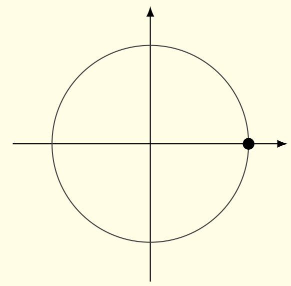
Méthodes de résolution d'équations

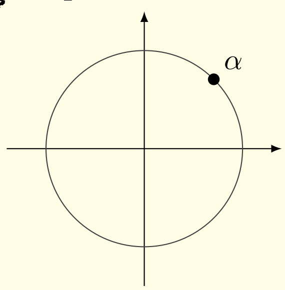
I. Equations trigonométriques.

Propriété

Un angle possède une infinité de mesures en radians. La mesure d'un angle est la seule mesure comprise dans l'intervalle . . . .



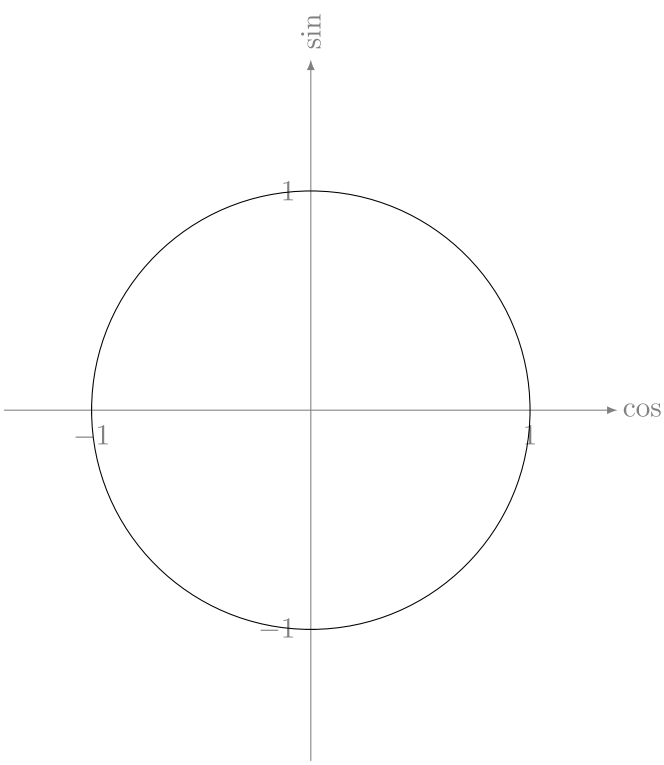
Propriété



Additionner π ou $-\pi$ a une mesure en radians revient à faire un . . . .

1. Les valeurs remarquables du sinus et du cosinus.

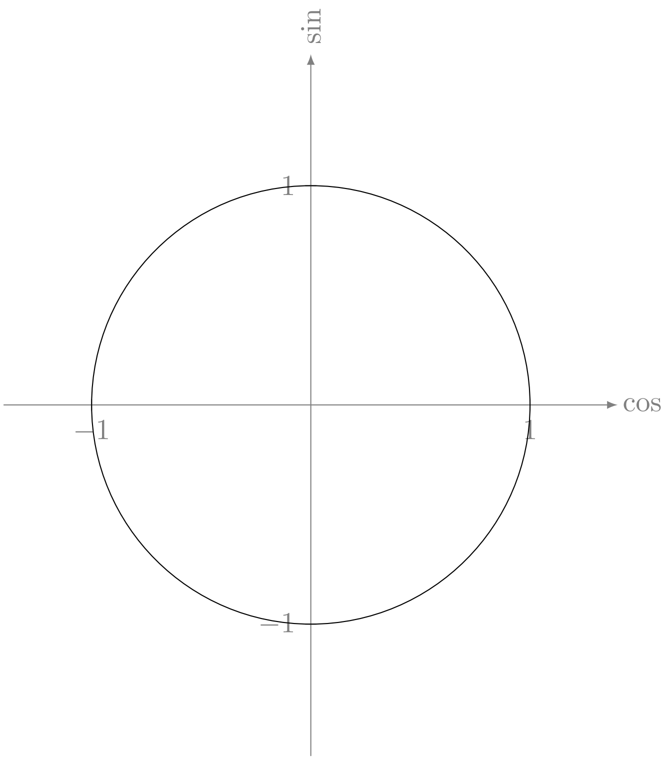
Sinus et cosinus des multiples de $\frac{\pi}{4}$:



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$				
$\sin(x)$				

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$
$\cos(x)$				
$\sin(x)$				

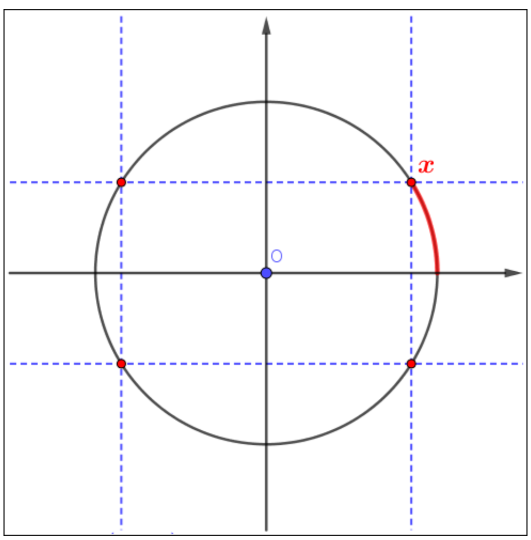
Sinus et cosinus des multiples de $\frac{\pi}{6}$:



x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cos(x)$				
$\sin(x)$				

x	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{6}$
$\cos(x)$				
$\sin(x)$				

Rappel:



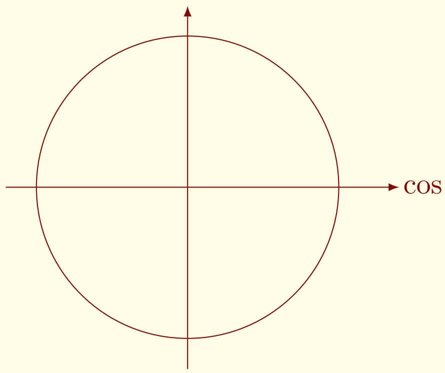
- $\cos(-x) = \ldots\ldots.$
- $\sin(-x) = \ldots\ldots.$
- $\cos(\pi - x) = \ldots\ldots.$
- $\sin(\pi - x) = \ldots\ldots.$
- $\cos(x + \pi) = \cos(x - \pi) = \ldots\ldots.$
- $\sin(x + \pi) = \sin(x - \pi) = \ldots\ldots.$

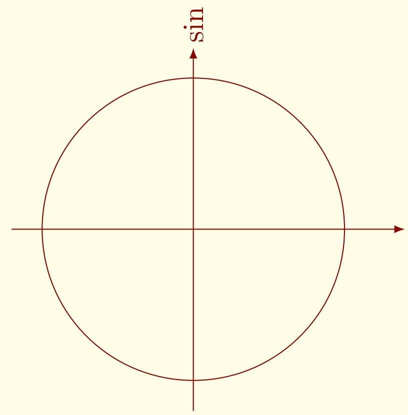
Additionner ou soustraire π revient à faire un demi-tour.

2. Equations idéales

Solutions des équations

- $\cos x = \cos \alpha \iff x = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\sin x = \sin \alpha \iff x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$





Exercice n° 1: Résoudre

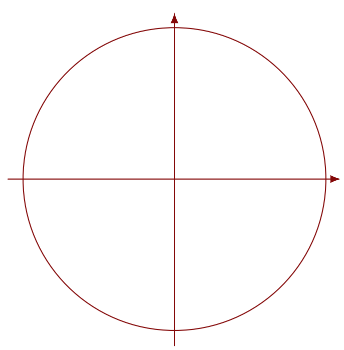
i. $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$

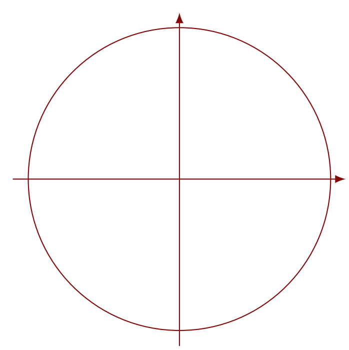
ii. $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. Equations réelles

Rappel:

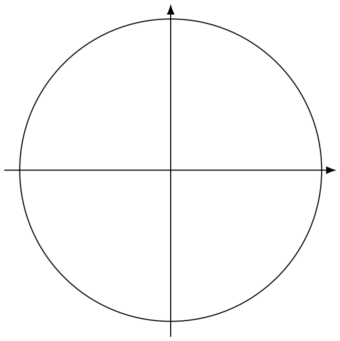
- L'arc de sinus de x ($\arcsin(x)$ ou $\sin^{-1}(x)$) donne la solution de l'équation $\sin\alpha = x$ qui est située sur l'arc $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$;
- L'arc de cosinus de x ($\arccos(x)$ ou $\cos^{-1}(x)$) donne la solution de l'équation $\sin\alpha = x$ qui est située sur l'arc $[0\,,\,\pi]$.



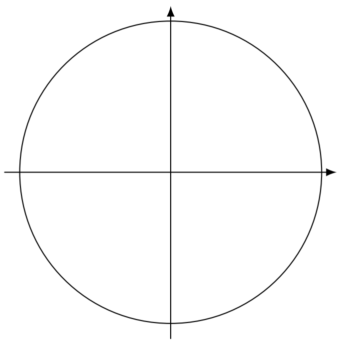


Exercice n° 2: Résoudre en donnant les solutions en degrés (à 10^{-1} près) et en radians (à 10^{-4} près), puis les placer sur le cercle associé.

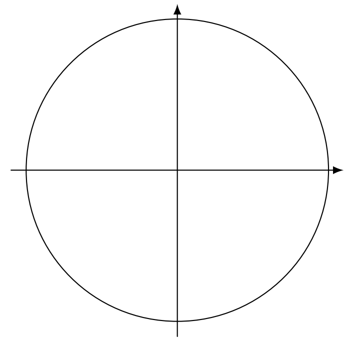
i. $\sin(x) = 0,4$



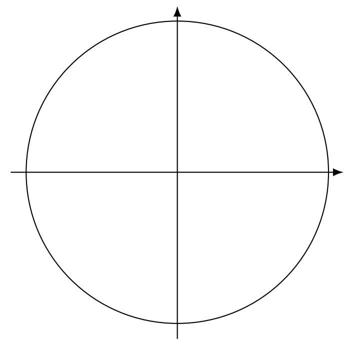
ii. $\cos(x) = 0,7$



iii. $\sin(x) = -0,6$



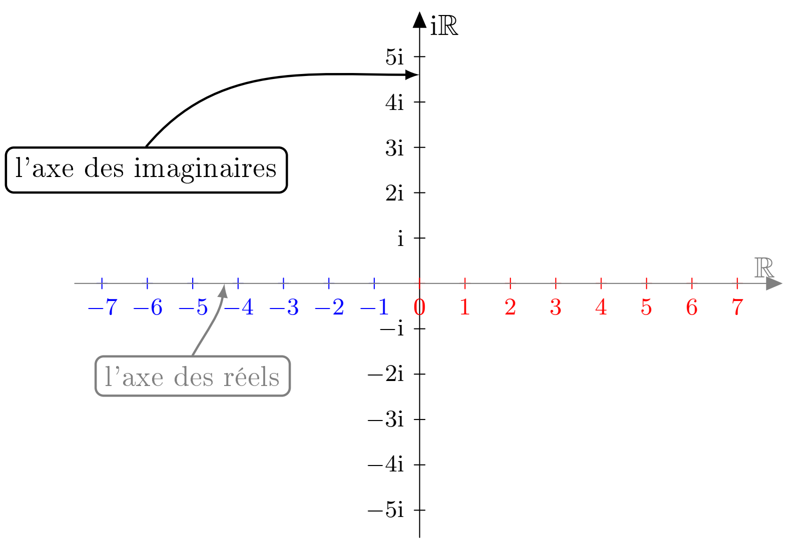
iv. $\cos(x) = -0,3$



II. Les nombres complexes

1. Le plan complexe.

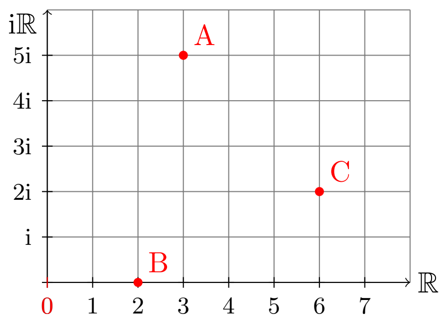
Plaçons-nous dans un repère orthonormé direct :



Définition:

On appelle .... , le plan muni d'un repère orthonormé direct où :

- l'axe des abscisses est appelé .... ;
- l'axe des ordonnées est appelé .... ;
- à chaque point du plan M on associe un nombre complexe, noté ... , appelé l' .... du point M.



L'affixe du point A est le nombre complexe .... , noté ...

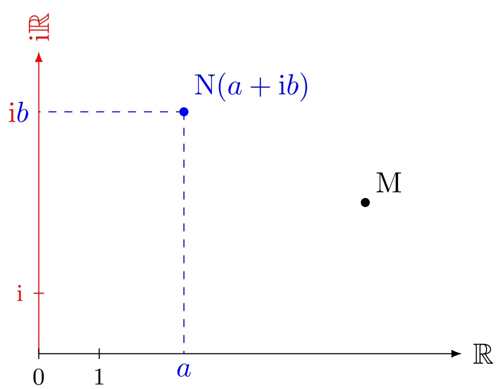
$z_B =$ ....

$z_C =$ ....

Définition:

L'ensemble des affixes des points du plan complexe est l'ensemble des .... , noté .... Chaque élément z de l'ensemble $\mathbb{C}$ est appelé, nombre complexe, et s'écrit de manière unique $z = a + ib$, a et b étant des réels.

- a est appelée la .... de z et est notée $\mathrm{Re}(z)$;
- b est appelée la .... de z et est notée $\mathrm{Im}(z)$.



Remarque :

- si $b = 0$ alors $z = a$, z est ..... : le point N est sur l'axe des abscisses (l'axe réel) ;
- si $a = 0$ alors $z = ib$, on dit que z est un ....

Nombre complexe	partie réelle	partie imaginaire
$2+3\mathrm{i}$		
$2-3\mathrm{i}$		
$\sqrt{3}-\dfrac{4\mathrm{i}}{7}$		
i		
$-\dfrac{1}{3}$		
$-\mathrm{i}+1$		
$2(\mathrm{i}+3)$		

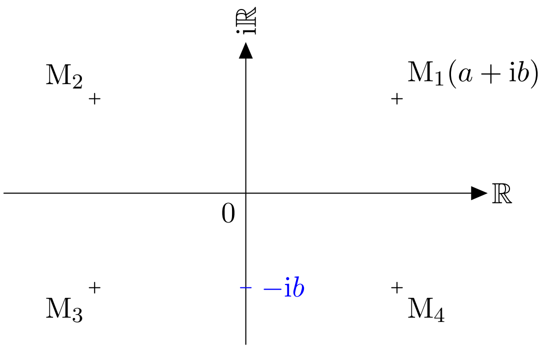
Ce sont des nombres, on peut donc faire des opérations. Commençons par la multiplication par un réel, l'addition et la soustraction de :

$$z = 1-4\mathrm{i} \text{ et } z' = -2+3\mathrm{i}$$

- $-2z =$ ....
- $z+z' =$ ....
- $z-z' =$ ....
- $2z+3z' =$ ....

  $=$ ....

2. Conjugué d'un complexe



L'affixe du :

- point M_1 est .....
- symétrique de A par rapport à l'axe imaginaire : .....
- symétrique de B par rapport à l'axe réel : .....
- symétrique de M_1 par rapport à l'axe imaginaire : .....
- symétrique de M_2 par rapport à l'axe réel : .....
- symétrique de M_3 par rapport à l'axe imaginaire : .....

Définition:
On appelle .... du nombre complexe $z = a+\mathrm{i}b$, le nombre complexe ....

Exemple : $\overline{2+4\mathrm{i}} =$ .... $\overline{2-4\mathrm{i}} =$ .... $\overline{\overline{2-4\mathrm{i}}} =$ .... $\overline{\mathrm{i}-7} =$ ....

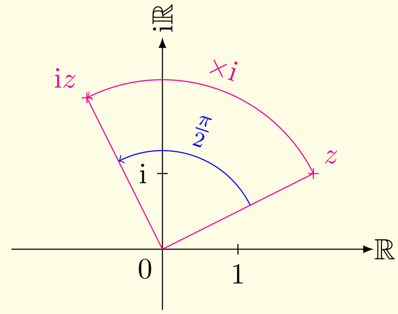
3. Multiplication par i.

Définition:

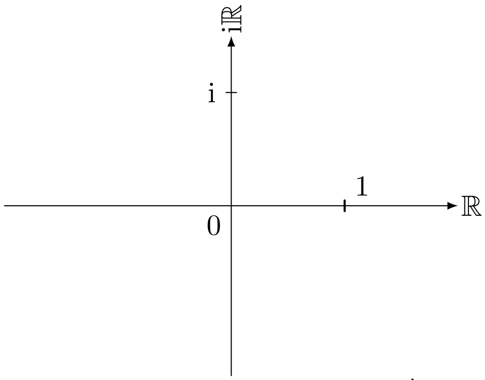
Soit $z \in \mathbb{C}$ l'affixe d'un point M dans le plan complexe.

Multiplier un point d'affixe z par i revient à lui faire subir

. . . .



Exemple : Dans le plan complexe, construisons i, i^2, i^3, et i^4.



Propriété
$i^2 = \ldots$

Application : Posons $z = 1 + 3i$ et $z' = -2 + i$.

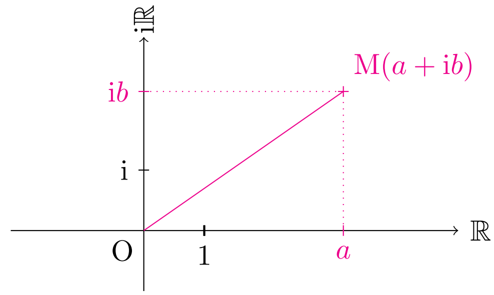
- $iz =$ . . . .
- $iz' =$ . . . .
- $zz' =$ . . . .

  $=$ . . . .
- $z + \overline{z} =$ . . . .
- $z + \overline{z'} =$ . . . .
- $z\overline{z} =$ . . . .

4. Module d'un nombre complexe.

Dans le plan complexe d'origine O considérons le point M d'affixe z dont la partie réelle est a et la partie imaginaire b.

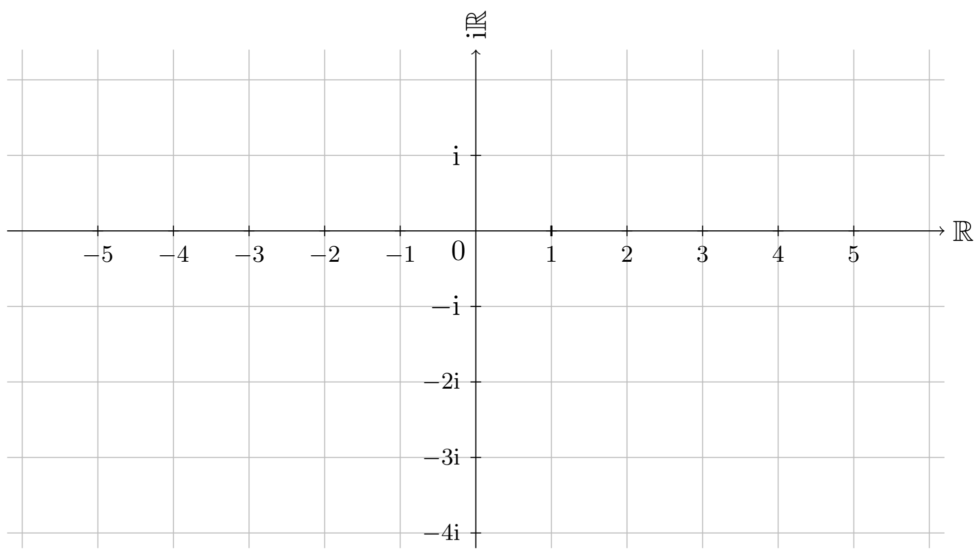
La longueur OM = ...



Définition:
Soit $z \in \mathbb{C}$. Le .... du nombre complexe z, noté ..... est le réel positif ....

Exemple : Calculons les modules suivants et place les nombres complexes correspondants dans un plan complexe :

- $|5+\mathrm{i}| =$ ....
- $|5-\mathrm{i}| =$ ....
- $|2-3\mathrm{i}| =$ ....
- $|2| =$ ....
- $|-4\mathrm{i}| =$ ....
- $|-4+2\mathrm{i}| =$ ....
- $|-3-3\mathrm{i}| =$ ....
- $|-5| =$ ....



Module et conjugaison
Etant donné un nombre complexe $z = a + ib$: $z \times \overline{z} = \left|z\right|^2 = a^2 + b^2$

Autrement dit, $\left|z\right| = \sqrt{z \times \overline{z}}$

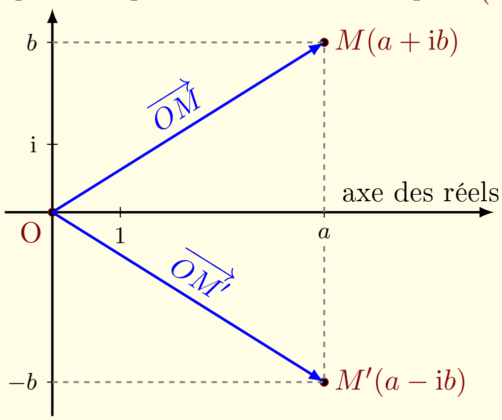
Démonstration

$z \times \overline{z} = (a+\mathrm{i}b)\overline{(a+\mathrm{i}b)} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Résumé

Le plan complexe est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ orthonormé.



- $z_M = \dots\dots\dots\dots$ est l'affixe du point M ;
- $z'_M = \dots\dots\dots\dots$ est le conjugué de z_M ;
- M' est le $\dots\dots\dots\dots$ du point M par rapport à l'axe des nombres réels ;
- $\mathrm{O}M = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- $z\overline{z} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Propriété : Le module est compatible avec la multiplication et la division

Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 où $z_2 \neq 0$ et tout entier relatif n, on a :

$$\left|z_1 \times z_2\right| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad , \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \dots\dots\dots\dots \quad , \text{ et } \left|z_2^n\right| = \dots\dots\dots\dots$$

Exercice n° 3: Calcule les modules suivants :

i. $\left|-17\mathrm{i}\right| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

ii. $\left|\dfrac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

iii. $\left|(2+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})\right| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

iv. $\left|(2+4\mathrm{i})^3\right| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

La compatibilité avec la multiplication n'entraîne pas la compatibilité avec l'addition :

$$\left|1+\mathrm{i}\right| = \dots\dots\dots \quad \text{alors que } \left|1\right| + \left|\mathrm{i}\right| = \dots\dots\dots\dots \quad \text{donc} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Inverse et quotient

Pour déterminer la forme algébrique d'un inverse ou d'un quotient, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du ....

Exercice n° 4: Détermine la forme algébrique :

- $\dfrac{1}{-1+4\text{i}} =$ ....

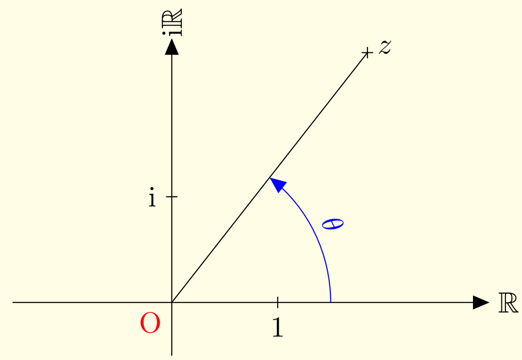
  $=$ ....

- $\dfrac{-3+\text{i}}{5+3\text{i}} =$ ....

  $=$ ....

Définition:

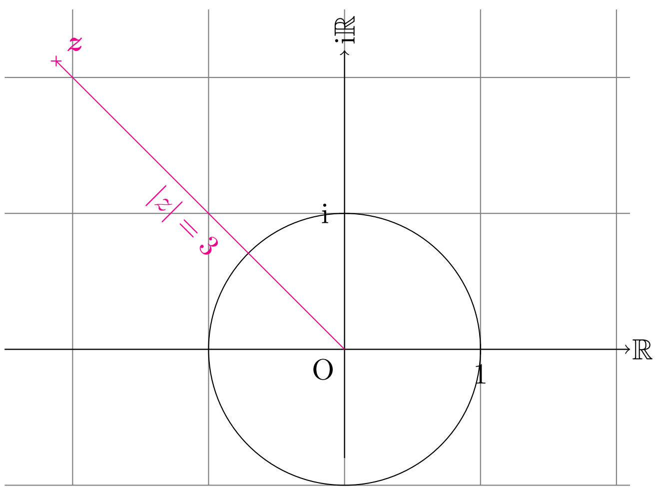
Dans un plan complexe muni d'un repère $(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v},)$, soit z un nombre complexe non nul, et M le point d'affixe z. On appelle .... de z tout nombre réel θ tel que $\theta = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{OM}}\right) [2\pi]$. On note $\theta =$ ..... .



Remarque : On donne toujours la mesure principale de l'angle, c'est-à-dire la mesure comprise dans l'intervalle $]-\pi\,,\,\pi]$.

Exemple :

1.



(a) Un argument de z est

(b) $z_0 =$

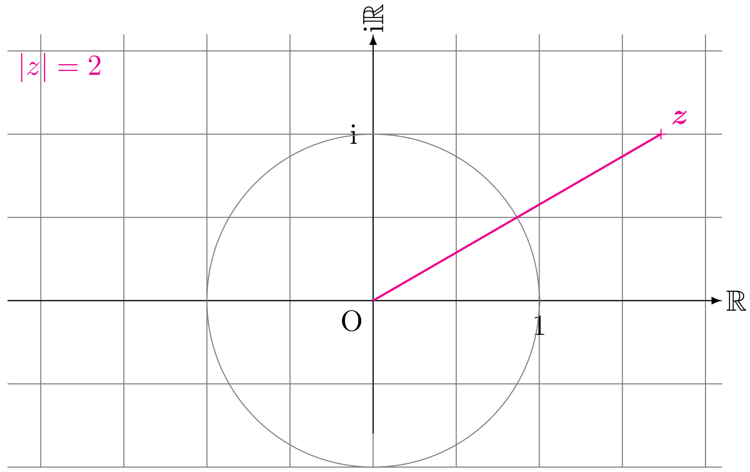
(c) $z =$

2.

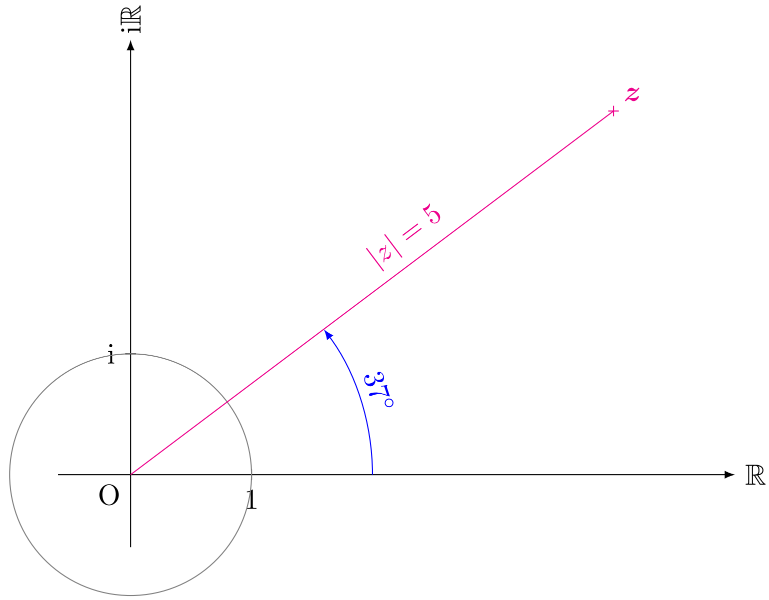
(a) Un argument de z est

(b) $z_0 =$

(c) $z =$



3.



La forme trigonométrique de z est :

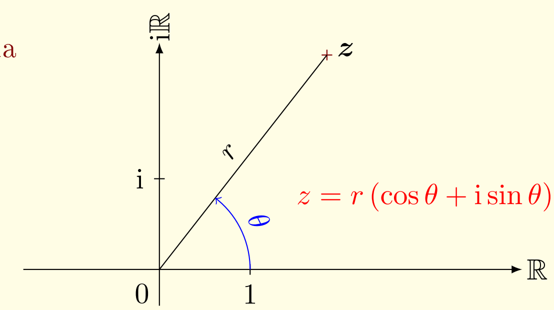
. . . .

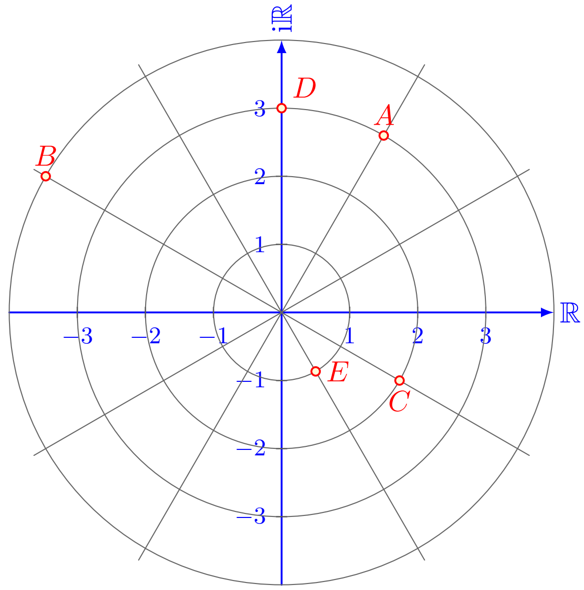
Définition:

Tout nombre complexe . . . . z peut-être écrit sous la forme $z = r\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec :

- $\arg(z) = \theta \in \mathbb{R}$ est l' . . . . de z ;
- $|z| = r \in \mathbb{R}_+^*$ est le . . . . de z.

Cette écriture s'appelle la . . . . de z.





- $z_A =$ ....
- $z_B =$ ....
- $z_C =$ ....
- $z_D =$ ....
- $z_E =$ ....

Propriété

Si $z = a + ib$ et $z \neq 0$ alors $z = r\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)$ où

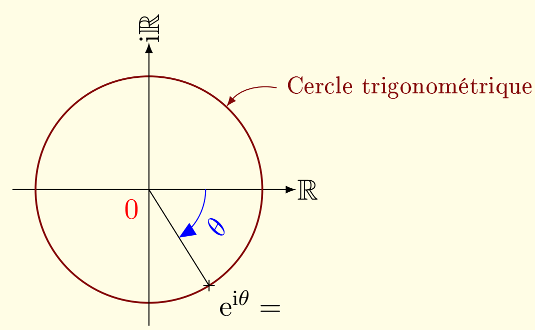
$r = |z| =$ .... $\cos\theta =$ .... $\sin\theta =$ ....

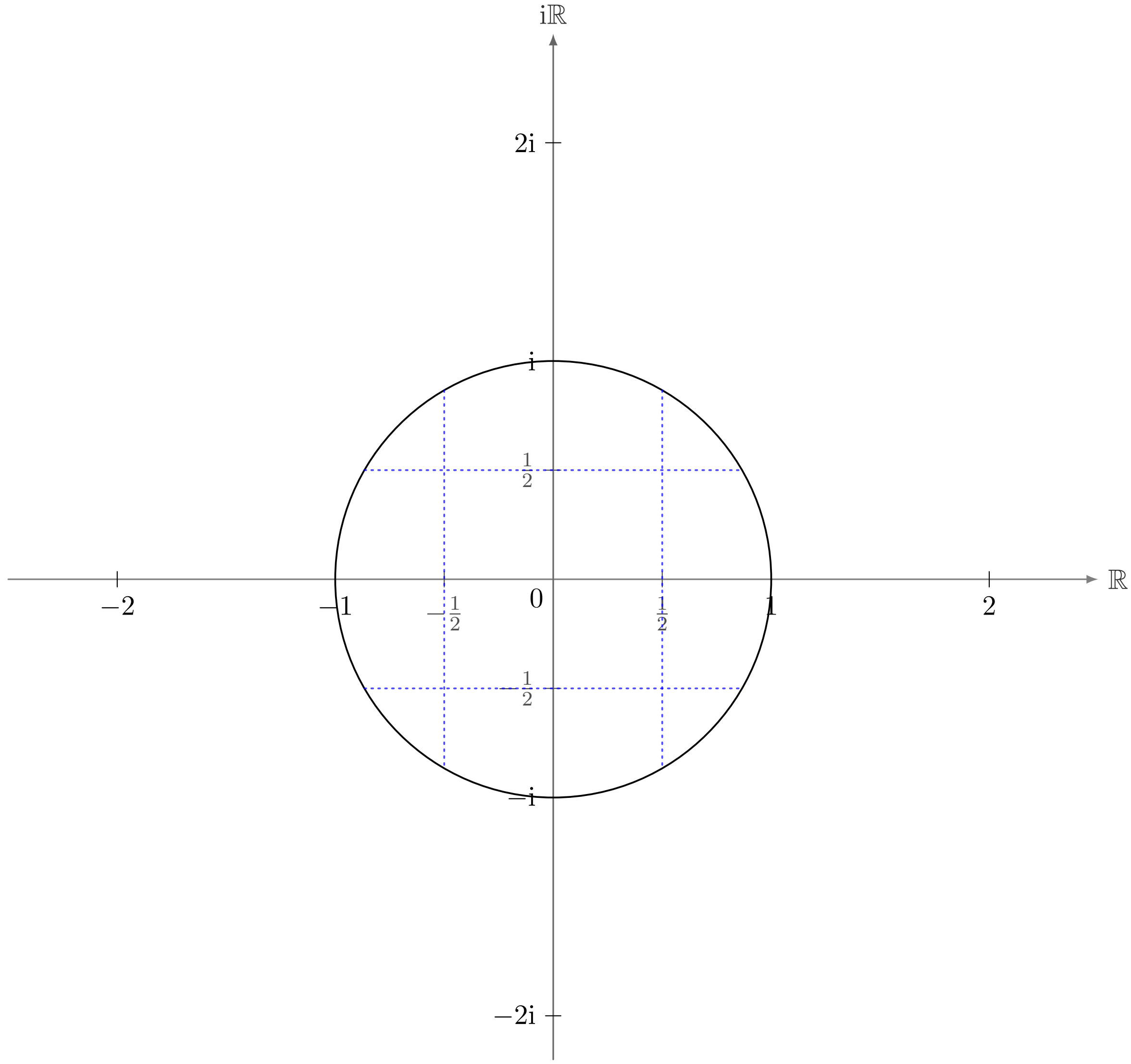
III. La forme exponentielle.

Définition:

Etant donné un nombre réel θ, on note ..... le nombre complexe $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

On lit « exponentielle de i thêta »

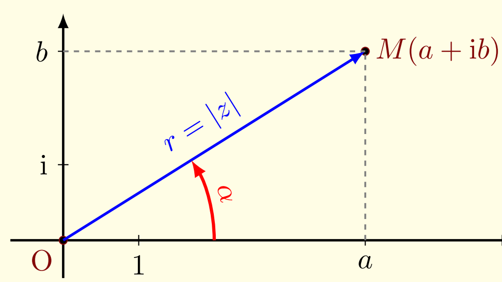




Résumé

Si $z = a + ib$ un nombre complexe .... , alors il existe un unique réel .... r et un unique réel $\alpha \in]-\pi\,,\,\pi]$ tels que :

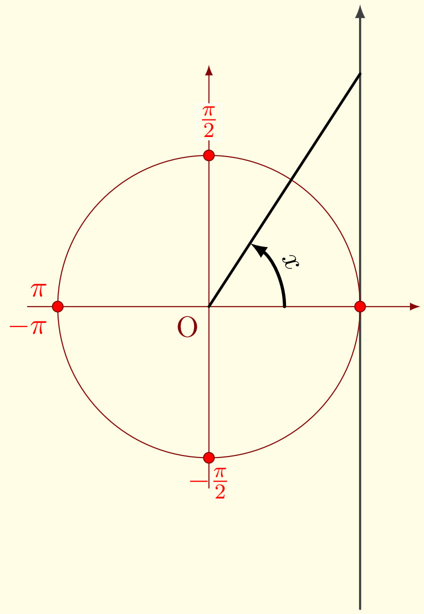
$$z = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



α est un .... de z, et r son ....

IV. Complément trigonométrique : l'arc de tangente

Définition et Propriétés



La tangente d'un angle de mesure x, notée $\tan(x)$ est .... du point M.

- On démontre que $\tan(x) =$ ....
- La tangente est une fonction périodique de période
- La tangente n'est donc pas définie sur les angles droits : $\mathcal{D}_{\tan} =$ ....

Regardons ce rappel du plus près, et notons $\mathcal{T}$ la courbe représentative de la fonction tangente. :

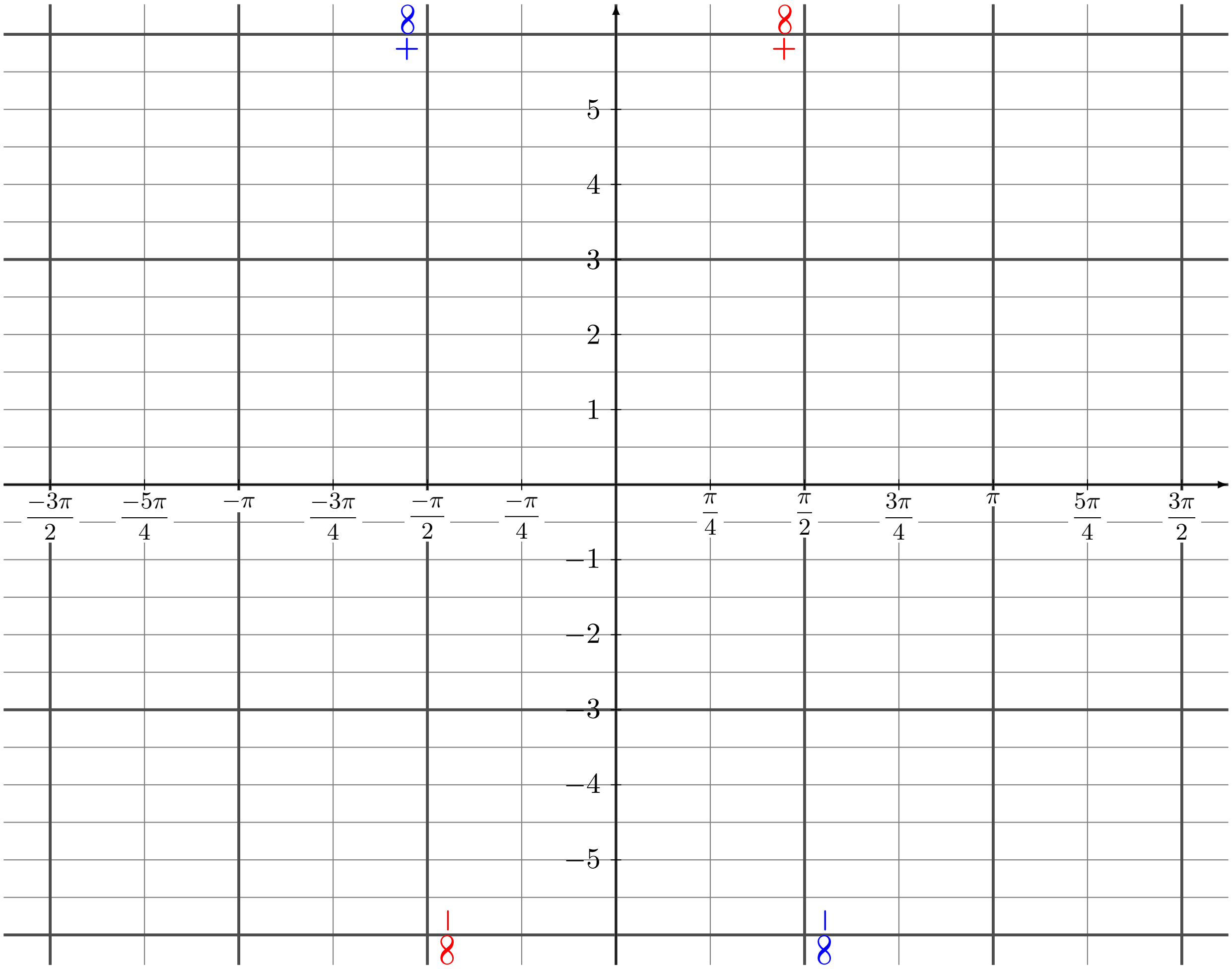
- $\tan(0) =$
- $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) =$
- $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) =$
- $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) =$

- $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

  En effet, $\mathcal{T}$ admet une ....
- $\tan(-x) =$

  Autrement dit, $\mathcal{T}$ est symétrique par rapport à
- $\tan(x+\pi) =$

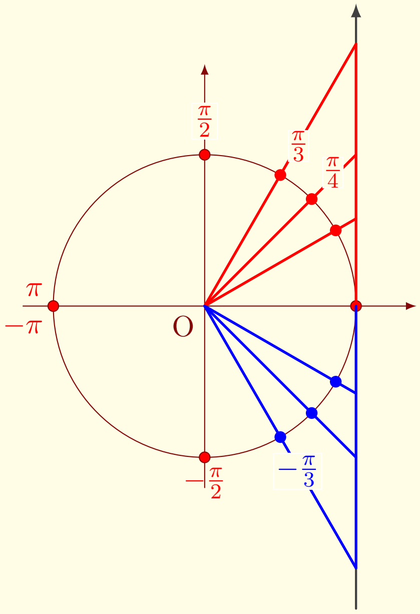
  On voit que la tangent est ....



On voit que $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) =$ ..... , $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) =$ ..... ,

$\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) =$ ..... , et $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) =$ .....

Valeurs remarquables



$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) =$ ....

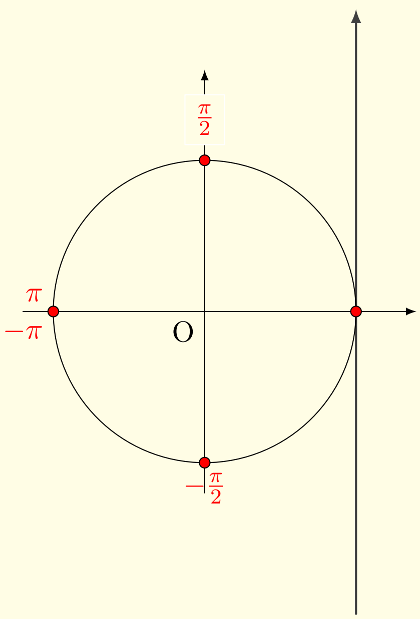
$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) =$ ....

Exemple : Détermine les mesures principales, en radians à 10^{-3} près, des solutions des équations trigonométriques suivantes :

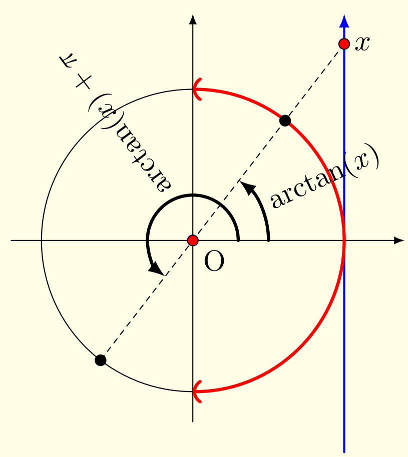
i. $\tan(x) = 1$. ....

ii. $\tan(x) = -\sqrt{3}$. ....

Propriété



- L'arc de tangente de x ($\arctan(x)$ ou $\tan^{-1}(x)$) donne la solution de l'équation $\tan\alpha = x$ qui est située sur l'arc $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$;
- $\tan x = \tan\alpha \iff x = \alpha\ [2\pi]$ ou $x = \alpha + \pi\ [2\pi]$



Exemple : Détermine les mesures principales, en degrés à 10^{-1} près, des solutions des équations trigonométriques suivantes : (On oublie pas de paramétrer la calculatrice en degrés.)

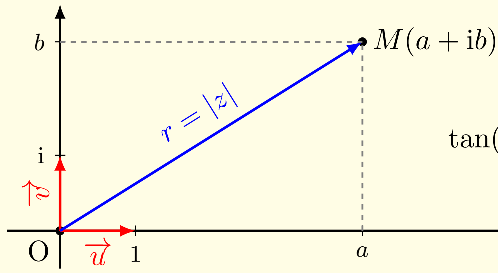
i. $\tan(x) = -0,3$. ....

ii. $\tan(x) = 2$. ....

Pourquoi soustraire π au lieu de l'additionner ? Parce que : ....

Propriété

Si $z = a+ib$ un nombre complexe dont la .... est non nul, alors il un unique mesure principale α tel que :



$\tan(\alpha) =$ ....

- La mesure principale α est du .... que la partie imaginaire b ;
- la forme trigonométrique de z est .... ;
- la forme exponentielle de z est ..... .

Exemple :Détermine la forme exponentielle du nombre complexe $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

- $|z| =$ ....
- $\tan(\alpha) =$ ....

  La partie imaginaire est ....

- La forme exponentielle de z est ....

Exemple :Détermine un argument du nombre complexe $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

$\tan(\alpha) =$ ....

La partie imaginaire est ....