

$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r$$

$$\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} \ln(x^2 + y^2) \, r \, dr \, d\theta$$

$$\text{où } x^2 + y^2 = (r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 = r^2$$

$$= \iint_{\mathcal{D}'} \ln(r^2) \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) \, r \, dr \, d\theta \stackrel{\text{variables séparées}}{=} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_1^2 \ln(r^2) \, r \, dr \right)$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy$

$$\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) r dr d\theta \stackrel{\text{variables séparées}}{=} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_1^2 \ln(r^2) r dr \right)$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy$

$$\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) r dr d\theta \stackrel{\text{variables séparées}}{=} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_1^2 \ln(r^2) r dr \right)$$

=

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) r dr d\theta \stackrel{\text{variables}}{=} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_1^2 \ln(r^2) r dr \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \times \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 5 :** Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) r dr d\theta \stackrel{\text{variables}}{=} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_1^2 \ln(r^2) r dr \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \times \int_1^2 2 \ln(r) r dr = \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) \, r \, dr \, d\theta \quad \underset{\text{variables}}{=} \quad \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_1^2 \ln(r^2) \, r \, dr \right) \\ &\quad \text{séparées} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \int_1^2 2 \ln(r) \, r \, dr = \pi \underbrace{\int_1^2 r \ln(r) \, dr}_{=I} \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) r dr d\theta \quad \underset{\text{variables séparées}}{=} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_1^2 \ln(r^2) r dr \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \times \int_1^2 2 \ln(r) r dr = \pi \underbrace{\int_1^2 r \ln(r) dr}_{=I} \end{aligned}$$

On intègre par partie :

$$\begin{cases} u(r) = & \begin{cases} u'(r) = \\ v(r) = \end{cases} \\ v'(r) = & \end{cases} \quad \text{donc } I =$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) \, r \, dr \, d\theta \quad \underset{\text{variables séparées}}{=} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_1^2 \ln(r^2) \, r \, dr \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \times \int_1^2 2 \ln(r) \, r \, dr = \pi \underbrace{\int_1^2 r \ln(r) \, dr}_{=I} \end{aligned}$$

On intègre par partie :  $\begin{cases} u(r) = \ln(r) \\ v'(r) = \end{cases} \quad \begin{cases} u'(r) = \\ v(r) = \end{cases} \quad \text{donc } I =$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) \, r \, dr \, d\theta \quad \underset{\substack{\text{variables} \\ \text{séparées}}}{=} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_1^2 \ln(r^2) \, r \, dr \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \times \int_1^2 2 \ln(r) \, r \, dr = \pi \underbrace{\int_1^2 r \ln(r) \, dr}_{=I} \end{aligned}$$

On intègre par partie :  $\begin{cases} u(r) = \ln(r) \\ v'(r) = r \end{cases} \quad \begin{cases} u'(r) = \\ v(r) = \end{cases} \quad \text{donc } I =$



## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) \, r \, dr \, d\theta \quad \underset{\text{variables séparées}}{=} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_1^2 \ln(r^2) \, r \, dr \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \times \int_1^2 2 \ln(r) \, r \, dr = \pi \underbrace{\int_1^2 r \ln(r) \, dr}_{=I} \end{aligned}$$

On intègre par partie :  $\begin{cases} u(r) = \ln(r) \\ v'(r) = r \end{cases} \quad \begin{cases} u'(r) = \frac{1}{r} \\ v(r) = \frac{r^2}{2} \end{cases} \quad \text{donc } I =$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) \, r \, dr \, d\theta \quad \underset{\text{variables}}{=} \quad \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_1^2 \ln(r^2) \, r \, dr \right) \\ &\quad \underset{\text{séparées}}{} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \int_1^2 2 \ln(r) \, r \, dr = \pi \underbrace{\int_1^2 r \ln(r) \, dr}_{=I} \end{aligned}$$

On intègre par partie :

$$\begin{cases} u(r) = \ln(r) \\ v'(r) = r \end{cases} \quad \begin{cases} u'(r) = \frac{1}{r} \\ v(r) = \frac{r^2}{2} \end{cases} \quad \text{donc } I = \frac{1}{2} [r^2 \ln(r)]_1^2 - \int_1^2 \frac{r}{2} \, dr$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) r dr d\theta \stackrel{\text{variables séparées}}{=} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_1^2 \ln(r^2) r dr \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \times \int_1^2 2 \ln(r) r dr = \pi \underbrace{\int_1^2 r \ln(r) dr}_{=I} \end{aligned}$$

On intègre par partie : 
$$\begin{cases} u(r) = \ln(r) \\ v'(r) = r \end{cases} \quad \begin{cases} u'(r) = \frac{1}{r} \\ v(r) = \frac{r^2}{2} \end{cases} \quad \text{donc } I = \frac{1}{2} [r^2 \ln(r)]_1^2 - \int_1^2 \frac{r}{2} dr$$

$I =$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) r dr d\theta \quad \underset{\text{variables séparées}}{=} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_1^2 \ln(r^2) r dr \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \times \int_1^2 2 \ln(r) r dr = \pi \underbrace{\int_1^2 r \ln(r) dr}_{=I} \end{aligned}$$

On intègre par partie :  $\begin{cases} u(r) = \ln(r) \\ v'(r) = r \end{cases} \quad \begin{cases} u'(r) = \frac{1}{r} \\ v(r) = \frac{r^2}{2} \end{cases}$  donc  $I = \frac{1}{2} [r^2 \ln(r)]_1^2 - \int_1^2 \frac{r}{2} dr$

$$I = \frac{1}{2} [r^2 \ln(r)]_1^2 - \left[ \frac{r^2}{4} \right]_1^2 =$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) r dr d\theta \quad \underset{\substack{\text{variables} \\ \text{séparées}}}{=} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_1^2 \ln(r^2) r dr \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \times \int_1^2 2 \ln(r) r dr = \pi \underbrace{\int_1^2 r \ln(r) dr}_{=I} \end{aligned}$$

On intègre par partie :  $\begin{cases} u(r) = \ln(r) \\ v'(r) = r \end{cases} \quad \begin{cases} u'(r) = \frac{1}{r} \\ v(r) = \frac{r^2}{2} \end{cases}$  donc  $I = \frac{1}{2} [r^2 \ln(r)]_1^2 - \int_1^2 \frac{r}{2} dr$

$$I = \frac{1}{2} [r^2 \ln(r)]_1^2 - \left[ \frac{r^2}{4} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left[ r^2 \ln(r) - \frac{r^2}{2} \right]_1^2 =$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy$

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) r dr d\theta \quad \underset{\substack{\text{variables} \\ \text{séparées}}}{=} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_1^2 \ln(r^2) r dr \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \times \int_1^2 2 \ln(r) r dr = \pi \underbrace{\int_1^2 r \ln(r) dr}_{=I}\end{aligned}$$

On intègre par partie :  $\begin{cases} u(r) = \ln(r) \\ v'(r) = r \end{cases} \quad \begin{cases} u'(r) = \frac{1}{r} \\ v(r) = \frac{r^2}{2} \end{cases}$  donc  $I = \frac{1}{2} [r^2 \ln(r)]_1^2 - \int_1^2 \frac{r}{2} dr$

$$I = \frac{1}{2} [r^2 \ln(r)]_1^2 - \left[ \frac{r^2}{4} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left[ r^2 \ln(r) - \frac{r^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left[ (4 \ln(2) - 2) - \left( \frac{1}{2} \right) \right]$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) r dr d\theta \quad \underset{\text{variables séparées}}{=} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_1^2 \ln(r^2) r dr \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \times \int_1^2 2 \ln(r) r dr = \pi \underbrace{\int_1^2 r \ln(r) dr}_{=I} \end{aligned}$$

On intègre par partie :  $\begin{cases} u(r) = \ln(r) \\ v'(r) = r \end{cases} \quad \begin{cases} u'(r) = \frac{1}{r} \\ v(r) = \frac{r^2}{2} \end{cases} \quad \text{donc } I = \frac{1}{2} [r^2 \ln(r)]_1^2 - \int_1^2 \frac{r}{2} dr$

$$I = \frac{1}{2} [r^2 \ln(r)]_1^2 - \left[ \frac{r^2}{4} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left[ r^2 \ln(r) - \frac{r^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left[ (4 \ln(2) - 2) - \left( \frac{1}{2} \right) \right]$$

$I =$

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) \, r \, dr \, d\theta \quad \underset{\substack{\text{variables} \\ \text{séparées}}}{=} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_1^2 \ln(r^2) \, r \, dr \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \times \int_1^2 2 \ln(r) \, r \, dr = \pi \underbrace{\int_1^2 r \ln(r) \, dr}_{=I} \end{aligned}$$

On intègre par partie :  $\begin{cases} u(r) = \ln(r) \\ v'(r) = r \end{cases} \quad \begin{cases} u'(r) = \frac{1}{r} \\ v(r) = \frac{r^2}{2} \end{cases} \quad \text{donc } I = \frac{1}{2} [r^2 \ln(r)]_1^2 - \int_1^2 \frac{r}{2} \, dr$

$$I = \frac{1}{2} [r^2 \ln(r)]_1^2 - \left[ \frac{r^2}{4} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left[ r^2 \ln(r) - \frac{r^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left[ (4 \ln(2) - 2) - \left( \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$I = 2 \ln(2) - \frac{3}{4}$$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) \, r \, dr \, d\theta \quad \text{variables séparées} = \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_1^2 \ln(r^2) \, r \, dr \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \times \int_1^2 2 \ln(r) \, r \, dr = \pi \underbrace{\int_1^2 r \ln(r) \, dr}_{=I} \end{aligned}$$

On intègre par partie :  $\begin{cases} u(r) = \ln(r) \\ v'(r) = r \end{cases} \quad \begin{cases} u'(r) = \frac{1}{r} \\ v(r) = \frac{r^2}{2} \end{cases}$  donc  $I = \frac{1}{2} [r^2 \ln(r)]_1^2 - \int_1^2 \frac{r}{2} \, dr$

$$I = \frac{1}{2} [r^2 \ln(r)]_1^2 - \left[ \frac{r^2}{4} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left[ r^2 \ln(r) - \frac{r^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left[ (4 \ln(2) - 2) - \left( \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$I = 2 \ln(2) - \frac{3}{4}$$

Ainsi,  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy =$

## II. L'intégrale double.

**Exemple n° 5** : Calculons l'intégrale double  $\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy$

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \ln(r^2) r dr d\theta \quad \text{variables séparées} = \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_1^2 \ln(r^2) r dr \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \times \int_1^2 2 \ln(r) r dr = \pi \underbrace{\int_1^2 r \ln(r) dr}_{=I}\end{aligned}$$

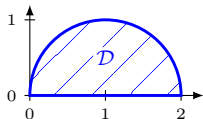
On intègre par partie : 
$$\begin{cases} u(r) = \ln(r) \\ v'(r) = r \end{cases} \quad \begin{cases} u'(r) = \frac{1}{r} \\ v(r) = \frac{r^2}{2} \end{cases} \quad \text{donc } I = \frac{1}{2} [r^2 \ln(r)]_1^2 - \int_1^2 \frac{r}{2} dr$$

$$I = \frac{1}{2} [r^2 \ln(r)]_1^2 - \left[ \frac{r^2}{4} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left[ r^2 \ln(r) - \frac{r^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left[ (4 \ln(2) - 2) - \left( \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$I = 2 \ln(2) - \frac{3}{4}$$

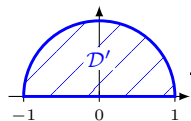
Ainsi, 
$$\iint_{\mathcal{D}} \ln(x^2 + y^2) dx dy = \left( 2 \ln(2) - \frac{3}{4} \right) \pi$$

**Exercice n° 5** : Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :

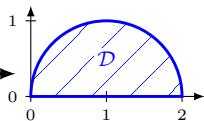


## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 5** : Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :

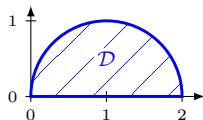


$\Phi$



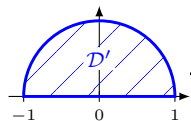
où

$$\Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

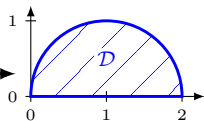


## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 5** : Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :

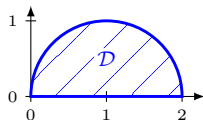


$\Phi$



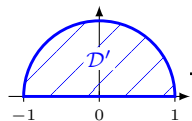
où

$$\Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases}$$

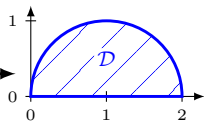


## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 5** : Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :

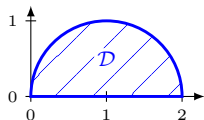


$\xrightarrow{\Phi}$

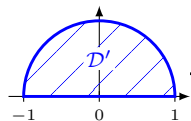
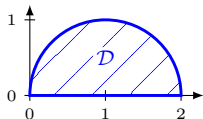


où

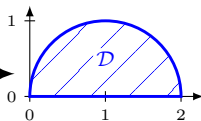
$$\Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases}$$



**Exercice n° 5** : Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :



$\Phi$



où

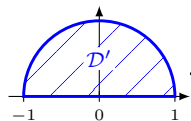
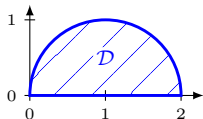
$$\Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases}$$

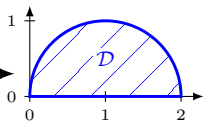
$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy =$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 5** : Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :



$\Phi$



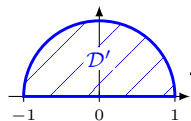
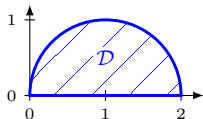
où

$$\Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases}$$

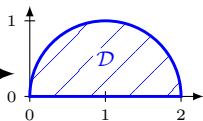
$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} x \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \text{ où}$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 5** : Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :



$\Phi$



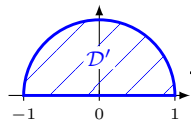
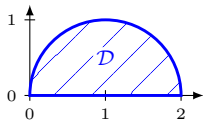
où

$$\Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases}$$

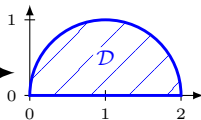
$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} x \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \text{ où } \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| =$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 5** : Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :



$\Phi$



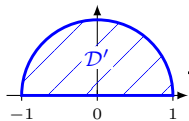
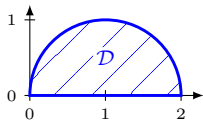
où

$$\Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases}$$

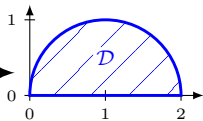
$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} x \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \text{ où } \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} =$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 5** : Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :



$\Phi$



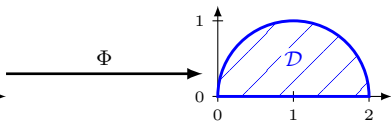
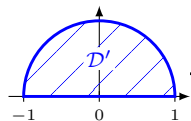
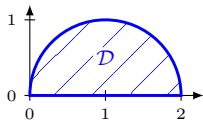
où

$$\Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases}$$

$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} x \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \text{ où } \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 5** : Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :

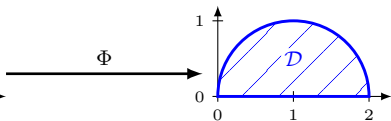
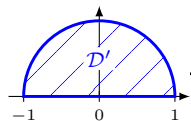
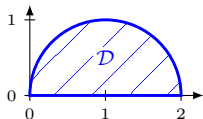


$$\text{où } \left. \begin{array}{l} \Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases} \end{array} \right|$$

$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} x \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \text{ où } \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 5** : Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :

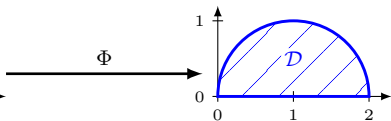
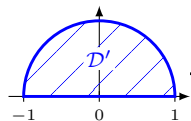
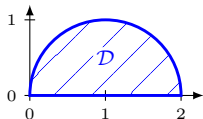


$$\text{où } \left. \begin{array}{l} \Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases} \end{array} \right|$$

$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} x \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \text{ où } \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

## II. L'intégrale double.

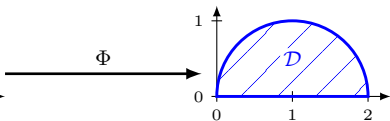
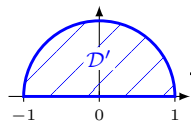
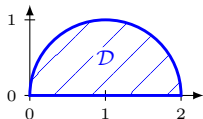
**Exercice n° 5** : Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :



$$\text{où } \left. \begin{array}{l} \Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases} \end{array} \right|$$

$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} x \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \text{ où } \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

**Exercice n° 5** : Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :


 $\Phi$ 

où

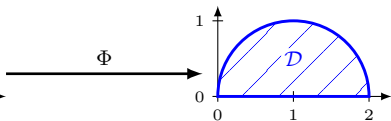
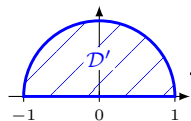
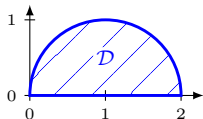
$$\Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases}$$

$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} x \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \text{ où } \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 5 :** Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :



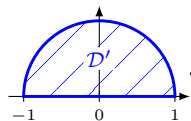
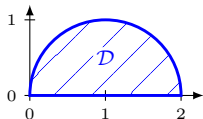
$$\text{où } \left. \begin{array}{l} \Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases} \end{array} \right|$$

$$\iint_{\Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} x \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \text{ où } \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

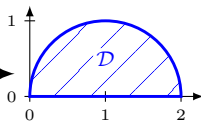
=

## II. L'intégrale double.

**Exercice n° 5 :** Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :



$\Phi$



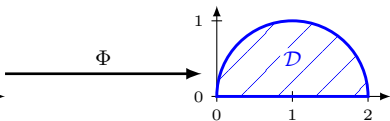
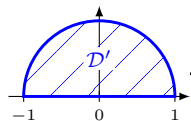
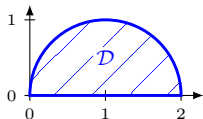
où

$$\Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy &= \iint_{\mathcal{D}'} x \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \text{ où } \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ &= \iint_{\mathcal{D}'} (u + 1) \, du \, dv = \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

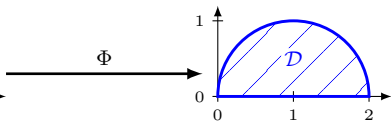
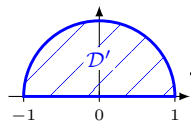
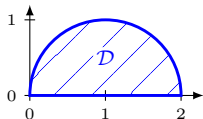
**Exercice n° 5** : Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :



$$\text{où } \left. \begin{array}{l} \Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy &= \iint_{\mathcal{D}'} x \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \text{ où } \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ &= \iint_{\mathcal{D}'} (u + 1) \, du \, dv = \int_0^\pi \int_0^1 (u + 1) r \, dr \, d\theta = \end{aligned}$$

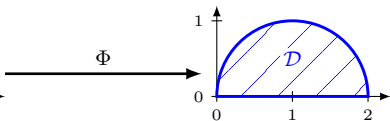
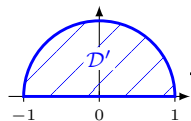
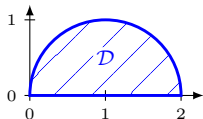
**Exercice n° 5** : Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :



$$\text{où } \left. \begin{array}{l} \Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy &= \iint_{\mathcal{D}'} x \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \text{ où } \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ &= \iint_{\mathcal{D}'} (u + 1) \, du \, dv = \int_0^\pi \int_0^1 (u + 1) r \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \int_0^1 (r \cos(\theta) + 1) r \, dr \, d\theta \\ &= \end{aligned}$$

**Exercice n° 5** : Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :


 $\Phi$ 

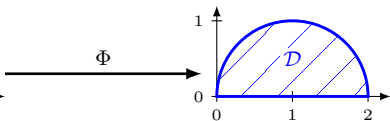
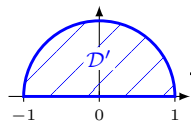
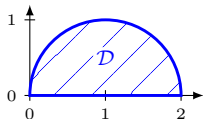
où

$$\Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy &= \iint_{\mathcal{D}'} x \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \text{ où } \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ &= \iint_{\mathcal{D}'} (u + 1) \, du \, dv = \int_0^\pi \int_0^1 (u + 1) r \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \int_0^1 (r \cos(\theta) + 1) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 (r^2 \cos(\theta) + r) \, dr \, d\theta = \end{aligned}$$

**Exercice n° 5 :** Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :

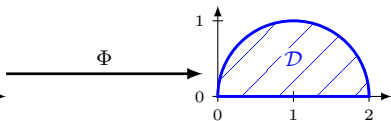
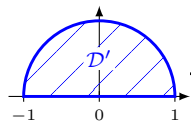
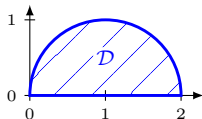

 $\Phi$ 

où

$$\Phi: \begin{cases} \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D} \\ (u) \longrightarrow x = u + 1 \\ (v) \longrightarrow y = v \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy &= \iint_{\mathcal{D}'} x \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \text{ où } \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ &= \iint_{\mathcal{D}'} (u + 1) \, du \, dv = \int_0^\pi \int_0^1 (u + 1) r \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \int_0^1 (r \cos(\theta) + 1) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 (r^2 \cos(\theta) + r) \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \left[ \frac{r^3}{3} \cos(\theta) + \frac{r^2}{2} \right]_0^1 \, d\theta \\ &= \end{aligned}$$

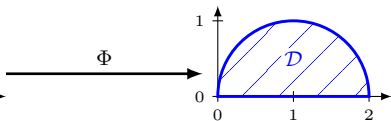
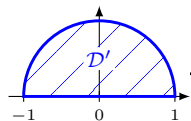
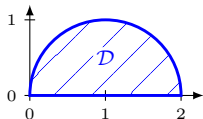
**Exercice n° 5 :** Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :



$$\text{où } \left. \begin{array}{l} \Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy &= \iint_{\mathcal{D}'} x \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \text{ où } \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ &= \iint_{\mathcal{D}'} (u + 1) \, du \, dv = \int_0^\pi \int_0^1 (u + 1) r \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \int_0^1 (r \cos(\theta) + 1) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 (r^2 \cos(\theta) + r) \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \left[ \frac{r^3}{3} \cos(\theta) + \frac{r^2}{2} \right]_0^1 \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \left( \frac{1}{3} \cos(\theta) + \frac{1}{2} \right) \, d\theta = \end{aligned}$$

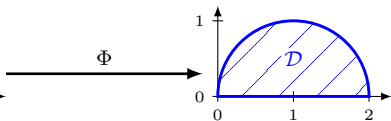
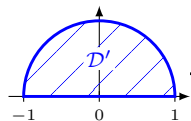
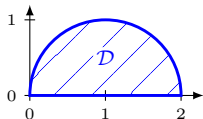
**Exercice n° 5 :** Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :



$$\text{où } \left. \begin{array}{l} \Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy &= \iint_{\mathcal{D}'} x \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \text{ où } \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ &= \iint_{\mathcal{D}'} (u + 1) \, du \, dv = \int_0^\pi \int_0^1 (u + 1) r \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \int_0^1 (r \cos(\theta) + 1) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 (r^2 \cos(\theta) + r) \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \left[ \frac{r^3}{3} \cos(\theta) + \frac{r^2}{2} \right]_0^1 \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \left( \frac{1}{3} \cos(\theta) + \frac{1}{2} \right) \, d\theta = \left[ \frac{1}{3} \sin(\theta) + \frac{1}{2} \theta \right]_0^\pi = \end{aligned}$$

**Exercice n° 5 :** Calcule l'intégrale  $\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy$  où  $\mathcal{D}$  est le demi-disque :


 $\Phi$ 

où

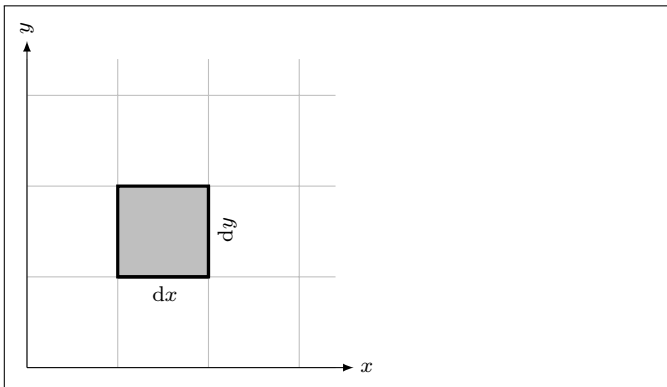
$$\Phi: \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi(\mathcal{D}')} x \, dx \, dy &= \iint_{\mathcal{D}'} x \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \text{ où } \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ &= \iint_{\mathcal{D}'} (u + 1) \, du \, dv = \int_0^\pi \int_0^1 (u + 1) r \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \int_0^1 (r \cos(\theta) + 1) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 (r^2 \cos(\theta) + r) \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \left[ \frac{r^3}{3} \cos(\theta) + \frac{r^2}{2} \right]_0^1 \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \left( \frac{1}{3} \cos(\theta) + \frac{1}{2} \right) \, d\theta = \left[ \frac{1}{3} \sin(\theta) + \frac{1}{2} \theta \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

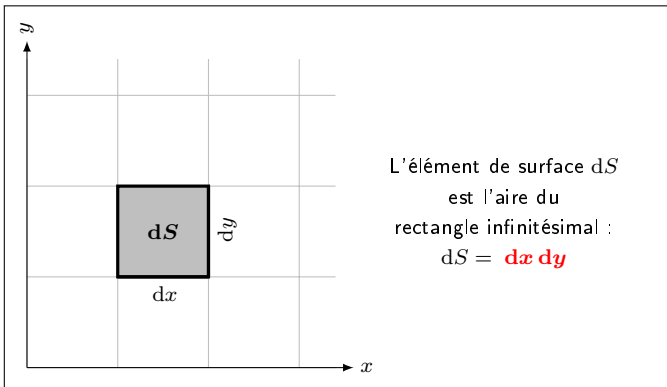
### 4. Interprétation du jacobien en termes d'élément de surface.

① Approche intuitive :



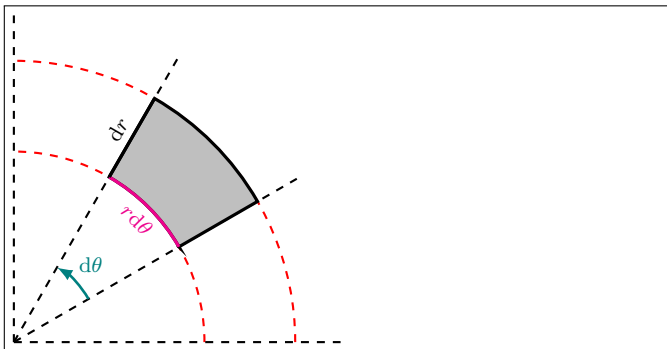
#### 4. Interprétation du jacobien en termes d'élément de surface.

① Approche intuitive :



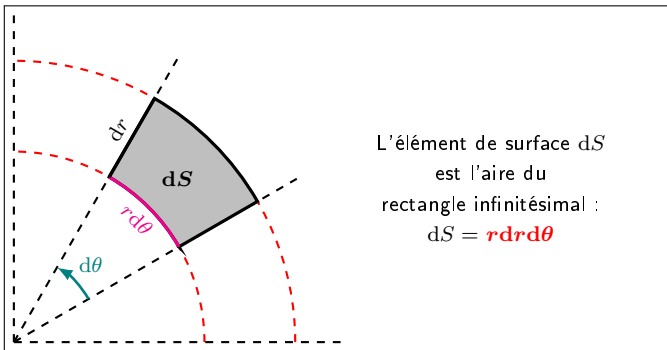
### 5. Interprétation du jacobien en termes d'élément de surface.

① Approche intuitive :

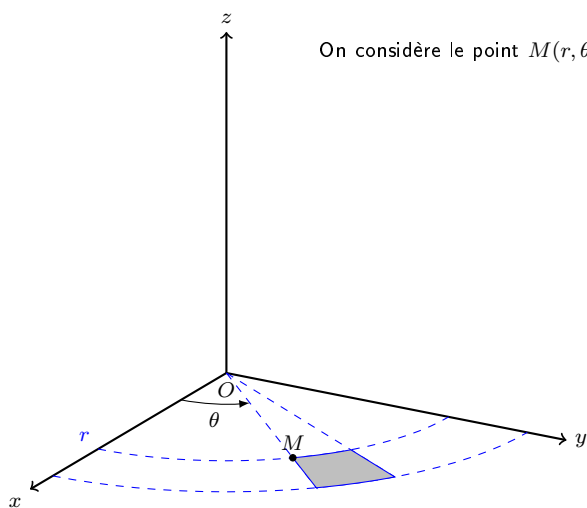


## 5. Interprétation du jacobien en termes d'élément de surface.

① Approche intuitive :



### ② Approche différentielle :

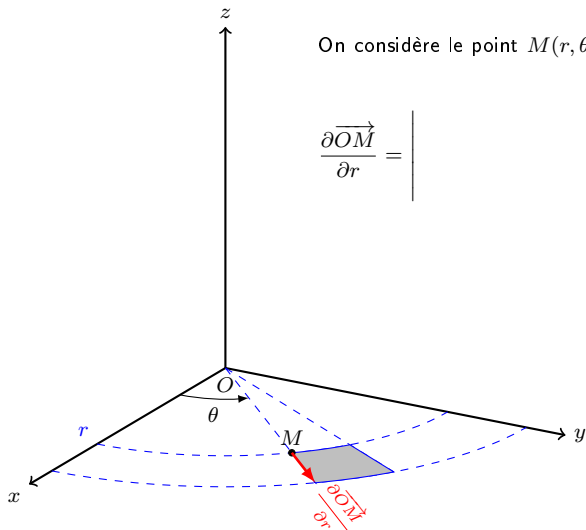


On considère le point  $M(r, \theta)$   $\left| \begin{array}{l} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 0 \end{array} \right.$

## ② Approche différentielle :

On considère le point  $M(r, \theta)$   $\left| \begin{array}{l} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 0 \end{array} \right.$

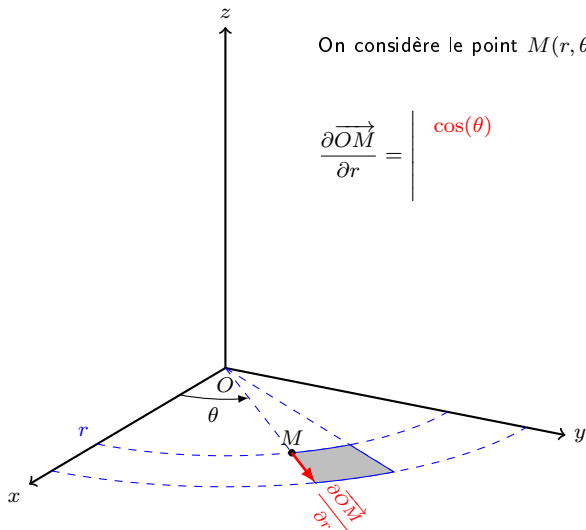
$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \left| \begin{array}{l} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{array} \right.$$



## ② Approche différentielle :

On considère le point  $M(r, \theta)$   $\left| \begin{array}{l} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 0 \end{array} \right.$

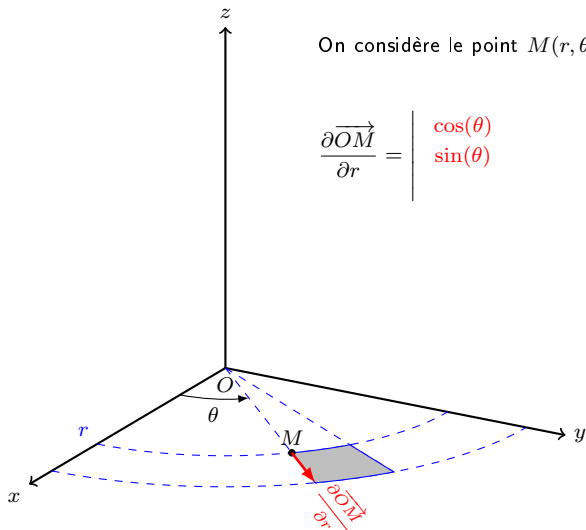
$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \left| \begin{array}{l} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{array} \right.$$



## ② Approche différentielle :

On considère le point  $M(r, \theta)$   $\left| \begin{array}{l} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 0 \end{array} \right.$

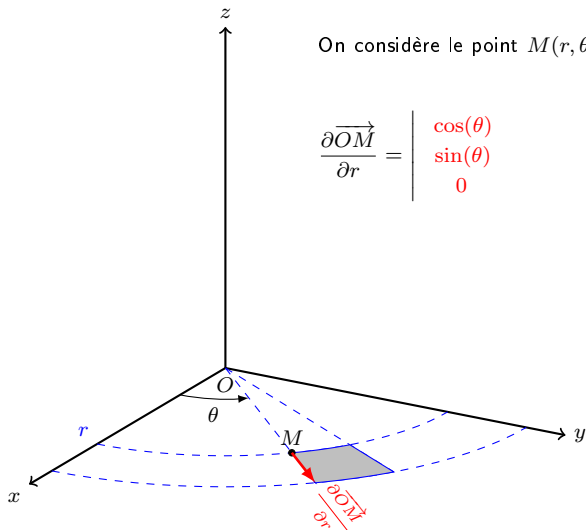
$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \begin{array}{l} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{array}$$



## ② Approche différentielle :

On considère le point  $M(r, \theta)$   $\left| \begin{array}{l} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 0 \end{array} \right.$

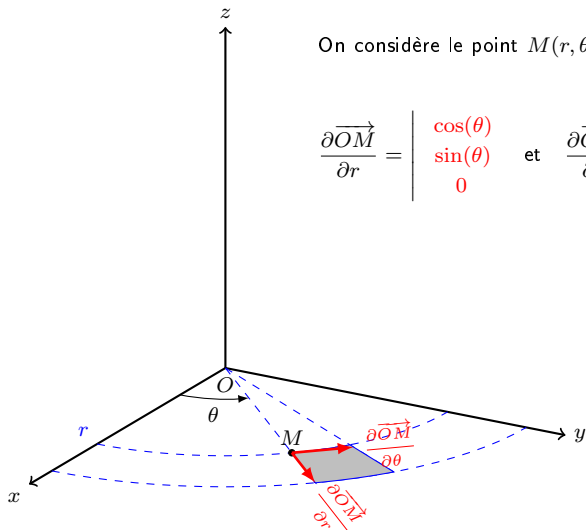
$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \left| \begin{array}{l} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{array} \right.$$



## ② Approche différentielle :

On considère le point  $M(r, \theta)$   $\begin{vmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$

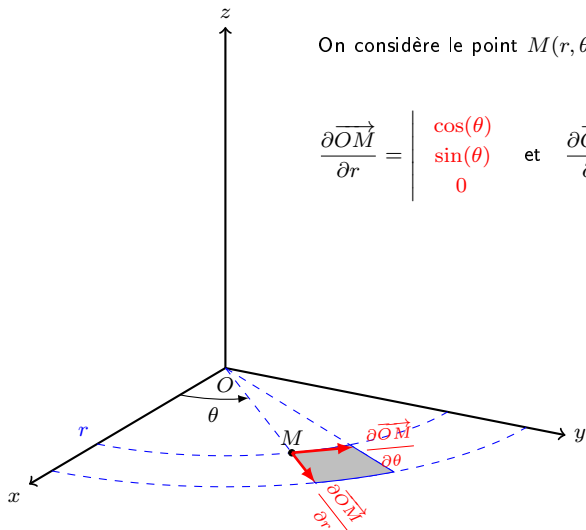
$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$



## ② Approche différentielle :

On considère le point  $M(r, \theta)$   $\begin{vmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$

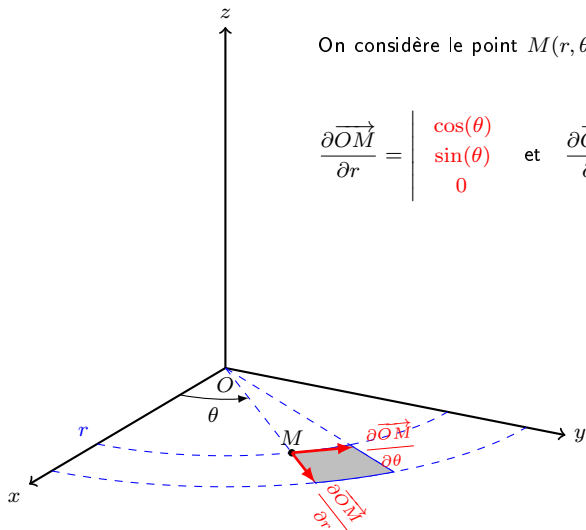
$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$



## ② Approche différentielle :

On considère le point  $M(r, \theta)$   $\begin{vmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$

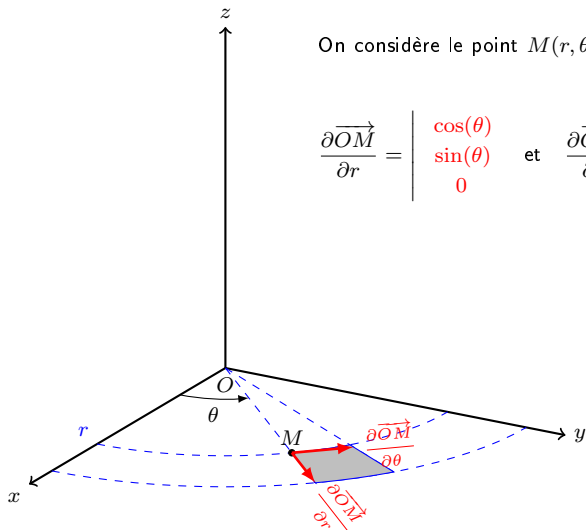
$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$



## ② Approche différentielle :

On considère le point  $M(r, \theta)$   $\begin{vmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

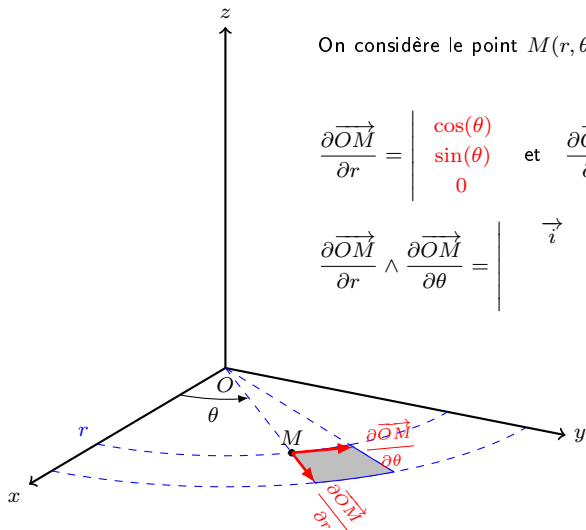


## ② Approche différentielle :

On considère le point  $M(r, \theta)$   $\begin{vmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$$

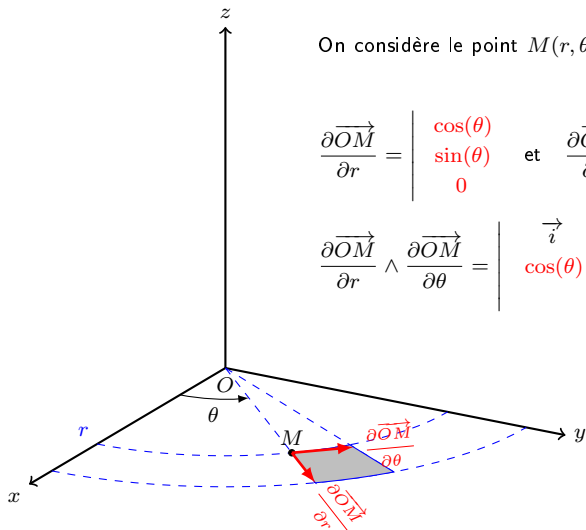


## ② Approche différentielle :

On considère le point  $M(r, \theta)$   $\begin{vmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$

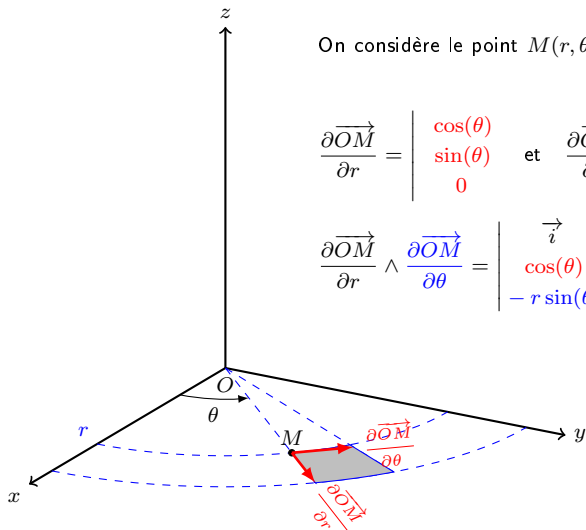


## ② Approche différentielle :

On considère le point  $M(r, \theta)$   $\begin{vmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$

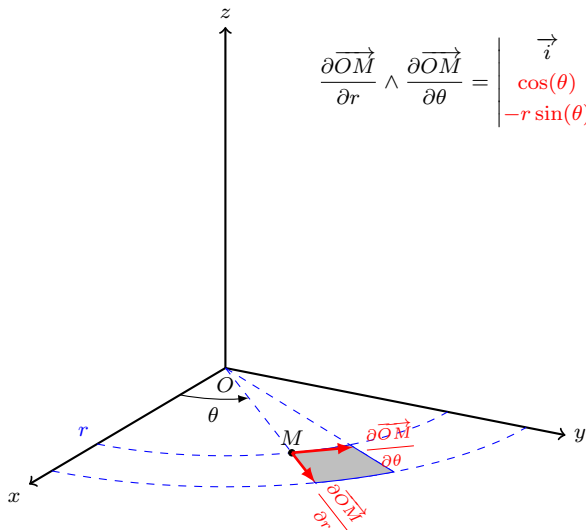
$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$



## ② Approche différentielle :

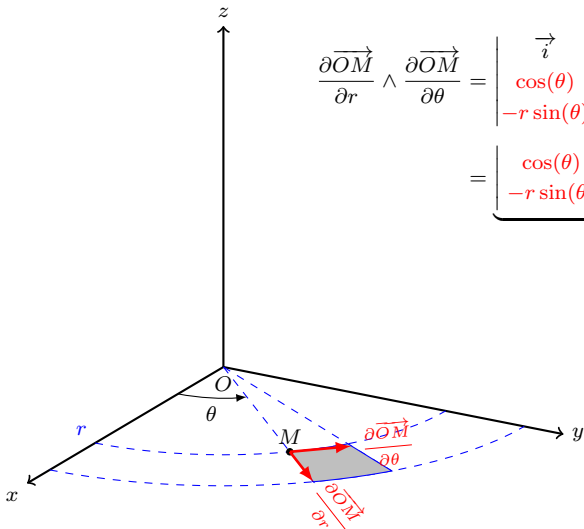
$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$



## ② Approche différentielle :

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$

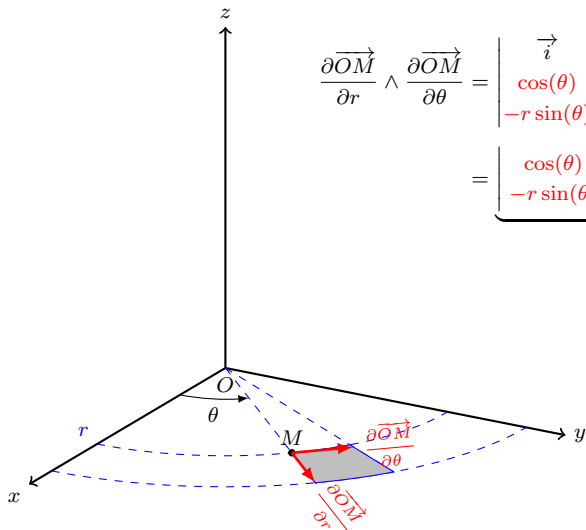
$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix}}_{\vec{k}} =$$



## ② Approche différentielle :

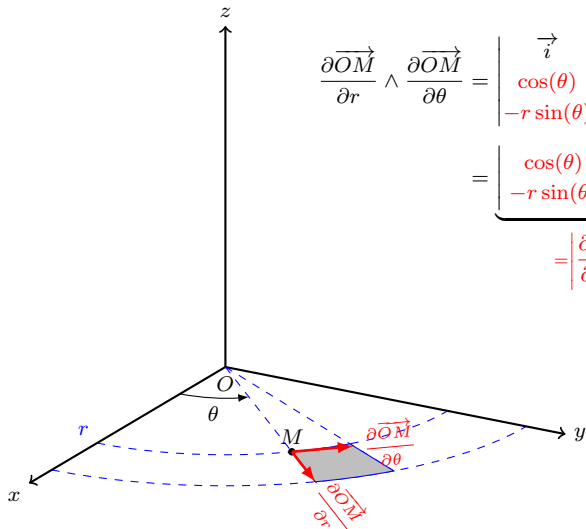
$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix}}_{r} \vec{k} = r \vec{k}$$

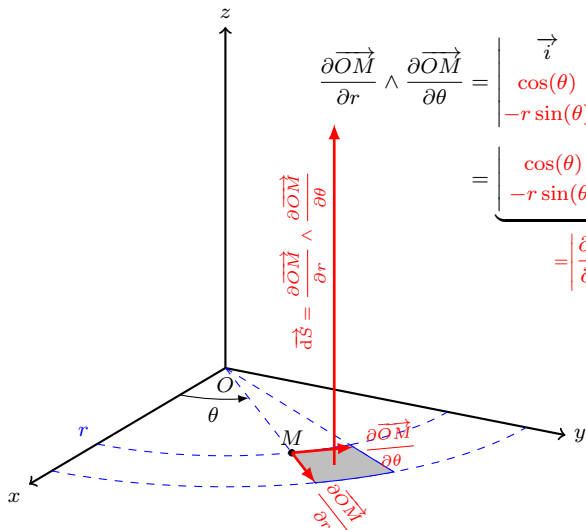


## ② Approche différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix}}_{= \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right|} \vec{k} = r \vec{k} \end{aligned}$$



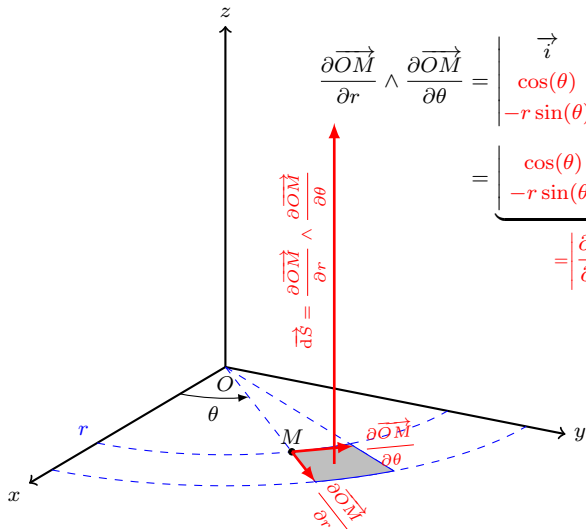
## ② Approche différentielle :



$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix}}_{= \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right|} \vec{k} = r \vec{k}$$

## ② Approche différentielle :

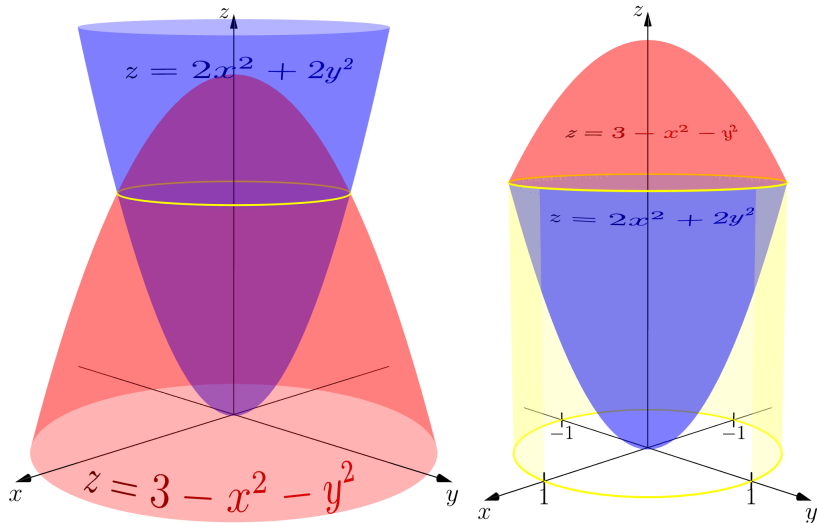


$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} \vec{k} = r \vec{k} \\ &= \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| \end{aligned}$$

Le jacobien  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$  est l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs tangents aux courbes coordonnées.

## II. L'intégrale double.

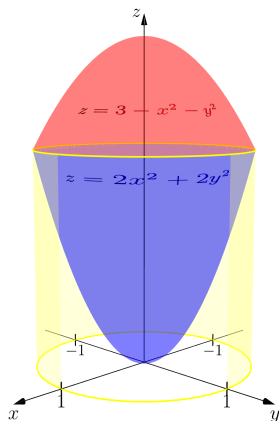
**Exercice n° 6 :** On note  $\mathcal{V}$  le volume compris entre les deux surfaces d'équations  $z = 3 - x^2 - y^2$  et  $z = 2x^2 + 2y^2$ . Calcule de deux façons différentes, l'une en utilisant un système de coordonnées cartésiennes, l'autre des coordonnées polaires, le volume  $\mathcal{V}$ .



## II. L'intégrale double.

CORRIGÉ :

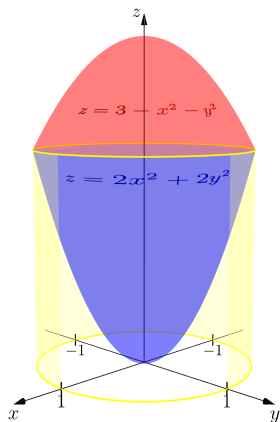
Où les paraboloides se coupent on a :  $2x^2 + 2y^2 = 3 - x^2 - y^2$



## II. L'intégrale double.

CORRIGÉ :

Où les parabolôïdes se coupent on a :  $2x^2 + 2y^2 = 3 - x^2 - y^2$   
soit  $x^2 + y^2 = 1$ .



## II. L'intégrale double.

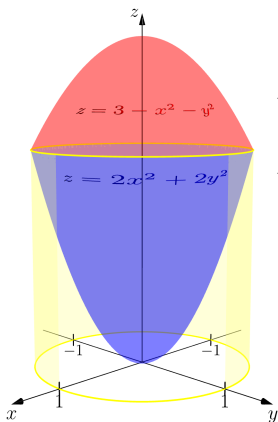
CORRIGÉ :

Où les paraboloides se coupent on a :  $2x^2 + 2y^2 = 3 - x^2 - y^2$   
soit  $x^2 + y^2 = 1$ .

Le domaine d'intégration est le disque  $\mathcal{D}$  d'équation  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

$$\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{D}} [(3 - x^2 - y^2) - (2x^2 + 2y^2)] dx dy$$

$$\mathcal{V} =$$



CORRIGÉ :

Où les paraboloides se coupent on a :  $2x^2 + 2y^2 = 3 - x^2 - y^2$   
soit  $x^2 + y^2 = 1$ .

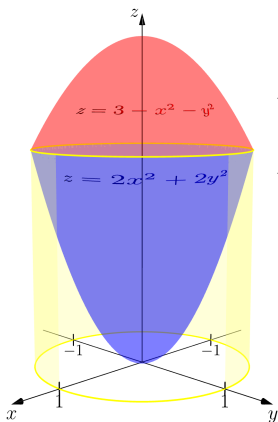
Le domaine d'intégration est le disque  $\mathcal{D}$  d'équation  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

$$\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{D}} [(3 - x^2 - y^2) - (2x^2 + 2y^2)] dx dy$$

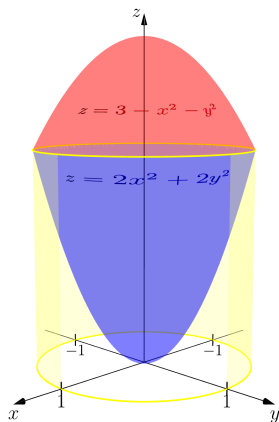
$$\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{D}} 3(1 - x^2 - y^2) dx dy$$

- En continuant avec des coordonnées cartésiennes :

$$\mathcal{V} = \int_{-1}^1 \left( \quad \right) dx$$



CORRIGÉ :



Où les paraboloides se coupent on a :  $2x^2 + 2y^2 = 3 - x^2 - y^2$   
soit  $x^2 + y^2 = 1$ .

Le domaine d'intégration est le disque  $\mathcal{D}$  d'équation  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

$$\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{D}} \left[ (3 - x^2 - y^2) - (2x^2 + 2y^2) \right] dx dy$$

$$\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{D}} 3(1 - x^2 - y^2) dx dy$$

- En continuant avec des coordonnées cartésiennes :

$$\mathcal{V} = \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3(1 - x^2 - y^2) dy \right) dx$$

CORRIGÉ :

Où les paraboloides se coupent on a :  $2x^2 + 2y^2 = 3 - x^2 - y^2$   
soit  $x^2 + y^2 = 1$ .

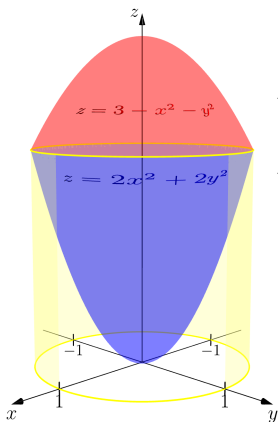
Le domaine d'intégration est le disque  $\mathcal{D}$  d'équation  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

$$\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{D}} \left[ (3 - x^2 - y^2) - (2x^2 + 2y^2) \right] dx dy$$

$$\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{D}} 3(1 - x^2 - y^2) dx dy$$

- En continuant avec des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3(1 - x^2 - y^2) dy \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3(1 - x^2 - y^2) dy \right) dx \end{aligned}$$



## II. L'intégrale double.

- En continuant avec des coordonnées cartésiennes :

$$\mathcal{V} = \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx = 4 \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx$$

- En continuant avec des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx = 4 \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 \left[ 3(1-x^2)y - y^3 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int_0^1 \left( 3(1-x^2)^{1,5} - (1-x^2)^{1,5} \right) dx \end{aligned}$$

- En continuant avec des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx = 4 \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 \left[ 3(1-x^2)y - y^3 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int_0^1 \left( 3(1-x^2)^{1,5} - (1-x^2)^{1,5} \right) dx \\ &= 8 \int_0^1 (1-x^2)^{1,5} dx \end{aligned}$$

- En continuant avec des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx = 4 \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 \left[ 3(1-x^2)y - y^3 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int_0^1 \left( 3(1-x^2)^{1,5} - (1-x^2)^{1,5} \right) dx \\ &= 8 \int_0^1 (1-x^2)^{1,5} dx \end{aligned}$$

posons  $x = \sin(u)$  on a  $dx = \cos(u) du$  et donc

- En continuant avec des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx = 4 \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 \left[ 3(1-x^2)y - y^3 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int_0^1 \left( 3(1-x^2)^{1,5} - (1-x^2)^{1,5} \right) dx \\ &= 8 \int_0^1 (1-x^2)^{1,5} dx\end{aligned}$$

posons  $x = \sin(u)$  on a  $dx = \cos(u) du$  et donc

$$\mathcal{V} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(u))^{1,5} \cos(u) du =$$

- En continuant avec des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx = 4 \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 \left[ 3(1-x^2)y - y^3 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int_0^1 \left( 3(1-x^2)^{1,5} - (1-x^2)^{1,5} \right) dx \\ &= 8 \int_0^1 (1-x^2)^{1,5} dx\end{aligned}$$

posons  $x = \sin(u)$  on a  $dx = \cos(u) du$  et donc

$$\mathcal{V} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(u))^{1,5} \cos(u) du = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(u) du =$$

- En continuant avec des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx = 4 \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 \left[ 3(1-x^2)y - y^3 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int_0^1 \left( 3(1-x^2)^{1,5} - (1-x^2)^{1,5} \right) dx \\ &= 8 \int_0^1 (1-x^2)^{1,5} dx\end{aligned}$$

posons  $x = \sin(u)$  on a  $dx = \cos(u) du$  et donc

$$\mathcal{V} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(u))^{1,5} \cos(u) du = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(u) du = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1 + \cos(2u)}{2} \right)^2 du$$

- En continuant avec des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx = 4 \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 \left[ 3(1-x^2)y - y^3 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int_0^1 \left( 3(1-x^2)^{1,5} - (1-x^2)^{1,5} \right) dx \\ &= 8 \int_0^1 (1-x^2)^{1,5} dx\end{aligned}$$

posons  $x = \sin(u)$  on a  $dx = \cos(u) du$  et donc

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(u))^{1,5} \cos(u) du = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(u) du = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1 + \cos(2u)}{2} \right)^2 du \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 + 2 \cos(2u) + \cos^2(2u) \right] du =\end{aligned}$$

- En continuant avec des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx = 4 \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 \left[ 3(1-x^2)y - y^3 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int_0^1 \left( 3(1-x^2)^{1,5} - (1-x^2)^{1,5} \right) dx \\ &= 8 \int_0^1 (1-x^2)^{1,5} dx \end{aligned}$$

posons  $x = \sin(u)$  on a  $dx = \cos(u) du$  et donc

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(u))^{1,5} \cos(u) du = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(u) du = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1 + \cos(2u)}{2} \right)^2 du \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 + 2 \cos(2u) + \cos^2(2u) \right] du = 2 \left[ u + \sin(2u) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(4u)}{2} du \end{aligned}$$

- En continuant avec des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx = 4 \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 \left[ 3(1-x^2)y - y^3 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int_0^1 \left( 3(1-x^2)^{1,5} - (1-x^2)^{1,5} \right) dx \\ &= 8 \int_0^1 (1-x^2)^{1,5} dx \end{aligned}$$

posons  $x = \sin(u)$  on a  $dx = \cos(u) du$  et donc

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(u))^{1,5} \cos(u) du = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(u) du = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1 + \cos(2u)}{2} \right)^2 du \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 + 2\cos(2u) + \cos^2(2u) \right] du = 2 \left[ u + \sin(2u) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(4u)}{2} du \\ &= 2 \left[ u + \sin(2u) + \frac{1}{2}u + \frac{1}{8} \sin(4u) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \end{aligned}$$

- En continuant avec des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V} &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx = 4 \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx \\
 &= 4 \int_0^1 \left[ 3(1-x^2)y - y^3 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int_0^1 \left( 3(1-x^2)^{1,5} - (1-x^2)^{1,5} \right) dx \\
 &= 8 \int_0^1 (1-x^2)^{1,5} dx
 \end{aligned}$$

posons  $x = \sin(u)$  on a  $dx = \cos(u) du$  et donc

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V} &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(u))^{1,5} \cos(u) du = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(u) du = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1 + \cos(2u)}{2} \right)^2 du \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 + 2\cos(2u) + \cos^2(2u) \right] du = 2 \left[ u + \sin(2u) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(4u)}{2} du \\
 &= 2 \left[ u + \sin(2u) + \frac{1}{2}u + \frac{1}{8} \sin(4u) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right] =
 \end{aligned}$$

- En continuant avec des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx = 4 \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3(1-x^2-y^2) dy \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 \left[ 3(1-x^2)y - y^3 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int_0^1 \left( 3(1-x^2)^{1,5} - (1-x^2)^{1,5} \right) dx \\ &= 8 \int_0^1 (1-x^2)^{1,5} dx \end{aligned}$$

posons  $x = \sin(u)$  on a  $dx = \cos(u) du$  et donc

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(u))^{1,5} \cos(u) du = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(u) du = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1 + \cos(2u)}{2} \right)^2 du \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 + 2 \cos(2u) + \cos^2(2u) \right] du = 2 \left[ u + \sin(2u) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(4u)}{2} du \\ &= 2 \left[ u + \sin(2u) + \frac{1}{2}u + \frac{1}{8} \sin(4u) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

- En passant en coordonnées polaires :

## II. L'intégrale double.

- En passant en coordonnées polaires :

$$\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{D}} 3(1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy =$$

## II. L'intégrale double.

- En passant en coordonnées polaires :

$$\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{D}} 3(1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3(1 - x^2 - y^2) \, r \, dr \, d\theta$$

## II. L'intégrale double.

- En passant en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \iint_{\mathcal{D}} 3(1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3(1 - x^2 - y^2) \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r(1 - r^2 \cos^2(\theta) - r^2 \sin^2(\theta)) \, dr \, d\theta = \end{aligned}$$

- En passant en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \iint_{\mathcal{D}} 3(1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3(1 - x^2 - y^2) \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r(1 - r^2 \cos^2(\theta) - r^2 \sin^2(\theta)) \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r(1 - r^2) \, dr \, d\theta \end{aligned}$$

- En passant en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \iint_{\mathcal{D}} 3(1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3(1 - x^2 - y^2) \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r(1 - r^2 \cos^2(\theta) - r^2 \sin^2(\theta)) \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r(1 - r^2) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{2}r^2 - \frac{3}{4}r^4 \right]_0^1 \, d\theta = \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

- En passant en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \iint_{\mathcal{D}} 3(1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3(1 - x^2 - y^2) \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r(1 - r^2 \cos^2(\theta) - r^2 \sin^2(\theta)) \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r(1 - r^2) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{2}r^2 - \frac{3}{4}r^4 \right]_0^1 \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right] \, d\theta = \end{aligned}$$

- En passant en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \iint_{\mathcal{D}} 3(1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3(1 - x^2 - y^2) \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r(1 - r^2 \cos^2(\theta) - r^2 \sin^2(\theta)) \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r(1 - r^2) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{2}r^2 - \frac{3}{4}r^4 \right]_0^1 \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right] \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{4} \right] \, d\theta = \end{aligned}$$

- En passant en coordonnées polaires :

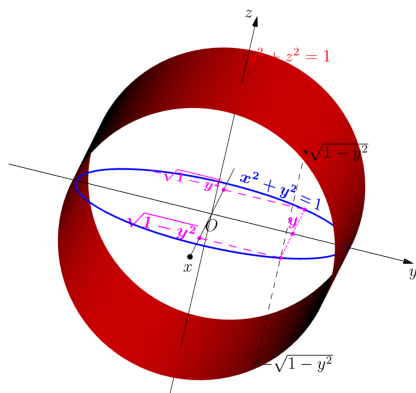
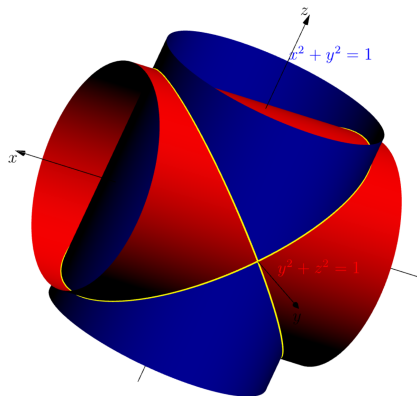
$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \iint_{\mathcal{D}} 3(1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3(1 - x^2 - y^2) \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r(1 - r^2 \cos^2(\theta) - r^2 \sin^2(\theta)) \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r(1 - r^2) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{2}r^2 - \frac{3}{4}r^4 \right]_0^1 \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right] \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{4} \right] \, d\theta = \left[ \frac{3\theta}{4} \right]_0^{2\pi} = \end{aligned}$$

- En passant en coordonnées polaires :

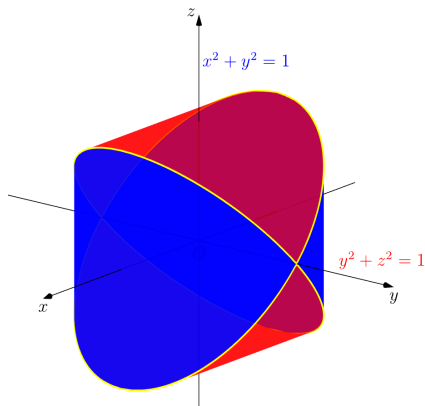
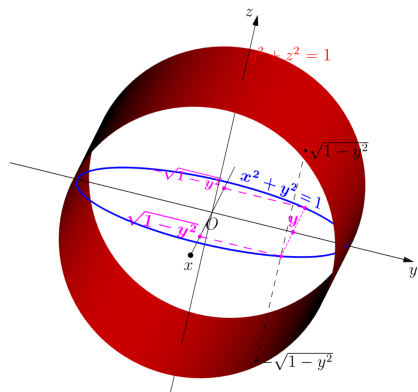
$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \iint_{\mathcal{D}} 3(1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3(1 - x^2 - y^2) \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r(1 - r^2 \cos^2(\theta) - r^2 \sin^2(\theta)) \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r(1 - r^2) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{2}r^2 - \frac{3}{4}r^4 \right]_0^1 \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right] \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{4} \right] \, d\theta = \left[ \frac{3\theta}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

## II. L'intégrale double.

**Exercice n°7** : Calcule le volume  $\mathcal{V}$  compris entre les deux cylindres d'équations  $x^2 + y^2 = 1$  et  $y^2 + z^2 = 1$ .

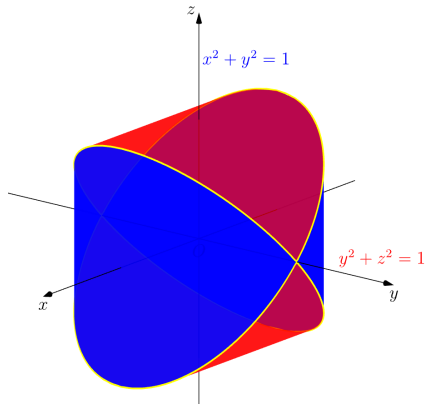
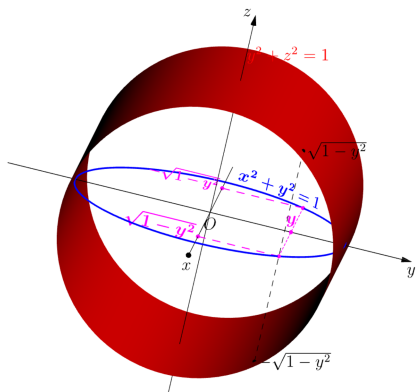


## II. L'intégrale double.



CORRIGÉ :

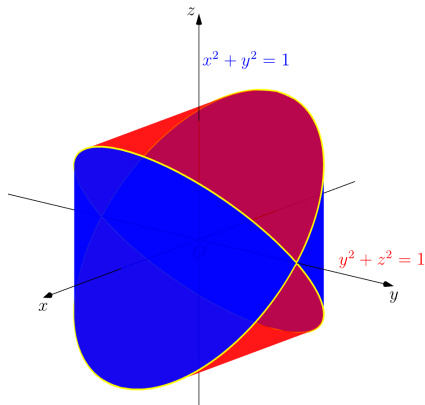
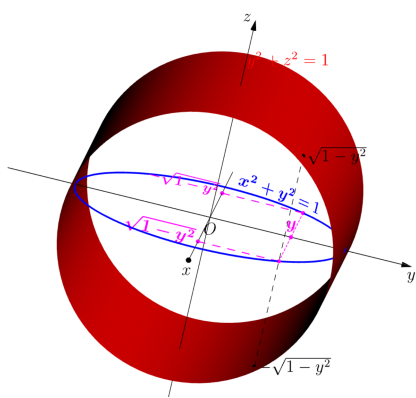
## II. L'intégrale double.



CORRIGÉ :

$$I = \int_{y=-1}^{y=1} \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} \left( \sqrt{1-y^2} - (-\sqrt{1-y^2}) \right) dx dy =$$

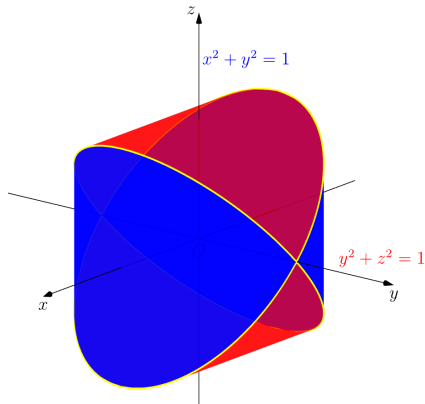
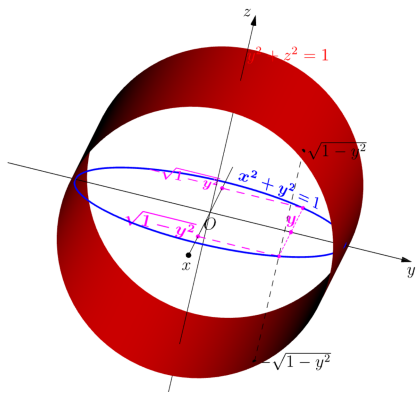
## II. L'intégrale double.



CORRIGÉ :

$$I = \int_{y=-1}^{y=1} \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} \left( \sqrt{1-y^2} - (-\sqrt{1-y^2}) \right) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} dx dy$$

## II. L'intégrale double.

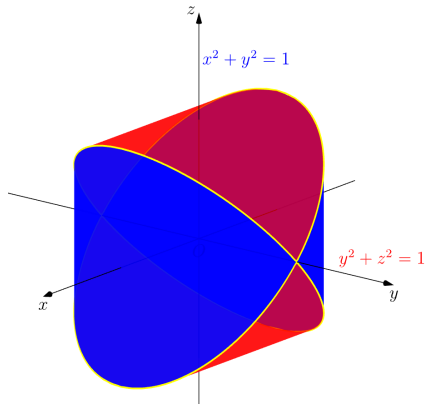
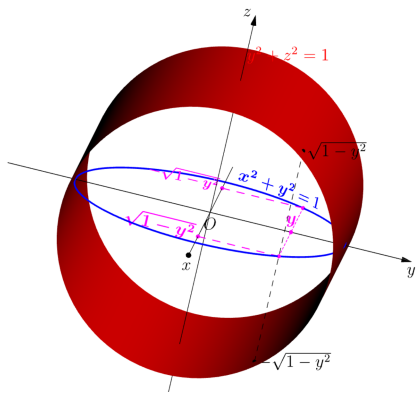


CORRIGÉ :

$$I = \int_{y=-1}^{y=1} \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} \left( \sqrt{1-y^2} - (-\sqrt{1-y^2}) \right) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} dx dy$$

$$I = 2 \int_{-1}^1 \left[ x\sqrt{1-y^2} \right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy =$$

## II. L'intégrale double.

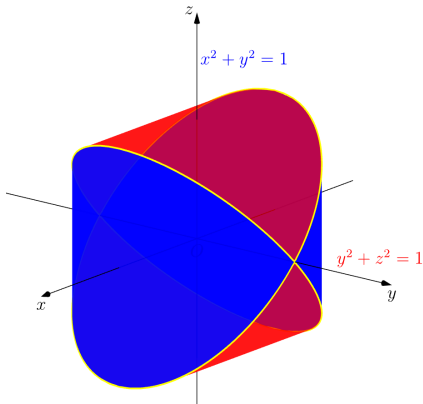
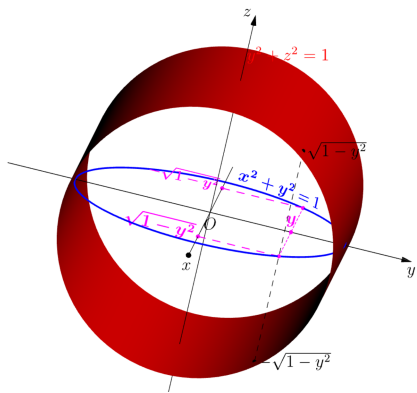


CORRIGÉ :

$$I = \int_{y=-1}^{y=1} \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} \left( \sqrt{1-y^2} - (-\sqrt{1-y^2}) \right) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} dx dy$$

$$I = 2 \int_{-1}^1 \left[ x\sqrt{1-y^2} \right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy = 2 \int_{-1}^1 2(1-y^2) dy =$$

## II. L'intégrale double.

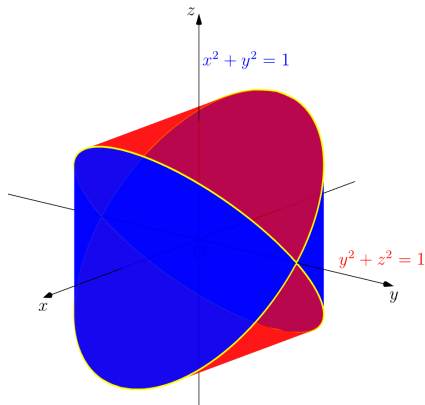
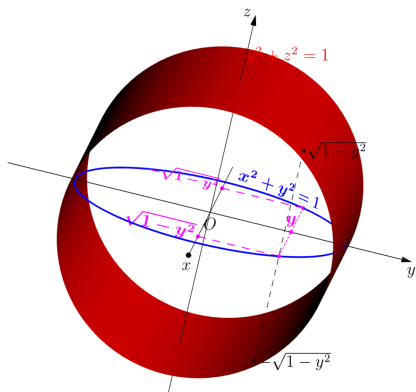


CORRIGÉ :

$$I = \int_{y=-1}^{y=1} \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} \left( \sqrt{1-y^2} - (-\sqrt{1-y^2}) \right) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} dx dy$$

$$I = 2 \int_{-1}^1 \left[ x\sqrt{1-y^2} \right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy = 2 \int_{-1}^1 2(1-y^2) dy = 4 \left[ y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 =$$

## II. L'intégrale double.



CORRIGÉ :

$$I = \int_{y=-1}^{y=1} \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} \left( \sqrt{1-y^2} - (-\sqrt{1-y^2}) \right) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} dx dy$$

$$I = 2 \int_{-1}^1 \left[ x\sqrt{1-y^2} \right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy = 2 \int_{-1}^1 2(1-y^2) dy = 4 \left[ y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{16}{3}$$