Mathématiques pour le technicien 1

TD d'algèbre n° 1 - Semestre 1
Ecriture des nombres - Calculatrices - Equations élémentaires

Ecritures scientifiques.

Exercice n° 1: Complète avec une puissance de dix.

1. $5457 = 54,57\times$ .....
2. $60005 = 60,005\times$ .....
3. $68 = 0,0068\times$ .....
4. $8,51 = 851\times$ .....
5. $3,141\,592\,653\,589\,793 = 3\,141\,592\,653,589793\times$ .....
6. $74,2\times 10^4 = 742\times$ ....
7. $65536\times 10^{-10} = 65,536\times$ ....
8. $0,00341\times 10^6 = 3410\times$ ....
9. $480\times 10^3 = 0,0048\times$ ....

Exercice n° 2: Ecris sous la forme $a\times 10^n$ où $a\in\mathbb{R}$, $1\leqslant a<10$, et $n\in\mathbb{Z}$.

1. $740,56 =$ ....
2. $5814\times 10^2 =$ ....
3. $0,023 =$ ....
4. $5\underbrace{00\ldots 00}_{121\text{ zéros}} =$ ....
5. $54\underbrace{00\ldots 00}_{121\text{ zéros}} =$ ....
6. $0,\underbrace{00\ldots 00}_{121\text{ zéros}}5 =$ ....
7. $0,\underbrace{00\ldots 00}_{121\text{ zéros}}54 =$ ....
8. $0,\underbrace{00\ldots 00}_{1000\text{ zéros}}1024 =$ ....

9. $10^{108} \times 10^{32} \times 10^{-10} =$ ....

10. $7 \times 10^3 \times 3 \times 10^2 =$ ....

11. $0,0025 \times 4000 =$ ....

12. $\dfrac{10^4 \times 10^2}{10^5 \times 10^{-3}} =$ ....

13. $\dfrac{0,00032}{800} =$ ....

14. $\dfrac{1000\,00000\,00000\,00000}{0,0000\,0000\,0000\,00004} =$ ....

Utilisation de la calculatrice.

Rappel : Ordre de priorité dans l'exécution des calculs algébriques

Les règles de .... sont :

1. Les calculs entre .... ou .... sont prioritaires sur les calculs situés en dehors. La barre horizontale de fraction ou de racine joue le rôle d'une parenthèse ;
2. La .... est prioritaire sur la multiplication, la division, l'addition et la soustraction ;
3. La multiplication et la division sont prioritaires sur l'addition et la soustraction ;
4. On effectue les calculs de la gauche vers la droite.

Remarque : Revenons un instant sur : *"La barre horizontale de fraction ... joue le rôle d'une parenthèse"*

> Comment écrit-on $\dfrac{4}{5+3}$ sur une calculatrice ? ....

Exercice n° 3: Effectue les calculs en respectant les règles précédentes et en précisant l'ordre des calculs :

a) $50 - 5 \times 3^2$

b) $\dfrac{54}{3^2} - \dfrac{3+2}{1 - 2 \times 3}$

c) $5\left(\dfrac{24}{2} - \sqrt{5^2 - 3^2}\right) - 2^5$

Exercice n° 4: Détermine l'expression algébrique associée à chaque saisie.

Saisie calculatrice	**Ecriture algébrique**
$1/(-3)+2$	
$4+5/3+2$	
$4+5/(3+2)$	
$2*3-5/(3+t)(x+3)$	
$-3 \div x\hat{\ }2$	
$x(x+1)\hat{\ }3 \div (4-x)\hat{\ }2+1$	
$\cos(x+1)\hat{\ }2$	
$\ln(x^2-1)\hat{\ }3 \div x^2 * x$	
$1/2/3/4/5/6/7/8/9$	

Rappel:

Diviser par une nombre revient à ....

Evitez d'accumuler des barres de fractions, car :

$$\frac{1}{\frac{2}{3}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \frac{\frac{1}{2}}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \begin{array}{c}1\\ \hline 2\\ \hline 3\end{array} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Tout dépend de la position du signe ..... .

Saisie calculatrice	**Ecriture algébrique**
$\sin(x^2) \div (x+1/x\hat{\ }3+x/(x+1)\hat{\ }4) \div x\hat{\ }3$	
$1 \div 2 \times 3 \div 4 \times 5 \div 6 \times 7 \div 8 \times 9$	
$1-\cos(1/x)/x+1$	

Exercice n° 5: Détermine l'expression à saisir sur la calculatrice.

Expression algébrique	Saisie calculatrice
$\dfrac{3}{5^3}$	
$\dfrac{3}{5^3+3}$	
$\dfrac{3}{(5^3+3)^2}$	
$\cos^3(x+2)$	
$\dfrac{x^4}{3-2x}$	
e^{x^2+x+2}	
$\sin^2\left(\dfrac{x-2}{1-x}\right)$	
$\mathrm{e}^{x+\frac{2}{x^3}}$	
$x\cos^2\left(\dfrac{x^2+3}{(3-x)^4}\right)$	

Exercice n° 6: Détermine la valeur exacte des expressions suivantes :

1. $\dfrac{4-\dfrac{5}{7}}{1-\dfrac{5}{4-\dfrac{5}{7}}}$

2. Calcule a^3-2a^2+5a-2 pour $a=\dfrac{15}{11}$ et $a=-\dfrac{2}{3}$

3. Soit $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-3x+1}{1-x^2}$. Calcule les images de 3, -8 , $\dfrac{4}{3}$, et 1.

Résolution d'équations du 1re et 2e degré.

Méthode de résolution d'une équation du 1re degré

On isole l'inconnue dans l'un de deux membres de l'égalité, en l'éliminant de l'autre.

Exemple : Résolvons $3x-2=4x-6$:

On isole x à gauche[1] :	On isole x à droite[2] :
$3x-2=4x-6$	$3x-2=4x-6$
$=$	$=$
$=$	$=$
$=$	

1. *On supprime les x à ......*

2. *On supprime les x à ......*

Exercice n° 7: Résous les équations du 1^re^ degré suivantes :

1. $x-2=4x-17$
2. $7x+5=3-2x$
3. $-9x+5=\dfrac{5x+3}{5}$
4. $\dfrac{5+8x}{3}=3-5x$
5. $\dfrac{4x-5}{7}=\dfrac{x+5}{4}$
6. $\dfrac{2x-5}{3}+x=\dfrac{x-5}{4}+1$
7. $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{4-2x}{5}$
8. $\dfrac{x}{2}-\dfrac{2x-1}{5}=\dfrac{x-7}{3}+3$
9. $\dfrac{x+2}{x-1}=7$
10. $\dfrac{x+2}{x-1}=1$
11. $\dfrac{5x-2}{2x-3}=1$
12. $\dfrac{2x+1}{3x+1}=\dfrac{5}{3}$
13. $\dfrac{2-3x}{x+4}=\dfrac{1}{2}$
14. $\dfrac{2-3x}{4-x}=3$

__Indication :__ dans le désordre, les réponses sont : 0, $\frac{55}{9}$, $-\frac{2}{9}$, 5, $\frac{4}{23}$, -2, $\emptyset$, $-\frac{2}{9}$, $\frac{11}{25}$, $\emptyset$, 1, 2, $\frac{3}{2}$, et $-\frac{1}{3}$

Exercice n° 8: Résous les équations suivantes qui se ramènent à la résolution d'équation du 1^re^ degré :

1. $\dfrac{6x+1}{-3x+4}=\dfrac{4x+2}{-2x+1}$
2. $(3x-1)(4x+7)=9x^2-1$
3. $(2x-3)(2x-1)=(2x-1)^2$

Mathématiques pour le technicien 1

TD d'algèbre n° 2 - Semestre 1
Résolution des équations du second degré et des systèmes de deux équations à deux inconnues.

Résolution des équations du second degré.

Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$

On calcule le discriminant $\Delta =$ .... puis :

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions : $x_1 =$ .... et $x_2 =$ .... ;
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation a une seule solution : $x_1 =$ ....
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solutions réelles.

Exercice n° 1: Résous les équations du second degré suivantes :

1. $2x^2 + 7x - 15 = 0$. On a : $a = \ldots$, $b = \ldots$, $c = \ldots$, $\Delta = \left(\ \ldots\ \right)^2 - 4 \times\ \ldots\ \times\ \ldots\ = \ldots\ldots$
$$x_1 = \frac{-\ \ldots - \sqrt{\ldots}}{2 \times\ \ldots} = \ldots\ldots \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-\ \ldots + \sqrt{\ldots}}{2 \times\ \ldots} = \ldots\ldots$$
2. $7x^2 + 16x + 4 = 0$. On a : $a = \ldots$, $b = \ldots$, $c = \ldots$, $\Delta = \left(\ \ldots\ \right)^2 - 4 \times\ \ldots\ \times\ \ldots\ = \ldots\ldots$
$$x_1 = \frac{-\ \ldots - \sqrt{\ldots}}{2 \times\ \ldots} = \ldots\ldots \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-\ \ldots + \sqrt{\ldots}}{2 \times\ \ldots} = \ldots\ldots$$
3. $-6x^2 + 29x - 28 = 0$. On a : $a = \ldots$, $b = \ldots$, $c = \ldots$, $\Delta = \left(\ \ldots\ \right)^2 - 4 \times\ \ldots\ \times\ \ldots\ = \ldots\ldots$
$$x_1 = \frac{-\ \ldots - \sqrt{\ldots}}{2 \times\ \ldots} = \ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-\ \ldots + \sqrt{\ldots}}{2 \times\ \ldots} = \ldots\ldots\ldots$$
4. $-x^2 + 16x = 63$. On a : $a = \ldots$, $b = \ldots$, $c = \ldots$, $\Delta = \left(\ \ldots\ \right)^2 - 4 \times\ \ldots\ \times\ \ldots\ = \ldots\ldots$
$$x_1 = \frac{-\ \ldots - \sqrt{\ldots}}{2 \times\ \ldots} = \ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-\ \ldots + \sqrt{\ldots}}{2 \times\ \ldots} = \ldots\ldots\ldots$$
5. $x^2 = 3x + 18$. On a : $a = \ldots$, $b = \ldots$, $c = \ldots$, $\Delta = \left(\ \ldots\ \right)^2 - 4 \times\ \ldots\ \times\ \ldots\ = \ldots\ldots$
$$x_1 = \frac{-\ \ldots - \sqrt{\ldots}}{2 \times\ \ldots} = \ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-\ \ldots + \sqrt{\ldots}}{2 \times\ \ldots} = \ldots\ldots\ldots$$

6. $9x^2+48x+64=0$. On a : $a=\ldots$, $b=\ldots$, $c=\ldots$, $\Delta=\left(\ \ldots\ \right)^2-4\times\ \ldots\ \times\ \ldots\ =\ldots\ldots$

$$x_1=\frac{-\ \ldots\ -\sqrt{\ldots}}{2\times\ \ldots}=\ \ldots\ldots\ldots\qquad\text{et}\qquad x_2=\frac{-\ \ldots\ +\sqrt{\ldots}}{2\times\ \ldots}=\ \ldots\ldots\ldots$$

Résolution des systèmes de deux équations à deux inconnues.

A. Par substitution :

Exercice n° 2:

i. $$\begin{cases}2x+y&=&1\\x+3y&=&18\end{cases}\iff\begin{cases}y=\\x+3y=18\end{cases}\iff\begin{cases}y=\\x+3(\qquad\qquad)=18\end{cases}\iff\begin{cases}y=\\\ldots\ x+\ \ldots\ =18\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}y=\\\ldots\ x=\ \ldots\end{cases}\iff\begin{cases}y=\\x=\ \ldots\end{cases}$$

On aurait pu aussi résoudre ce système en $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ l'inconnue x au lieu de l'inconnue y :

$$\iff\begin{cases}2(\qquad\qquad)+y=1\\x=\end{cases}\iff\begin{cases}\ldots\ y+\ \ldots\ =1\\x=\end{cases}\iff\begin{cases}\ldots\ y=\ \ldots\\x=\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}y=\ \ldots\\x=\end{cases}$$ la solution du système est

ii. $$\begin{cases}-x+2y&=&0\\3x-5y&=&2\end{cases}\iff\begin{cases}x=\\ \end{cases}\iff\begin{cases}\\ \end{cases}\iff\begin{cases}\\ \end{cases}$$

iii. $$\begin{cases}4x-y&=&11\\5x-3y&=&-2\end{cases}\iff\begin{cases}\\ \end{cases}\iff\begin{cases}\\ \end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\\ \end{cases}\iff\begin{cases}\\ \end{cases}$$

iv. $$\begin{cases}x-2y&=&1\\3x-7y&=&9\end{cases}\iff\begin{cases}\\ \end{cases}\iff\begin{cases}\\ \end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\\ \end{cases}\iff\begin{cases}\\ \end{cases}$$

v. $$\begin{cases}4x+y&=&2\\2y-3x&=&4\end{cases}\iff\begin{cases}\\ \end{cases}\iff\begin{cases}\\ \end{cases}\iff\begin{cases}\\ \end{cases}$$

vi. $\begin{cases} 3x+6y &= 3 \\ x-4y &= -7 \end{cases} \iff \begin{cases} \\ \\ \end{cases} \iff \begin{cases} \\ \\ \end{cases} \iff \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$

vii. $\begin{cases} 4x+y &= 3 \\ 2y+3x &= 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \\ \\ \end{cases} \iff \begin{cases} \\ \\ \end{cases} \iff \begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$

viii. $\begin{cases} x+7y &= 3 \\ 3y-2x &= 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \\ \\ \end{cases} \iff \begin{cases} \\ \\ \end{cases} \iff \begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$

ix. $\begin{cases} 6x+9y=4 \\ -4x+7y=6 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x= \\ -4x+7y=6 \end{cases} \iff \begin{cases} x= \\ \\ -4x+7y=6 \end{cases} \iff \begin{cases} x= \\ -4\left(\qquad \right)+7y=6 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x= \\ \\ \qquad\qquad +7y=6 \end{cases} \iff \begin{cases} x= \\ \\ \end{cases} \iff \begin{cases} x= \\ \\ \end{cases}$

Pour ce dernier système la substitution n'est pas bien adapté, car l'expression des inconnues est compliqué :

1^re^ équation :	ou	**2^e^ équation :**
$x=$		$x=$
$y=$		$y=$

Il existe dans ce cas une autre méthode : la résolution

B. Par combinaison linéaire :

Exercice n° 3: On considère les équations linéaires suivantes :

$L_1:\ 2x+3y=1 \qquad L_2:\ -x+y=-1 \qquad L_3:\ 2y-5x=0 \qquad L_4:\ 4x-2y=3$

1. Complète les .... suivantes :

$$\begin{array}{rl} L_1: & \dots\ x + \dots\ y = \dots \\ L_2: & \dots\ x + \dots\ y = \dots \\ \hline L_1+L_2: & \dots\ x + \dots\ y = \dots \end{array} \qquad \begin{array}{rl} L_4: & \dots\ x + \dots\ y = \dots \\ L_1: & \dots\ x + \dots\ y = \dots \\ \hline L_4-L_1: & \dots\ x + \dots\ y = \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 2L_3: & \dots\ x + \dots\ y = \dots \\ L_2: & \dots\ x + \dots\ y = \dots \\ \hline 2L_3+L_2: & \dots\ x + \dots\ y = \dots \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 3L_2: & \dots\ x + \dots\ y = \dots \\ -2L_3: & \dots\ x + \dots\ y = \dots \\ \hline 3L_2-2L_3: & \dots\ x + \dots\ y = \dots \end{array}$$

2. Complète les .... et déduis-en la valeurs de chacune des inconnues.

$$\begin{array}{rl} L_3: & \dots\ x + \dots\ y = \dots \\ L_4: & \dots\ x + \dots\ y = \dots \\ \hline L_3+L_4: & \dots\ x + \dots\ y = \dots \end{array} \qquad \begin{array}{rl} L_3: & \dots\ x + \dots\ y = \dots \\ L_4: & \dots\ x + \dots\ y = \dots \\ \hline 4L_3+5L_4: & \dots\ x + \dots\ y = \dots \end{array}$$

Donc, $x = \dots$

Donc, $y = \dots$

Méthode de résolution :

On élimine les x

On élimine les y

$\times \dots$

$\times \dots$

$$\begin{cases} \quad x + \dots\ y = \dots \\ \quad x + \dots\ y = \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x + 9y = 4 \\ -4x + 7y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots\ x + \quad y = \dots \\ \dots\ x + \quad y = \dots \end{cases}$$

$\times \dots$

$\times \dots$

Les coefficients ... et ... sont de signes opposés, donc on .... les deux équations :

$$\begin{array}{c} \dots\ x + \dots\ y = \dots \\ \dots\ x + \dots\ y = \dots \\ \hline \dots\ x + \dots\ y = \dots \end{array}$$

On trouve $y = $ ....

Les coefficients ... et ... sont de même signes, donc on .... les deux équations :

$$\begin{array}{c} \dots\ x + \dots\ y = \dots \\ \dots\ x + \dots\ y = \dots \\ \hline \dots\ x + \dots\ y = \dots \end{array}$$

On trouve $x = $ ....

Exercice n° 4: On va résoudre ce système de deux équations par combinaison linéaire.

$$\begin{cases} 6x+9y=4 \\ -4x+7y=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-5y=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x+2y=3 \\ 5x-3y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 12x+9y=7 \\ 20x+15y=1 \end{cases}$$

C. Application à la résolution de systèmes non linéaires

$(S_1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$ $(S_3) \begin{cases} x + y = 1 \\ y^2 - x^2 = 17 \end{cases}$ $(S_5) \begin{cases} x + 2y = 2 \\ xy = -84 \end{cases}$

$(S_2) \begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = -129 \\ y^2 - x^2 = 40 \end{cases}$ $(S_4) \begin{cases} x - 2y = 3 \\ x^2 - 4y^2 = 57 \end{cases}$ $(S_6) \begin{cases} x^2 + y^2 + 3 = 4x + 6y \\ x^2 + y^2 + 73 = 18x + 6y \end{cases}$

Réponses : (S_1) : les 4 couples $(-3, -2)$, $(-3, 2)$, $(3, 2)$, et $(3, -2)$. (S_2) : les 4 couples $(-3, -7)$, $(-3, 7)$, $(3, -7)$, et $(3, 7)$. (S_3) : le couple $(-8, 9)$.

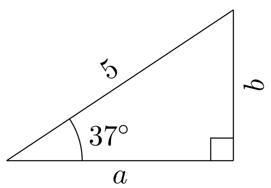
Mathématiques pour le technicien 1

TD d'algèbre n° 3 - Semestre 1
Trigonométrie.

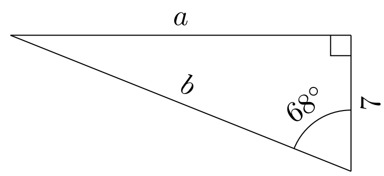
Trigonométrie.

Exercice n° 1: Détermine les longueurs a et b au dixième d'unité près :

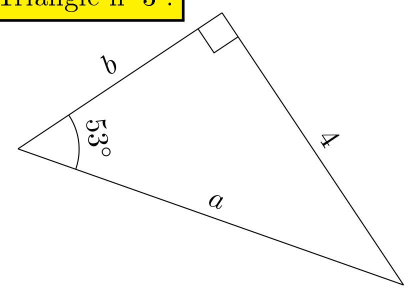
Triangle n° 1 :



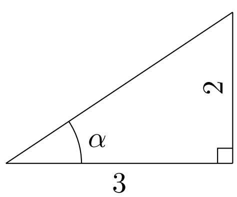
Triangle n° 2 :

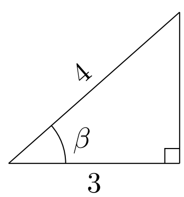


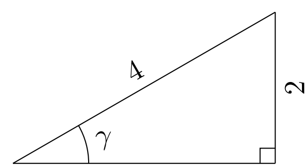
Triangle n° 3 :



Exercice n° 2: Détermine la mesure de chacun des angles aigus suivants au dixième de degré près :



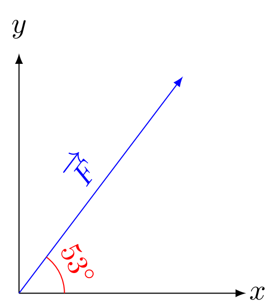




Application aux composantes d'une force.

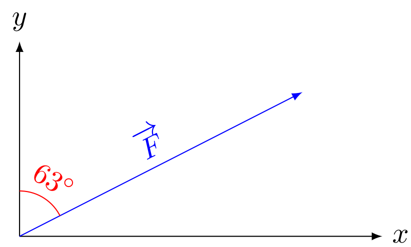
Exercice n° 3: Détermine la valeur des composantes horizontale et verticale des forces suivantes :

a. $F = 15\text{kN}$



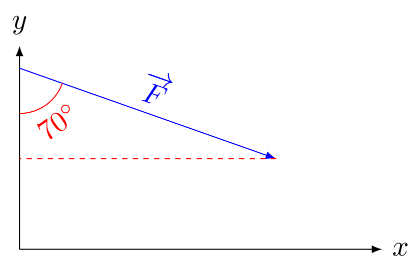
- La valeur de la composante horizontale de $\overrightarrow{F}$ est ....
- La valeur de la composante verticale de $\overrightarrow{F}$ est ....

b. $F = 22\text{kN}$



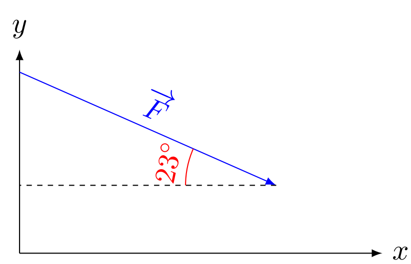
- La valeur de la composante horizontale de $\overrightarrow{F}$ est ....
- La valeur de la composante verticale de $\overrightarrow{F}$ est ....

c. $F = 18\text{kN}$



- La valeur de la composante horizontale de $\overrightarrow{F}$ est ....
- La valeur de la composante verticale de $\overrightarrow{F}$ est ....

d. $F = 30\text{kN}$



- La valeur de la composante horizontale de $\overrightarrow{F}$ est ....
- La valeur de la composante verticale de $\overrightarrow{F}$ est ....

Résolution d'équations se ramenant au second degré.

Trinôme du second degré

Pour résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$ où $a \neq 0$,
on commence par calculer le discriminant $\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots$ puis :

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions : $x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;

  Et $ax^2+bx+c = a\big(x-x_1\big)\big(x-x_2\big)$
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation a une seule solution : $x_1 = \ldots\ldots$ et $ax^2+bx+c = a\Bigg(x+ \ldots\ldots\ldots \Bigg)^2$
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solutions réelles, mais des solutions complexes conjuguées :

  $z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $az^2+bz+c = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice n° 4: Résolution dans $\mathbb{C}$ d'équations se ramenant au 2[nd] degré.

i. $-x^2+3x=4$

ii. $x^2=49$

iii. $x^2=-49$

iv. $x^2=5$

v. $x^2=-5$

vi. $(9x^2-24x+16)(x^2-8x+15)=0$

vii. $(\bigstar)\ \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{3-x}{x}$

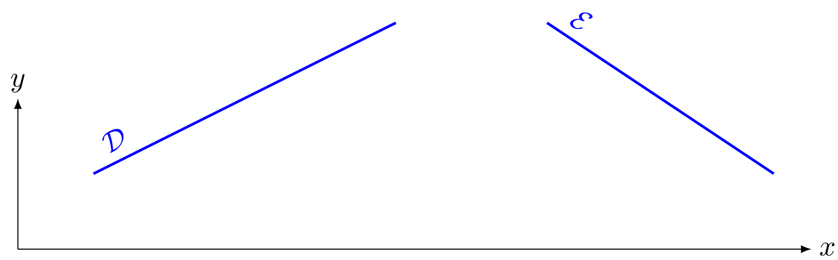
viii. $(\bigstar)\ \dfrac{7}{x-4} - \dfrac{6}{x-2} = 2$

ix. $(\bigstar)\ \dfrac{2x+5}{2x} - \dfrac{x}{x+5} = 1$

Mathématiques pour le technicien 1

TD d'algèbre n° 4 - Semestre 1
Remise à niveau II

Pente d'une droite



La ...... de la droite $\mathcal{D}$ est

— =

Ici, la pente est ....

La ...... de la droite $\mathcal{E}$ est

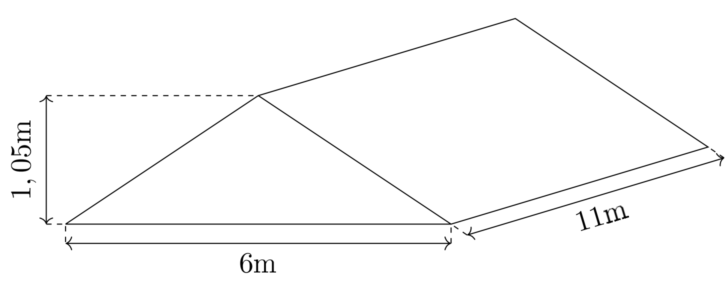
— =

Ici, la pente est ....

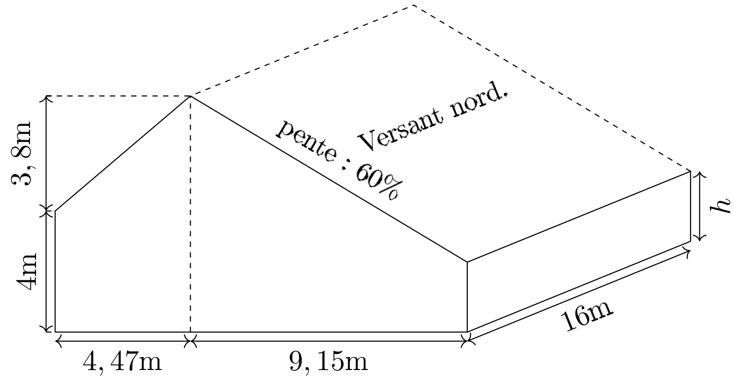
La ...... est aussi appelée ....

Exercice n° 1: Pente d'une droite :

1. Donne l'angle de la pente d'une route de 8%.
2. L'angle de la pente d'une route est de 45°. Quelle est sa pente en pour cent ?
3. Donne la pente et l'angle de cette toiture parfaitement symétrique :



Exercice n° 2: Etude d'un bâtiment :



a. Détermine la pente au pour cent près et l'angle au degré près du versant sud de la toiture.

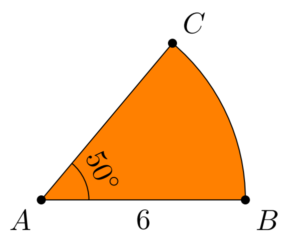
b. Détermine l'angle du versant nord. Déduis-en la hauteur h du mur orienté au nord.

c. Calcule la surface du versant nord.

d. Calcule l'aire des deux pignons.

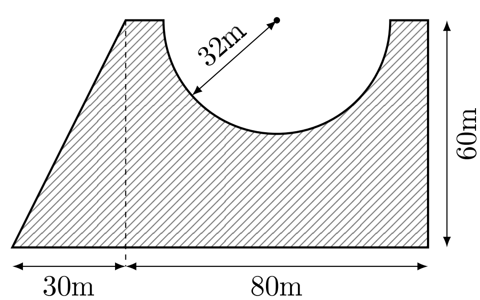
Superficie.

Exercice n° 3: Calcule l'aire exacte du secteur angulaire suivant :



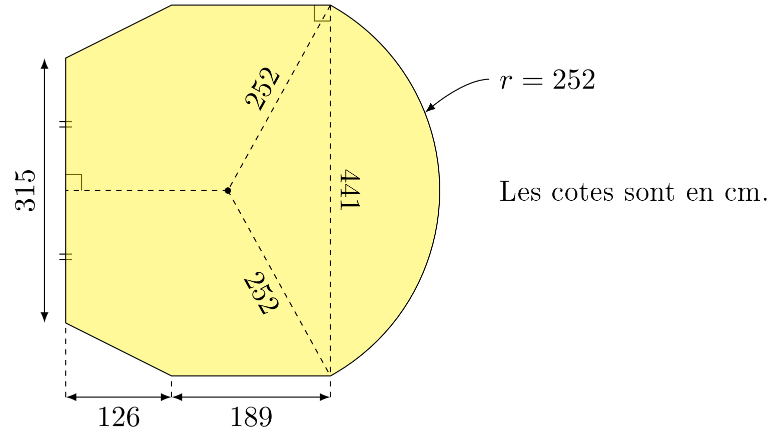
Exercice n° 4: Calcule d'une aires à une précision demandée.

1. A combien de mètres carrés, un décimètre carré est-il égale ?
2. Calcule l'aire, en m^2, de la figure suivante à un dm^2 près :



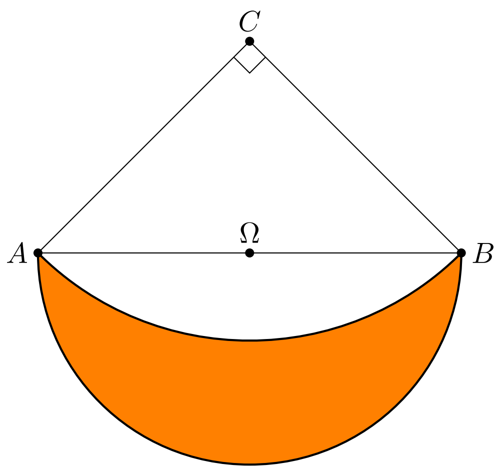
Exercice n° 5: Poids d'une dalle de béton.

1. A combien de mètres cubes, un centimètre cube est-il égale ?
2. Calcule l'aire de la dalle suivante au centimètre carré près :



3. Cette dalle a un épaisseur de 22cm, sachant que la masse volumique du béton est $\rho = 2500$ kg/m^3, calcule sa masse.

Exercice n° 6: Ce lunule est constitué de deux arcs de cercle, l'un centré en C, l'autre en Ω.



Calcule l'aire de ce Lunule sachant que $\Omega A = \Omega B = 4$.

Mathématiques pour le technicien 1

TD d'algèbre n° 5 - Semestre 1
Trigonométrie

Exercice n° 1: Ecris sous la forme $\dfrac{\sqrt{a}}{b}$ ou $a\sqrt{b}$.

i. $\dfrac{14}{\sqrt{7}} =$ .... iii. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} =$ ....

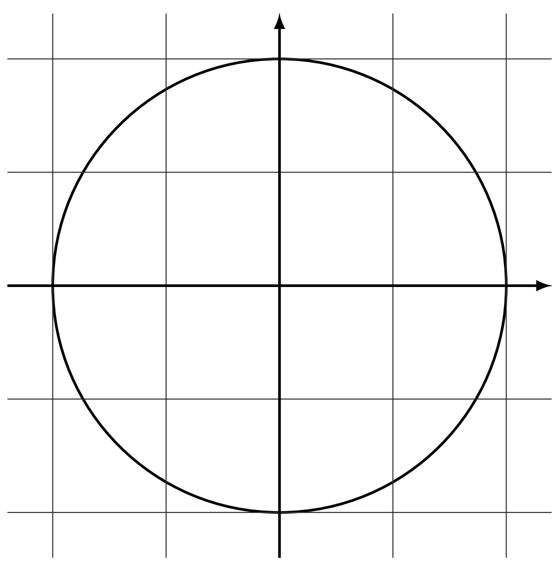
ii. $\dfrac{5}{\sqrt{5}} =$ .... iv. $\dfrac{3}{2\sqrt{3}} =$ ....

Exercice n° 2: Complète le tableau ci-dessous :

Degrés		60		30	150		-135			-225
Radians	π		$\dfrac{\pi}{4}$			$-\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{4\pi}{3}$	$\dfrac{7\pi}{6}$	

Exercice n° 3: Pour chacun des angles α_i ci-dessous, détermine sa mesure principale en degrés, puis place le point A_i correspondant sur le cercle trigonométrique donné.

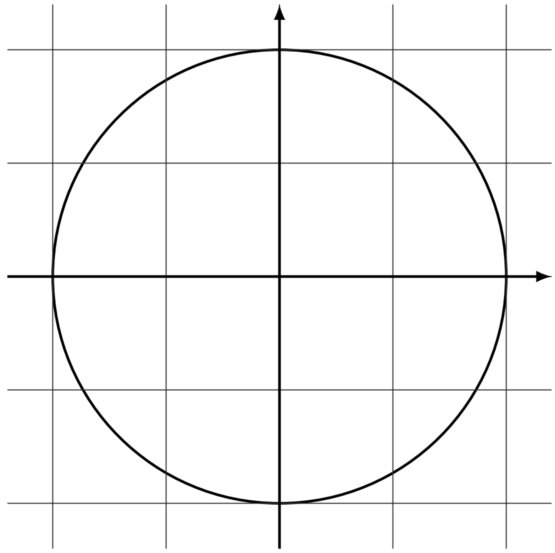
i. $\alpha_1 = 1485°$; ii. $\alpha_2 = -2550°$; iii. $\alpha_3 = 4815°$; iv. $\alpha_4 = -5970°$.



Exercice n° 4: Pour chacun des angles α_i ci-dessous, détermine sa mesure principale en radians, puis place le point A_i correspondant sur le cercle trigonométrique donné.

i. $\alpha_1 = \dfrac{43\pi}{6}$ iii. $\alpha_3 = 5\pi$ v. $\alpha_5 = -\dfrac{39\pi}{2}$ vii. $\alpha_7 = 18\pi$

ii. $\alpha_2 = \dfrac{-97\pi}{2}$ iv. $\alpha_4 = -\dfrac{63\pi}{4}$ vi. $\alpha_6 = -\dfrac{19\pi}{4}$ viii. $\alpha_8 = -\dfrac{77\pi}{6}$

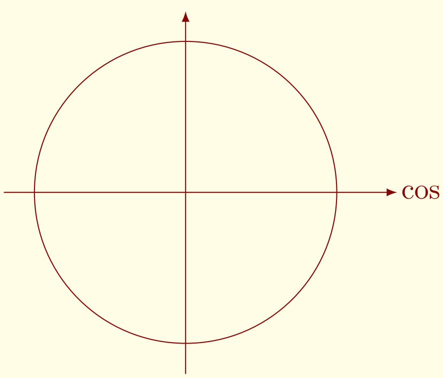


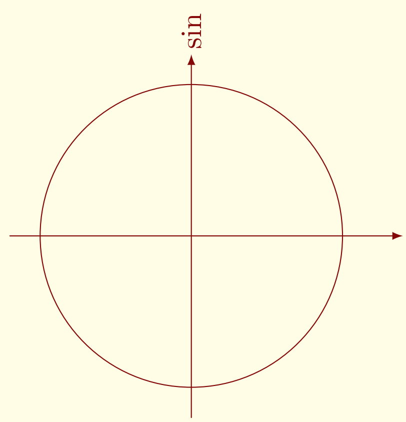
Exercice n° 5: Détermine les solutions exactes des équations trigonométriques suivantes :

i. $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | ii. $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | iii. $2\cos(x) = \sqrt{3}$ | iv. $\cos(x) = -1$

Rappel:

- $\cos x = \cos\alpha \iff x = \pm\alpha\ [2\pi]$
- $\sin x = \sin\alpha \iff x = \alpha\ [2\pi]$ ou $x = \pi - \alpha\ [2\pi]$





Exercice n° 6 (★): Résoudre

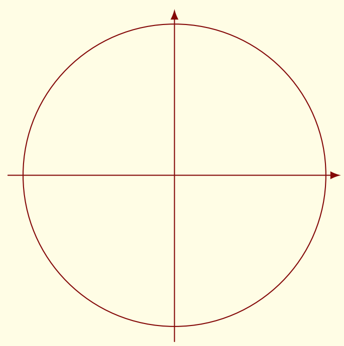
i. $4\cos^2(x) = 3$ | ii. $\sin^2(x) = \dfrac{1}{2}$ | iii. $\sin^2(x) = 1$

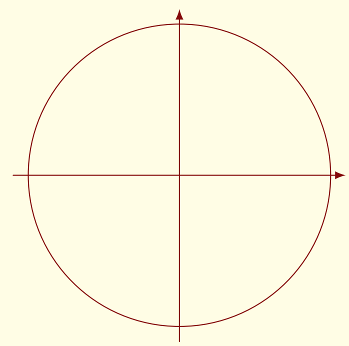
Mathématiques pour le technicien 1

TD d'algèbre n° 6 - Semestre 1
Equations trigonométriques

Rappel:

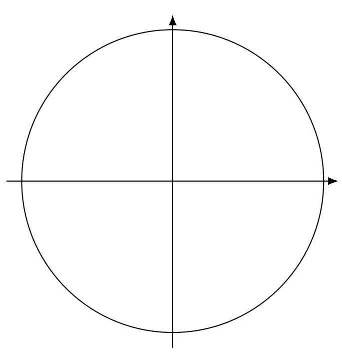
- L'arc de sinus de x ($\arcsin(x)$ ou $\sin^{-1}(x)$) donne la solution de l'équation $\sin\alpha = x$ qui est située sur l'arc $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$;
- L'arc de cosinus de x ($\arccos(x)$ ou $\cos^{-1}(x)$) donne la solution de l'équation $\cos\alpha = x$ qui est située sur l'arc $[0\,,\,\pi]$.

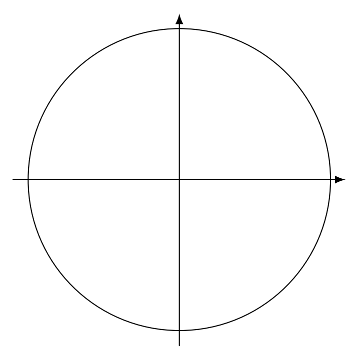




Exercice n° 1: Résoudre en donnant les solutions en degrés (à 10^{-1} près) et en radians (à 10^{-4} près), puis les placer sur le cercle trigonométrique associé.

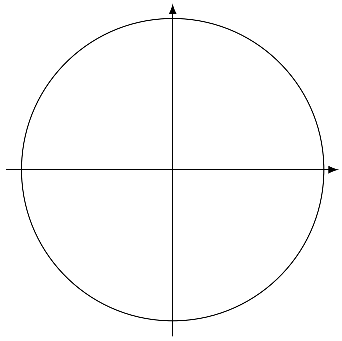
i. $\sin(x) = 0,6$



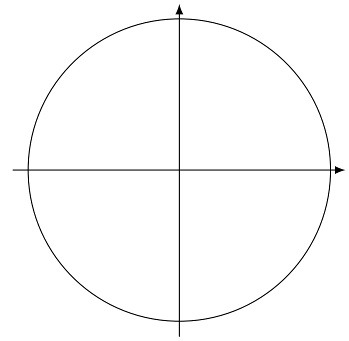


ii. $\cos(x) = 0,6$

iii. $\sin(x) = -0,37$



iv. $\cos(x) = -0,75$



Pour résoudre le système $\begin{cases} \cos(x) = a \\ \sin(x) = b \end{cases}$:

1. On construit le cercles trigonométrique sur $]-\pi\,,\,\pi]$;
2. On cherche les deux valeurs de x possibles pour le cosinus ;
3. x a le même signe (sur $]-\pi\,,\,\pi]$) que son sinus.

si $a^2 + b^2 \neq 1$ alors le système n'a pas de solution.

Exercice n° 2: Résoudre

i. $\begin{cases} \cos(x) = -1 \\ \sin(x) = 0 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

iii. $\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{1}{2} \\ \sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

iv. $\begin{cases} \cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

v. $\begin{cases} \cos(x) = \frac{1}{2} \\ \sin(x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

vi. $\begin{cases} \cos(x) = -\dfrac{1}{2} \\ \sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Rappel:

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ et $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

Exercice n° 3: Calcule :

i. $\sin(75°)$

ii. $\sin(105°)$

iii. $\sin(15°)$

Résolution de $a\sin(x)+b\cos(x)=c$

Si $(a,b)\neq(0,0)$ alors en posant $r=\sqrt{a^2+b^2}$ et en définissant α par $\cos(\alpha)=\dfrac{a}{r}$ et $\sin(\alpha)=\dfrac{b}{r}$ alors :

$$\boxed{a\sin(x)+b\cos(x)=c \iff r\sin(x+\alpha)=c.}$$

Mnémotechnique : $\sin(\alpha+x)=\cos(\alpha)\sin(x)+\sin(\alpha)\cos(x)$ donc :

$$\cos(\alpha)=\frac{\text{coefficient du sin}}{r} \text{ et } \sin(\alpha)=\frac{\text{coefficient du cos}}{r}$$

Le nombre r est appelé .... et α le ....

Exercice n° 4: Détermine l'amplitude et le déphasage des signaux suivants, puis écrit les sous la forme :

$$r\sin(x+\alpha)$$

i. $f_1(x)=5\cos(x)-3\sin(x)$.

ii. $f_2(x)=-2\cos(x)+\sin(x)$.

iii. $f_3(x)=-\cos(x)+\sin(x)$.

iv. $f_4(x)=-\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)$.

Exercice n° 5 (★★): Résoudre

i. $4\cos(x)+3\sin(x)=6$

ii. $\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)=1$

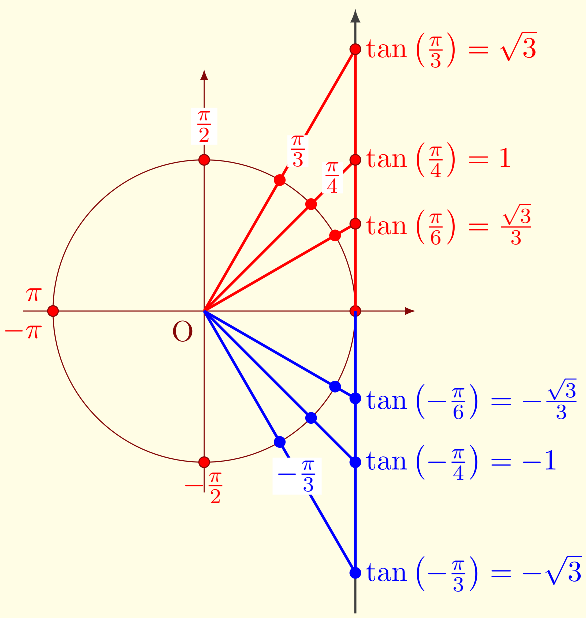
iii. $2\sin(x)+\cos(x)=-\sqrt{5}$

Mathématiques pour le technicien 1

TD d'algèbre n° 7 - Semestre 1
Utilisation de l'arc de tangente - Coordonnées polaires.

Exercice n° 1: Détermine les mesures principales solutions des équations trigonométriques suivantes :

Rappel:



i. $\tan(x) = \sqrt{3}$.

ii. $\tan(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

iii. $\tan(x) = -1$.

iv. $\tan(x) = -\sqrt{3}$.

v. $\tan(x) = 1$.

vi. $\tan(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

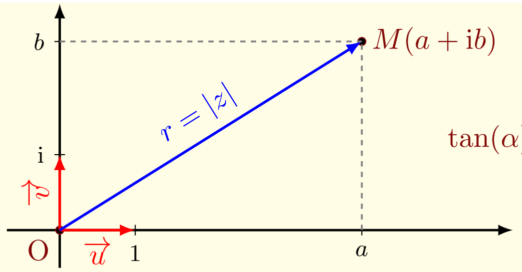
vii. $\tan(x) = 0$.

viii. $\tan(x) = +\infty$.

Exercice n° 2: Détermine une mesure principale des arguments des nombres complexes suivants :

Rappel:

Si $z = a+ib$ un nombre complexe dont la .... est non nul, alors il un unique mesure principale α tel que :



$\tan(\alpha) =$ ....

- La mesure principale α est du .... que la partie imaginaire b ;
- la forme trigonométrique de z est .... ;
- la forme exponentielle de z est ..... .

i. $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

ii. $\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

iii. $\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{6}$.

Exercice n° 3: Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, détermine une mesure principale de chacun des angles $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}M}\right)$ où :

i. $M\left(-\sqrt{3}\,,\, 3\right)$.

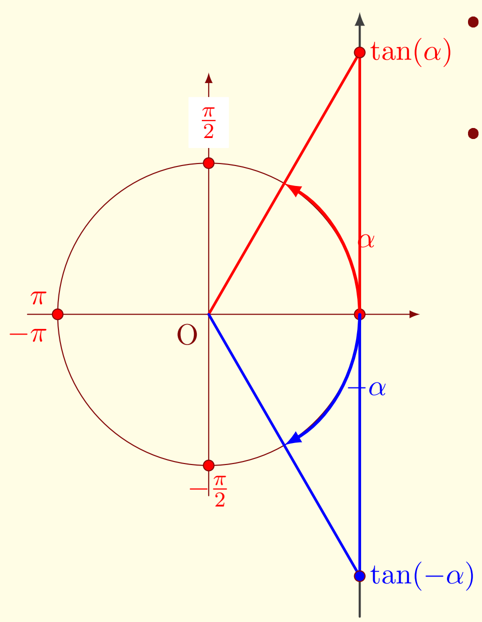
ii. $M\left(-5\,;\, 5\right)$.

iii. $M\left(\sqrt{6}\,,\, \sqrt{6}\right)$.

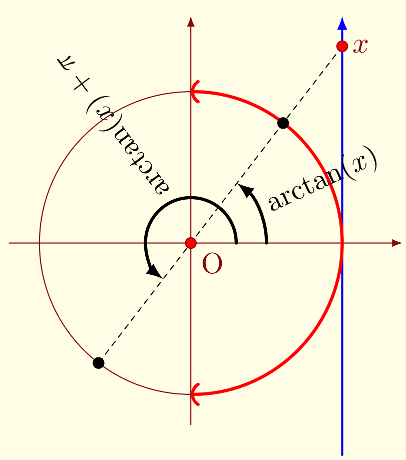
iv. $M\left(2\sqrt{2}\,,\, -2\sqrt{6}\right)$.

Exercice n° 4: Détermine les mesures principales, en degrés à 10^{-1} près, des solutions des équations trigonométriques suivantes :

Rappel:



- L'arc de tangente de x ($\arctan(x)$ ou $\tan^{-1}(x)$) donne la solution de l'équation $\tan\alpha = x$ qui est située sur l'arc $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$;
- $\tan x = \tan\alpha \iff x = \alpha\ [2\pi]$ ou $x = \alpha + \pi\ [2\pi]$



i. $\tan(x) = 5$.

ii. $\tan(x) = -0,5$.

Exercice n° 5: Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, détermine une mesure principale, en degrés à 10^{-1} près, de chacun des angles $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}M}\right)$ où :

i. $M\left(4\,,\,3\right)$;

ii. $M\left(5\,,\,-7\right)$;

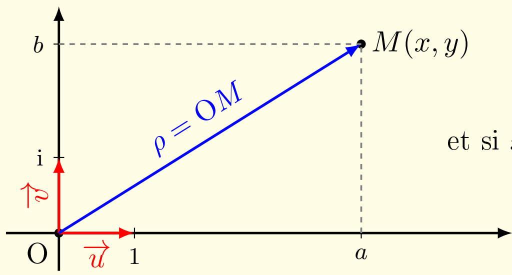
iii. $M\left(-6\,,\,-10\right)$;

iv. $M\left(10\,,\,6\right)$.

Coordonnées polaires.

Propriété

Si les coordonnées d'un point M dans un repère .... ne sont pas nuls, alors il existe une unique mesure principale θ tel que :

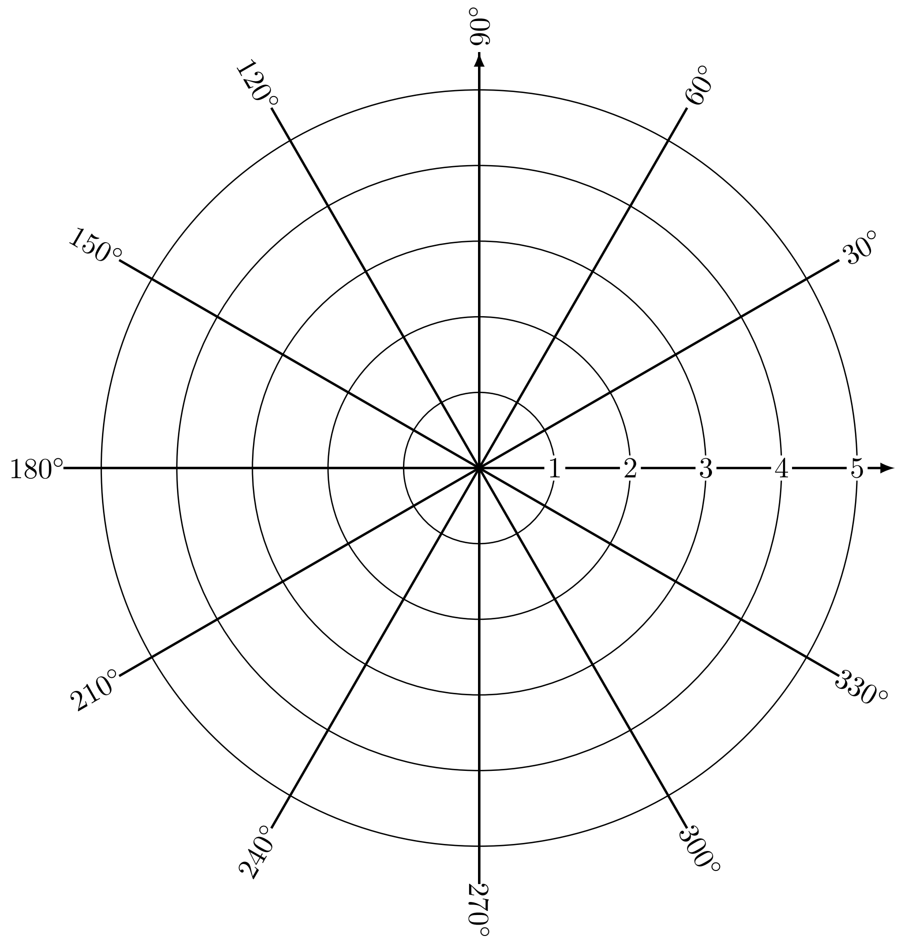


et si $x \neq 0$, $\tan(\theta) =$ ....

- La mesure principale θ est du même signe que son ....
- Les coordonnées .... du point M, notées .... , sont définies par $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$

  ρ est la coordonnée .... et θ la coordonnée ....

Exercice n° 6: On considère le diagramme polaire suivant :



1. Place les points $A(3;60°)$, $B(4;-120°)$, $C(2;150°)$, et $D\left(1;\frac{2\pi}{3}\right)$
2. Place les points $E\left(5\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\right)$, $F\left(3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right)$, $G\left(4\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\right)$, et $H\left(-5\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\right)$.
3. Calcule les coordonnées exactes des points A, B, G, et H.
4. Quelles sont les coordonnées polaires du point H ?

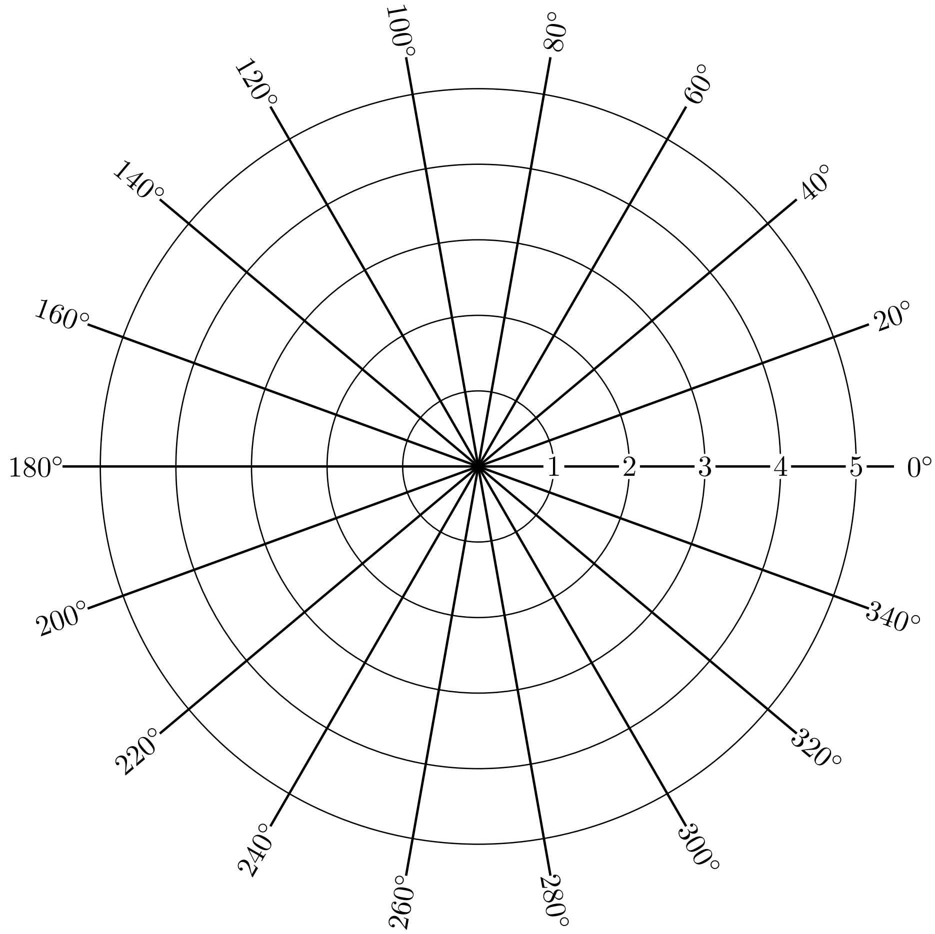
Exercice n° 7: Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points $A\begin{vmatrix}-3\\4\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}2\\-5\end{vmatrix}$ et $C(-4-7\mathrm{i})$.

Détermine les coordonnées polaires de chacun de ces points.

Exercice n° 8: On considère la courbe de l'« œuf double » définie par $\rho(\theta) = 5\cos^2(\theta)$. Complète le tableau de valeur suivant en plaçant au fur et à mesure les points dans diagramme polaire suivant :

θ	0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°
$\rho(\theta)$						0,2	1,3	2,9	4,4

θ	180°	200°	220°	240°	260°	280°	300°	320°	340°
$\rho(\theta)$						0,2	1,3	2,9	4,4

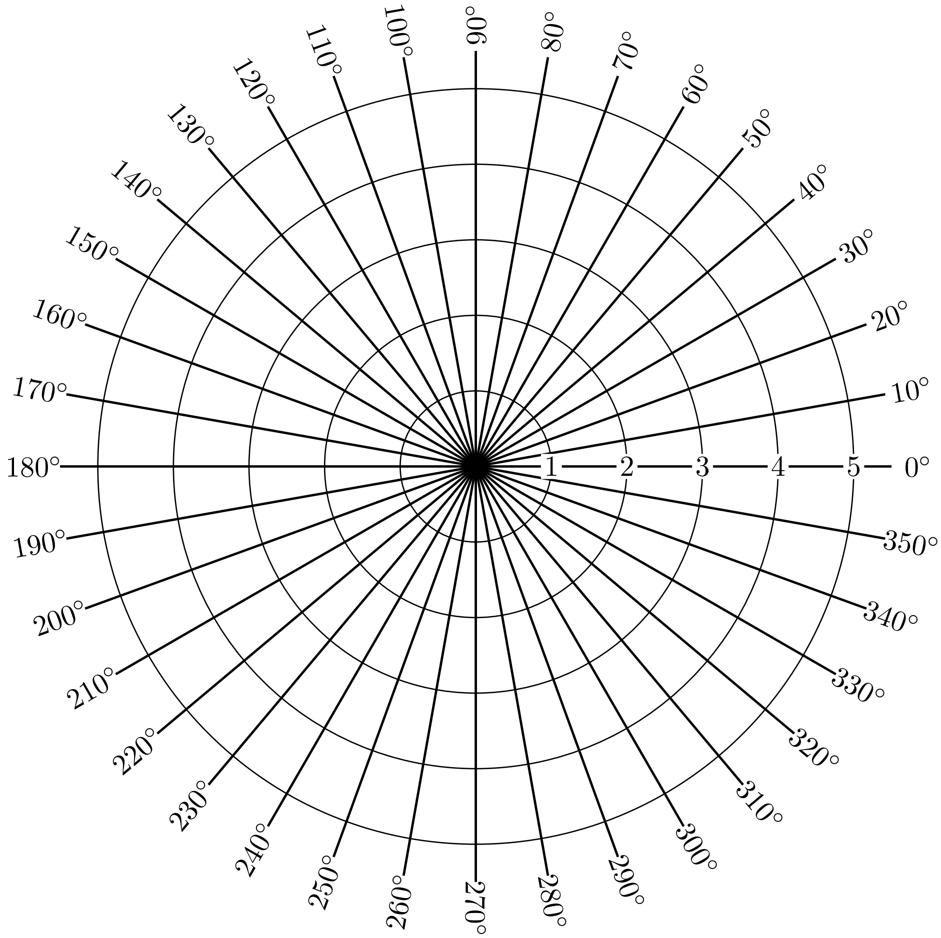


Exercice n° 9: On considère la courbe de le « trifolium » définie par $\rho(\theta) = 5\cos(3\theta)$.

1. Complète le tableau de valeur suivant en plaçant au fur et à mesure les points dans diagramme polaire suivant :

θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\rho(\theta)$						-4,3	-5	-4,3	-2,5

θ	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°
$\rho(\theta)$						2,5	0	-2,5	-4,3



2. Démontre que le « trifolium » est entièrement défini pour $\theta \in [0, \pi[$.

Mathématiques pour le technicien 1

TD d'algèbre n° 8 - Semestre 1
Nombres complexes I : Rappels et/ou découverte.

Exercice n° 1: Ecris les 10 premiers entiers dont la racine carrée est un entier.

....

Exercice n° 2: Simplifie les racines carrées suivantes :

i. $\sqrt{75} =$ ....

ii. $\sqrt{72} =$ ....

iii. $\sqrt{147} =$ ....

iv. $\sqrt{88} =$ ....

Exercice n° 3: Ecris sous la forme $a\sqrt{b}$ ou $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$.

i. $\dfrac{100}{\sqrt{5}} =$ ....

ii. $\dfrac{10}{3\sqrt{20}} =$ ....

iii. $\dfrac{4}{5\sqrt{8}} =$ ....

iv. $\dfrac{2}{\sqrt{8}} =$ ....

v. $\dfrac{6}{\sqrt{18}} =$ ....

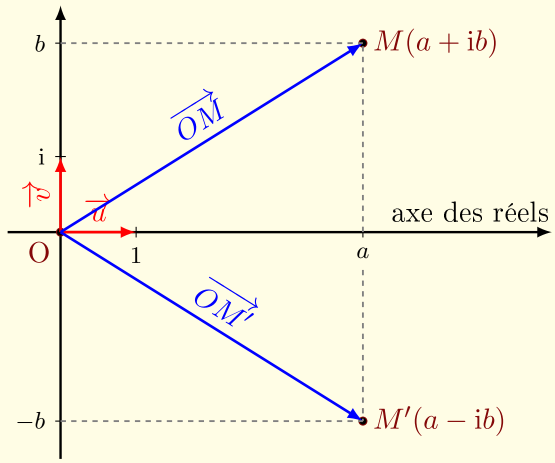
vi. $\sqrt{\dfrac{26}{4}} =$ ....

vii. $\dfrac{3}{2\sqrt{15}} =$ ....

viii. $\sqrt{\dfrac{27}{50}} =$ ....

Rappel:

Le plan complexe est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ orthonormé.



- $z_M =$ .... est l'affixe du point M ;
- $z'_M =$ .... est le conjugué de z_M ;
- M' est le .... du point M par rapport à l'axe des nombres réels ;
- $\mathrm{O}M =$ .... ;
- $z\overline{z} =$ ....

Exercice nº 4: Calcule les modules suivants :

i. $\left|-4\right| =$ ....

ii. $\left|\dfrac{2}{3}\right| =$ ....

iii. $\left|-\dfrac{7}{13}\right| =$ ....

iv. $\left|-\sqrt{5}\right| =$ ....

v. $\left|1+\mathrm{i}\right| =$ ....

vi. $\left|2+4\mathrm{i}\right| =$ ....

vii. $\left|3-2\mathrm{i}\right| =$ ....

viii. $\left|-3+7\mathrm{i}\right| =$ ....

ix. $\left|-7\mathrm{i}\right| =$ ....

x. $\left|5\mathrm{i}\right| =$ ....

Propriété : Le module est compatible avec la multiplication et la division

Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 où $z_2 \neq 0$ et tout entier relatif n, on a :

$$\left|z_1 \times z_2\right| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad , \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad , \text{ et } \left|z_2^n\right| = \ldots\ldots$$

Exercice nº 5: Calcule les modules suivants :

i. $\left|-7\mathrm{i}\right| =$ ....

ii. $\left|\dfrac{3-2\mathrm{i}}{2+4\mathrm{i}}\right| =$ ....

iii. $\left|(2+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})\right| =$ ....

iv. $\left|(-3+7\mathrm{i})^3\right| =$ ....

v. $\left|(1-3\mathrm{i})^4\right| =$ ....

vi. $\left|(1-3\mathrm{i})^8\right| =$ ....

Inverse et quotient

Pour déterminer la forme algébrique d'un inverse ou d'un quotient, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du ....

Exercice n° 6: Détermine la forme algébrique de $\dfrac{1}{z_1}$ puis de $\dfrac{z_1}{z_2}$.

i. $z_1 = 3 + \mathrm{i}$ et $z_2 = 4 + 2\mathrm{i}$

ii. $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = 3 + 4\mathrm{i}$

iii. $z_1 = 4 - 4\mathrm{i}$ et $z_2 = -1 - 3\mathrm{i}$

iv. $z_1 = 3\mathrm{i} - 1$ et $z_2 = -2 + 6\mathrm{i}$

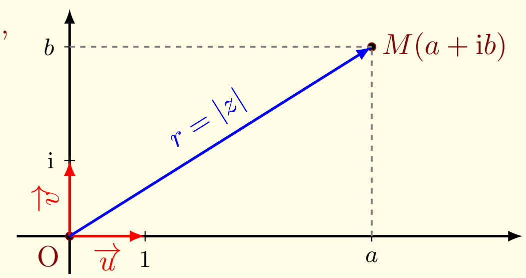
Rappel:

Si $z = a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe .... , alors il existe un unique réel .... r et un unique réel α (à $2k\pi$ près, $k \in$ ....) tels que :

$$z = r\left[\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)\right]$$

Cette écriture est la .... de z.

- α est un .... de z ;
- r est le .... de z.



Exercice n° 7: Détermine la forme trigonométrique et exponentielle de :

i. $z = 2\mathrm{i}$. | ii. $z = -2\mathrm{i}$. | iii. $z = -3$. | iv. $z = 1,7$. | v. $z = -\mathrm{i}\sqrt{2}$.

Rappel:

Pour déterminer un argument d'un nombre complexe non nul $z = a + \mathrm{i}b$, on résout :

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin(\alpha) = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exercice n° 8: Détermine la forme trigonométrique et exponentielle de :

- $z_1 = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.
- $z_2 = 1 + \mathrm{i}$.
- $z_3 = \dfrac{5\sqrt{3} - 5\mathrm{i}}{2}$.
- $z_4 = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.
- $z_5 = 4 - 3\mathrm{i}$.
- $z_6 = 4\mathrm{i} - 1$.
- $z_7 = -\sqrt{3} - \sqrt{3}\mathrm{i}$.
- $z_8 = 4 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
- $z_9 = -2 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Mathématiques pour le technicien 1

TD d'algèbre n° 9 - Semestre 1
Nombres complexes II : Les formules d'Euler.

Combinaison et linéarisation.

Définition:

Le nombre de façons de choisir p objets parmi n sans tenir compte de l'ordre est appelé la .... de p parmi n et est notée $\binom{n}{p}$.

Exercice n° 1: Complète :

- $\binom{3}{0} =$
- $\binom{4}{0} =$
- $\binom{12}{1} =$

- $\binom{8}{2} =$
- $\binom{9}{2} =$
- $\binom{2}{2} =$

- $\binom{9}{3} =$
- $\binom{5}{3} =$
- $\binom{3}{3} =$

- $\binom{9}{4} =$
- $\binom{5}{4} =$
- $\binom{4}{4} =$

Exercice n° 2: Combien y a-t-il de façons de choisir

a. une carte dans un jeu de 32 cartes ?

b. 5 cartes dans un jeu de 32 cartes ?

c. 27 cartes dans un jeu de 32 cartes ?

d. aucune carte dans un jeu de 32 cartes ?

Exercice n° 3: Un peu de vocabulaires pour commencer :

- $(x+y)^2 = (x+y)\times(x+y) \underset{\text{développement}}{=} x^2 + xy + yx + y^2 \underset{\text{réduction}}{=} x^2 + 2xy + y^2$
- Le coefficient du monôme xy est 2, celui du monôme x^2 est 1.

a. Quelle est le coefficient du monôme x^2y^5 dans l'expression développée et réduite de $(x+y)^7$?
<u>Indication :</u> $(x+y)^7 = (x+y)\times(x+y)\times(x+y)\times(x+y)\times(x+y)\times(x+y)\times(x+y)$

b. Quelle est le coefficient du monôme x^5y^{10} dans l'expression développée et réduite de $(x+y)^{15}$?

c. Quelle est le coefficient du monôme x^2y^3 dans l'expression développée et réduite de $(2x-y)^5$?

d. Quelle est le coefficient du monôme $x^2y^3z^4$ dans l'expression développée et réduite de $(x+y+z)^9$?

Rappel:

La formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice n° 4: Développe $(a+b)^4$, $(a-b)^3$ et $(a+b)^4$.

Exercice n° 5: De l'exponentielle à la trigonométrie.

1. Mettre sous forme trigonométrique :
   (a) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$
   (b) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$
2. Déduis-en une expression de $\sin(\theta)$ en fonction de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.
3. Déduis-en une expression de $\cos(\theta)$ en fonction de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

Rappel:

Les formules d'Euler

$$\cos(\theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et } \sin(\theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exercice n° 6: Linéarise : $\sin^2(x)$, $\cos(x)\sin(x)$, et $\cos^4(x)$

Exercice n° 7: Linéarise : $\sin(x)\cos(y)$ et $\sin^2(x)\cos(y)$

Exercice n° 8: Calcule $\displaystyle\int \sin^5(x)\,\mathrm{d}x$.

On rappelle que pour $a \neq 0$, $\displaystyle\int \sin(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax)$