Mathématiques pour le technicien

TD de mathématiques n° 1 - Semestre 3
Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.

I. Les équations différentielles linéaires.

Définition:

Une équation différentielle linéaire d'ordre $\boldsymbol{n}$, est une équation différentielle de la forme :

....

où $y^{(i)}$ est le dérivées $i-$ème de la fonction inconnue ....

- Les ... quations ... ifférentielles ... inéaires sont notées .... .
- Si la fonction b est nulle, l'EDL est dite .... et notée .... .

Exercice n° 1: Détermine le type et l'ordre de chacune des équations différentielles suivantes :

1. $y'' \ln(x) + 2xy' + x^2 y = 4$
2. $\dfrac{y}{x} + y' = x^2$
3. $y'' = y'$
4. $y' \ln(x) + x^3 = 2xy + x^2 y''$
5. $y'' = y^2$
6. $\dfrac{y'}{y} = x^2$
7. $\dfrac{y'}{y} = x^2 - y$
8. $y' \cos(x) - y'' \sin(x) = \tan(x)$

Vocabulaire :

Une équation différentielle linéaire .... s'écrit

$$\underbrace{a_n y^{(n)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y}_{\text{premier membre}} = \mathbf{0}$$

est aussi dite ....

II. Equation caractéristique associée à une EDH.

Définition:

L'équation caractéristique associée à l'Équation Différentielle linéaire Homogène

....

est l'équation :

....

Exercice n° 2: Associe à chacune des E.D.L suivantes son E.C.

1. $y'' - 5y' + y = 0$ ....
2. $xy' = y''$ ....
3. $y - 2y' = y''$ ....
4. $y' = y + x$ ....

III. Equations différentielles du premier ordre.

Définition:

On appelle .... , noté **EDL**, du premier ordre est une équation du type :

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

où a et b sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et où l'inconnue y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

L' .... associée .... est : $y'(x) + a(x)y(x) = 0$

1. Résolution d'une EDH du premier ordre à coefficients constants.

Définition:

L'Équation Différentielle Linéaire suivante

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

est à coefficients .... si les a_i sont des ....

Exemple :

EDL	Coefficients Constants	Homogène
$y' + 3y = x^2$		
$y' + 3y = 0$		
$y' + x^2y = 0$		
$y'' + 3y' - y = \sin(x)$		
$y'' + 3y' - ye^x = \sin(x)$		

Théorème

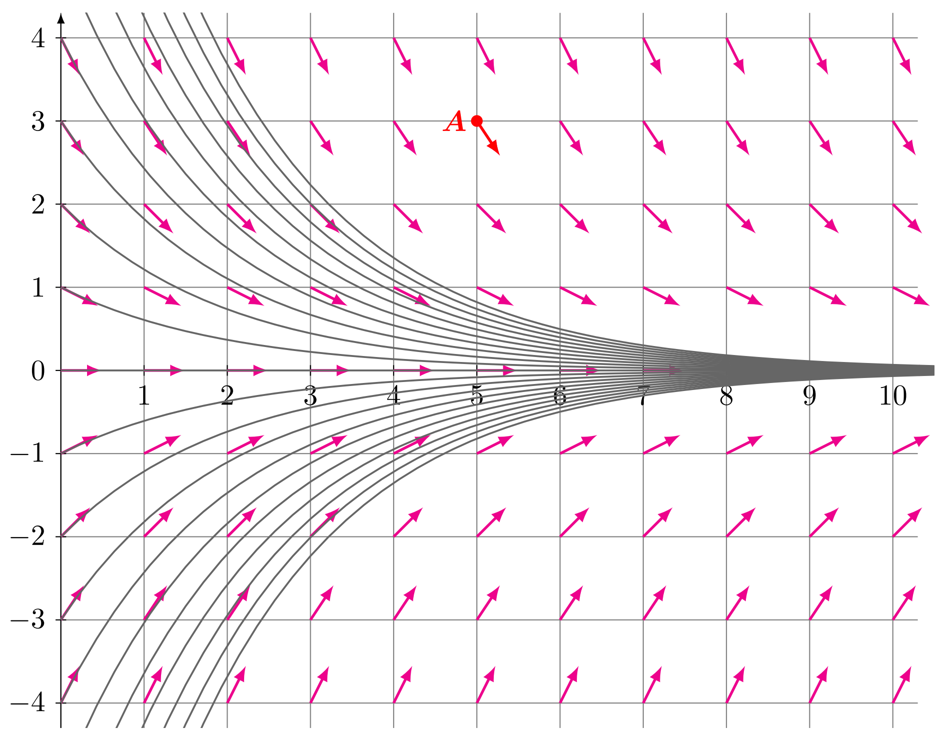
Etant donnée l'ED**H** : $y'(x) + ay(x) = 0$ où ....

- Sa solution .... est .... où
  - r est la solution de son ... quation ... aractéristique
  - $\lambda \in \mathbb{R}$
- Pour chaque point $A(x_0, y_0)$ du plan, il existe une unique solution passant par A appelée solution .... , notée .....

  Autrement dit, le système $\begin{cases} y'(x) + ay(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution .....

Exemple : On considère l'EDH $y' + 0,5y = 0$.

- Son EC est ....
- Sa solution générale est ....



- La solution particulière ... passant par le point $A(5, 3)$ vérifie ....

Exercice n° 3: Détermine la fonction y_A.

....

....

....

Exercice n° 4: Résous l'équation différentielle homogène $y' = 2y$, et détermine la solution particulière passant par le point $B(1, -3)$.

- Son EC est ....

- Sa solution générale est ....

- ....

  ....

  ....

  Conclusion : $y_B(x) =$ ....

Exercice n° 5: On considère l'équation différentielle homogène $y' + y = 0$.

1. Détermine sa solution générale.

   - Son EC est ....
   - Sa solution générale est ....

2. Trouve la solution particulière f vérifiant $f(1) = 0$.

   ....

   ....

   ....

3. Trouve la solution particulière g vérifiant $g'(0) = 1$.

   ....

   ....

   ....

2. Résolution d'une EDLH du premier ordre.

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

Théorème

- Sa solution .... est .... où

  - $r(x)$ est la solution de son Equation Caractéristique
  - $\lambda \in \mathbb{R}$

- Pour chaque point $A(x_0, y_0)$ du plan, il existe une unique solution passant par A appelée solution .... , notée ....

Exemple : On considère l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$.

- Son EC est .... donc ....
- On sait que $y_G(x) = \lambda e^{\int \ldots\ldots \, dx} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice n° 6: Détermine la solution particulière passant par le point $C(0, 2)$.

....

....

....

Exercice n° 7: On considère l'équation différentielle $xy' - 2y = 0$.

1. Détermine la solution générale de cette ED.

   ....

   ....

2. Détermine la solution passant par le point $A(1, 3)$.

   ....

   ....

   ....

Exercice n° 8: On considère l'équation différentielle $y' cos(x) + y \sin(x) = 0$.

1. Détermine la solution générale de cette ED.

   ....

   ....

   ....

   ....

2. Détermine la solution passant par le point $A(\pi, 3)$.

....

....

....

3. Résolution d'une EDL du premier ordre.

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

Théorème

Solution générale y_H l'équation homogène + **une solution particulière y_P de l'EDL** = **solution générale de l'EDL**

Démonstration

....

Ce procédé de superposition des solutions est propre aux E.D. ....

Exemple : Résolvons l'EDL : $y'(x) + 2xy(x) = x$

- L'EDH associée est .... On a vu que $y_H(x) =$ ....
- Il reste à trouver une solution y_P particulière de l'EDL.

  Pour ce faire, on applique la **M**éthode de la **V**ariation de la **C**onstante :

  Ce qui revient à chercher une solution particulière sous la forme :

  $$y_P(x) = \ \ldots\ \mathrm{e}^{-x^2}$$

  $y'_P(x) =$ ....

  $=$ ....

  On remplace dans l'EDL :

  ....

  ....

  ....

  La solution générale de l'EDL : $y'(x)+2xy(x) = x$ est $y(x) =$ ....

Remarque : Il n'y a pas de lettre « G » en indice pour la solution générale de l'EDL (.....................). On la réserve pour la solution générale de l'EDH associée.

Théorème de Cauchy

Etant donnés deux fonctions a et b continues sur $\mathbb{R}$, pour tout couple de réels (x_0, y_0) le système

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une .... solution.

Principe de superposition

Soient a, b_1, et b_2 trois fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

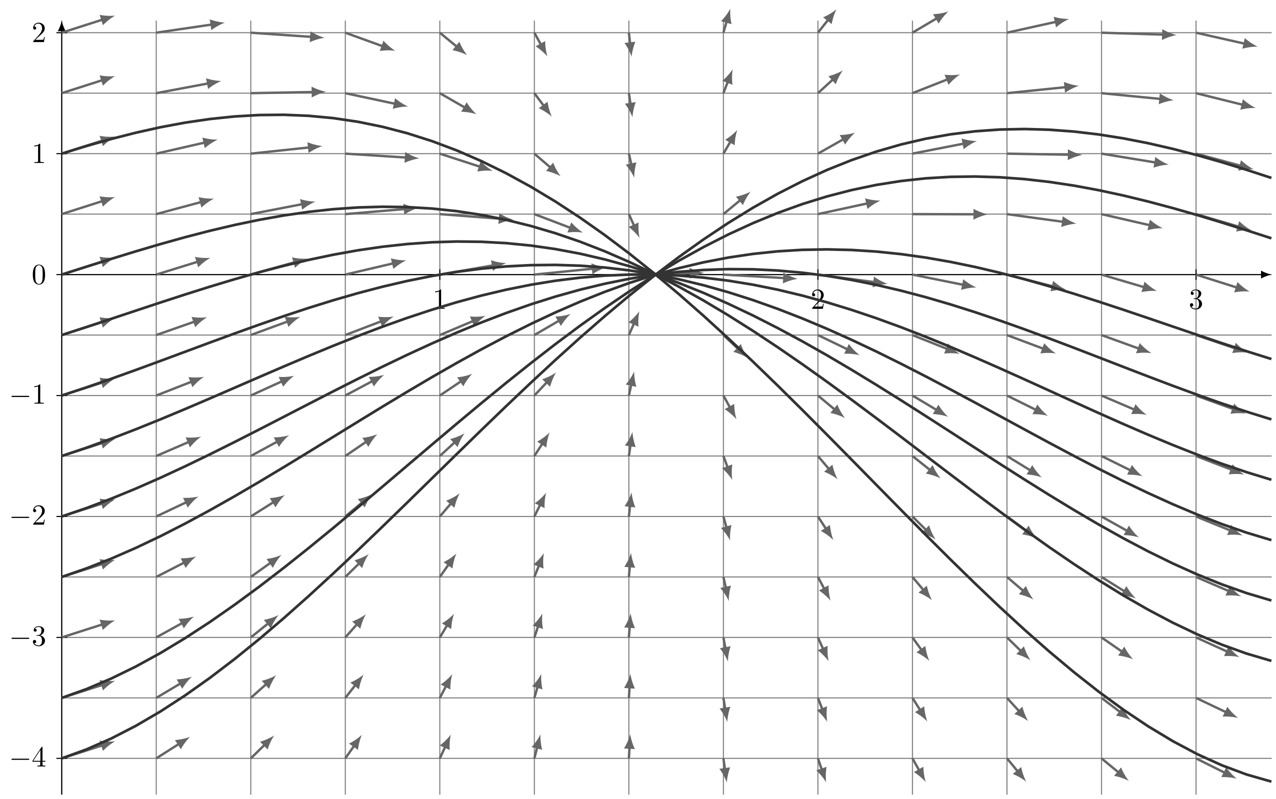
- Si ... est une solution particulière de $y' + a(x)y =$ ... ;
- si ... est une solution particulière de $y' + a(x)y =$ ...

Alors ... + ... est une solution particulière de $y' + a(x)y =$ ... + ...

Exercice n° 9: Résous l'EDL : $y'(x) - 3y(x) = 6$

Exercice n° 10: Etant donnée l'EDL : $y' \cos(x) + y \sin(x) = \cos^2(x)$ détermine :

1. Sa solution générale y_G.
2. Sa solution y_A passant par le point $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$



Mathématiques pour le technicien

TD de mathématiques n° 2 - Semestre 3
Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.

Exercice n° 1: Vérifie que $y_P(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ est une solution particulière de $y' + y = e^x$

Exercice n° 2: Résous les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = 0$
2. $y' = 2y$
3. $5y' + 2y = 0$
4. $\begin{cases} y' = 3y \\ y(0) = 2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

Exercice n° 3: En utilisant la méthode de la variation de la constante, résous les équations différentielles suivantes :

1. $y' = \frac{1}{2}y + e^x$
2. $y' + y = x$
3. $y' = \frac{1}{2}y + x$
4. $y' - y = e^x$
5. $\begin{cases} y' + 2y = 4x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Exercice n° 4: Résous les équations différentielles suivantes :

1. $y' - y = x + 1$ où une solution particulière est un polynôme du premier degré.
2. $y' + 3y = 9x^2 + 4$ où une solution particulière est un polynôme du second degré.
3. $y' + 2y = 5\cos(x)$ où $y_P(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ est une solution particulière.
4. $\begin{cases} y' - y = 3\cos(x) - \sin(x) \\ y(0) = 2 \end{cases}$ où $y_P(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ est une solution particulière.
5. $y' - y = 3\cos(x) - \sin(x) + x + 1$

Mathématiques pour le technicien

TD de mathématiques n° 3 - Semestre 3
Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

Rappel:

On note Δ le discriminant de l'EC associée : $r^2 + ar + b = 0$.
La solution générale de l'EDL est :

- **Si $\Delta > 0$:** $y(x) = A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x}$ où r_1, r_2 sont les racines de l'EC.
- **Si $\Delta = 0$:** $y(x) = (A + Bx)\mathrm{e}^{rx}$ où r est la racine de l'EC.
- **Si $\Delta < 0$:** $y(x) = \big(A\cos(dx) + B\sin(dx)\big)\mathrm{e}^{cx}$

  où les racines de l'EC sont de la forme $c \pm \mathrm{i}d$

Exercice n° 1: Résous les équation différentielles suivantes :

1. $y'' + 6y = 4y'$
2. $9y'' - 12y' + 4y = 0$
3. $y'' + 2y' = 3y$
4. $\begin{cases} y'' = 9y \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = -21 \end{cases}$
5. $\begin{cases} y'' + 5y = 4y' \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$

Rappel:

$y'' + ay' + by = c\mathrm{e}^{dx}$ admet une solution particulière de la forme :

- $x \longmapsto \alpha\mathrm{e}^{dx}$ si d n'est pas solution de l'EC ;
- $x \longmapsto \alpha x\mathrm{e}^{dx}$ si d est une solution simple de l'EC ;
- $x \longmapsto \alpha x^2\mathrm{e}^{dx}$ si d est une solution double de l'EC.

Exercice n° 2: Détermine la solution générale de l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{3x}$

Exercice n° 3: On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + y' - 6y = 9\mathrm{e}^{-x} + 10\mathrm{e}^{2x}$

1. Résous $y'' + y' - 6y = 0$. On notera y_H sa solution générale.
2. Résous $y'' + y' - 6y = 9\mathrm{e}^{-x}$.
3. Résous $y'' + y' - 6y = 10\mathrm{e}^{2x}$.
4. Déduis-en la solution générale de (E).

Exercice n° 4: Résous l'équation différentielle (E) : $y'' - 6y' + 8y = 85\sin(x)$ sachant qu'une solution particulière est de la forme $y_P(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$.

Exercice n° 5: Détermine la solution générale de l'équation différentielle $4y'' + 36y = 24y' + \mathrm{e}^{3x}$.

Mathématiques pour le technicien

TD de mathématiques n° 4 - Semestre 3
Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients non constants.

Rappel:
pour tout réel $a > 0$, et tout réel b, $a^b =$ ....

Exercice n° 1: Réécris sous forme exponentielle :

1. $5^6 =$ ....
2. $2^3 =$ ....
3. $7^x =$ ....
4. $\frac{1}{4^2} =$ ....
5. $\frac{1}{7^y} =$ ....
6. $\sqrt{7} =$ ....
7. $11^9 =$ ....
8. $\frac{1}{5^3} =$ ....

Exercice n° 2: Simplifie les expressions suivantes :

1. $\mathrm{e}^{0,5\ln(4)} =$ ....
2. $\mathrm{e}^{5\ln(3)} =$ ....
3. $\mathrm{e}^{-2\ln(3)} =$ ....
4. $\mathrm{e}^{-\ln(3)} =$ ....
5. $\mathrm{e}^{3\ln(4)} =$ ....
6. $\mathrm{e}^{-3\ln(4)} =$ ....

Rappel:

- La solution **générale** de l'équation différentielle $\boldsymbol{y'(x) + a(x)y(x) = 0}$ est

$$y(x) = \text{ .... où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Pour chaque point $\boldsymbol{A(x_0, y_0)}$ du plan, il existe une unique solution passant par $\boldsymbol{A}$ appelée solution **particulière**, notée .....

Exercice n° 3: Résous les équation différentielles suivantes :

1. $y' = \cos(x)y$
2. $y' + xy = 0$
3. $y' + \frac{y}{x} = 0$
4. $y' + \frac{2}{x}y = 0$
5. $y' = \tan(x)y$
6. $x^2y' - (1+x)y = 0$

Exercice n° 4: Résous les équation différentielles du premier ordre suivantes :

1. $x^2y' - y = 1$
2. $(x^2+2)y' + 2xy = 3x^2 + 1$
3. $\begin{cases} y' + x\exp(x^2) = \left(2x - \dfrac{1}{x}\right) y \\ y(2) = 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y'\sin(x) - y\cos(x) + \sin^2(x) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$

Exercice n° 5 (★★): On considère l'équation différentielle (E) : $xy'' + 2y' + xy = 0$

1. Démontre que la fonction $\varphi :]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est une solution de (E).
2. Détermine la solution générale de (E) sur $]0, \pi[$ en posant $z(x) = \dfrac{y(x)}{\varphi(x)}$.

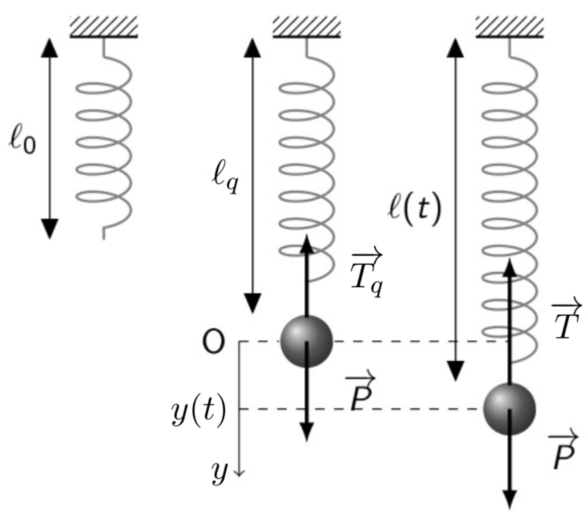
Mathématiques pour le technicien

TD de mathématiques n° 5 - Semestre 3
Compléments.

Exercice n° 1: Résous l'équation différentielle $x^2y'' - xy' = 3x^3$ sur $]0\,,\,+\infty[$.

1. Pourquoi serait-il judicieux de poser $z(x) = y'(x)$?
2. Résous cette équation différentielle.

Exercice n° 2: Oscillations verticales d'une masse accrochées à un ressort.



L'allongement du ressort en fonction du temps $y(t)$, est calculé par rapport à le position d'équilibre O.
Sur la figure, l'indice q indique la position d'équilibre, et $\vec{j}$ est le vecteur unité de l'axe Oy.

- La force de tension est $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{j}$ où k est la constante de raideur.
- Le poids est $\vec{P} = mg\vec{j}$
- $y(t) = \ell(t) - \ell_q$ où ℓ_q est la longueur du ressort à l'équilibre.
- ℓ_0 est la longueur au repos du ressort.

<u>Conditions initiales :</u> à $t = 0$, le ressort est étiré à la longueur $\ell_m \geqslant \ell_q$.

1. Démontre que l'équation différentielle obtenue en projetant l'équation fondamentale de la dynamique de Newton sur l'axes des abscisses est $y'' + \dfrac{k}{m}y = 0$.
2. Résous cette équation différentielle.

3. En utilisant les conditions initiales détermine les valeurs de A et de B.

4. Détermine l'équation du mouvement de la masse accrochée au ressort.

5. Détermine la période d'oscillation du ressort (durée pendant laquelle la masse fasse un aller-retour).

Mathématiques pour le technicien

TD de mathématiques n° 6 - Semestre 3
Un cosinus envoutant.

Exercice n° 1: Dans cette partie on considère les fonction f, c, et s définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad c(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad s(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

1. Etude de la fonction s :
   (a) Déterminer la fonction dérivée de s.
   (b) Etudier les limites de la fonction s en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (c) Construire le tableau de variations et de signes de la fonction s.

2. Déterminer la fonction dérivée c' de c et déduire de la question précédente le tableau de variations de la fonction c.

3. Démontrer que $c^2 = s^2 + 1$.

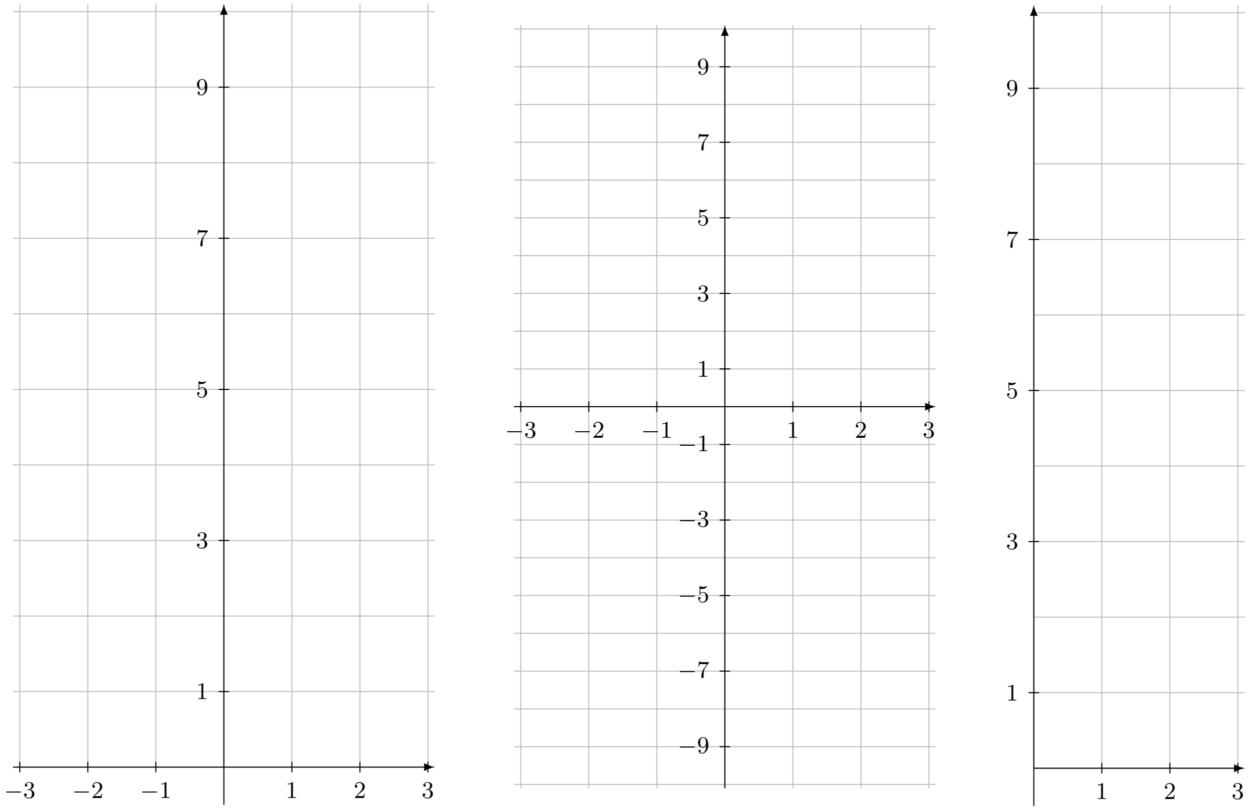
4. Simplifier $f \circ s$.

5. Simplifier $s \circ f$.

6. Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?

7. On note $\tilde{c}$ la restriction de la fonction c à l'intervalle $[0\,,\,+\infty[$.
   (a) Calcule $s(-x)$ et $c(-x)$. Qu'en déduit-on ?
   (b) Complète le tableau de valeurs, et trace les courbes représentatives des fonctions c, s et $\tilde{c}$.

x	0	1	2	3
$s(x)$				
$c(x)$				



(c) Trace la fonction $\tilde{c}$.

(d) Explique graphiquement pourquoi le fonction c n'est pas bijective alors que la fonction $\tilde{c}$ l'est.

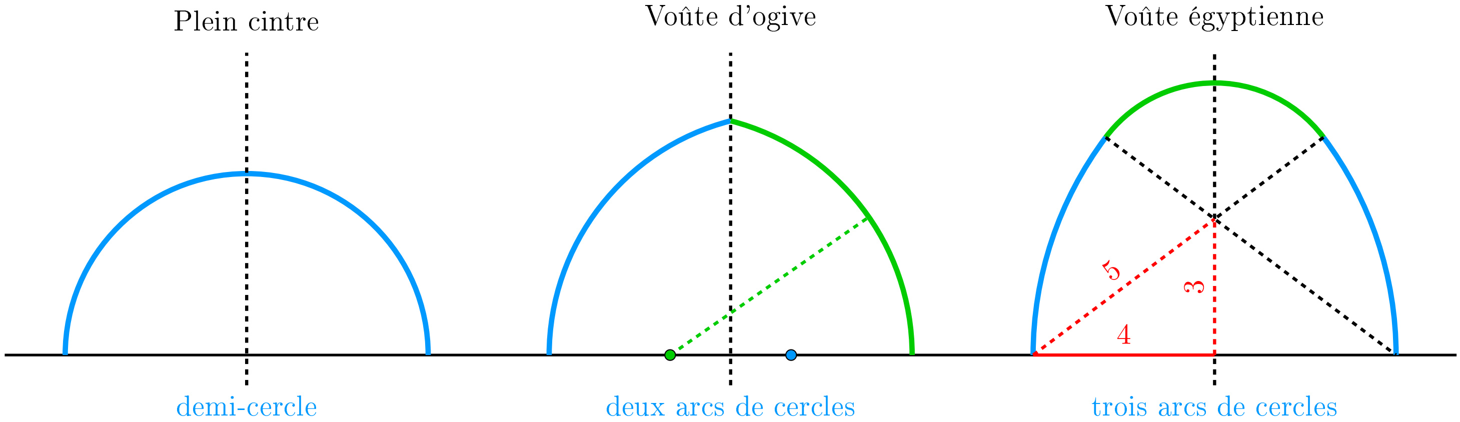
(e) En déduire la bijection réciproque de la fonction $\tilde{c}$.

La fonction c est appelée .... , notée **cosh**. La fonction s est appelée .... , notée **sinh**.

Application à l'optimisation des voûtes.

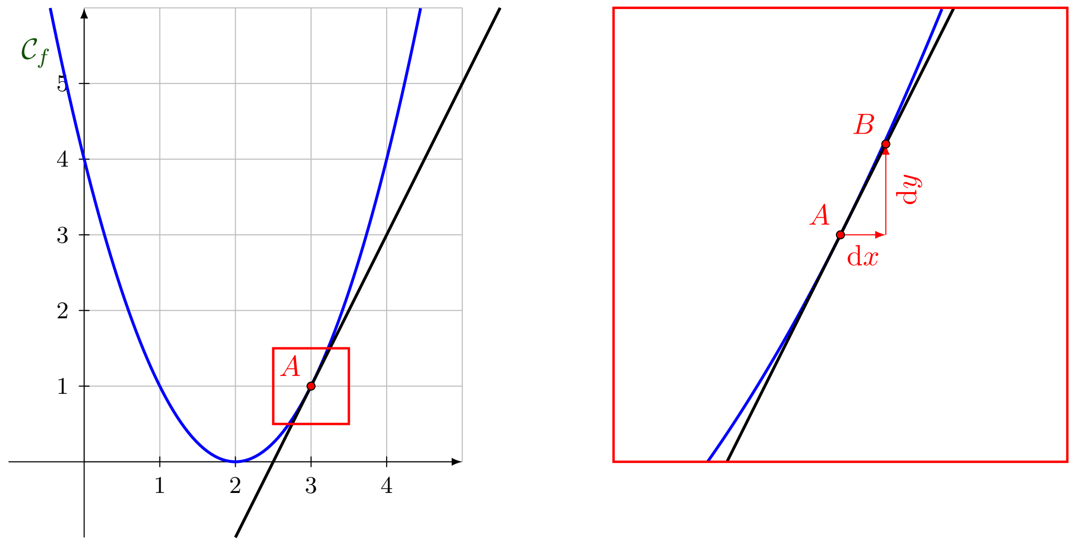
Une .... est la forme que prend librement une chaîne suspendue entre deux points. Cette courbe, mathématiquement, est le graphe d'un ....

Cette courbe, retournée, est la forme idéale pour une voûte. Aussi fine soit-elle, elle tient sans se déformer.
La plus mauvaise voûte est le plein cintre (un demi-cercle). Les constructeurs de cathédrales, au 13ème siècle ont trouvé un moyen de résoudre le problème posé par l'affaissement de la partie centrale des voûtes en plein cintre de l'époque romane : il suffit d'enlever cette partie et de rapprocher les deux restantes (style gothique). On obtient la voûte d'ogive (deux arcs de cercle) qui a permis de grandes portées et un allègement considérable. Les égyptiens anciens ont réalisé peu de voûtes. Ils avaient cependant trouvé une forme proche de la chaînette par un tracé comportant trois arcs de cercle.



L'objectif de l'exercice qui suit est de déterminer l'équation d'une voûte « parfaite ». Pour ce faire, nous aurons besoin d'un rappel de calcul différentiel :

Que signifie f est dérivable en $x = 3$? Cela revient à dire que, localement, autour du point A d'abscisse 3, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente. Ce qui signifie que $\mathcal{C}_f$ est « plate » au voisinage de A comme le montre l'exemple suivant :



Autrement dit, localement, on dit « au voisinage » du point A, la courbe $\mathcal{C}_f$ peut être assimilée à un petit segment (infinitésimal) de pente $f'(3)$.

Ainsi, $f'(3) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \quad .....$

- $\mathrm{d}y = ...$ signifie qu'au voisinage du point A une variation « infinitésimale » de x, notée $\mathrm{d}x$, entraîne une variation « infinitésimale » des y notée $\mathrm{d}y$ des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ qui est égale à $2\,\mathrm{d}x$.
- $\mathrm{d}x = ...$ signifie qu'au voisinage du point A une variation « infinitésimale » des ordonnées, $\mathrm{d}y$, entraîne une variation « infinitésimale » $\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y$ des abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$.
- Le petit morceau de courbe (infinitésimal), en les points A et B, peut-être assimilé au segment $[AB]$. Cette longueur infinitésimale, notée $\mathrm{d}\ell$, est celle du segment $[AB]$ donc :

  $$\mathrm{d}\ell^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \text{ soit } \mathrm{d}\ell = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \text{ et } \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

  Ainsi, $\boxed{\ell'(x) = \dfrac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + y'(x)^2}}$

$\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}f$ sont appelées des ....

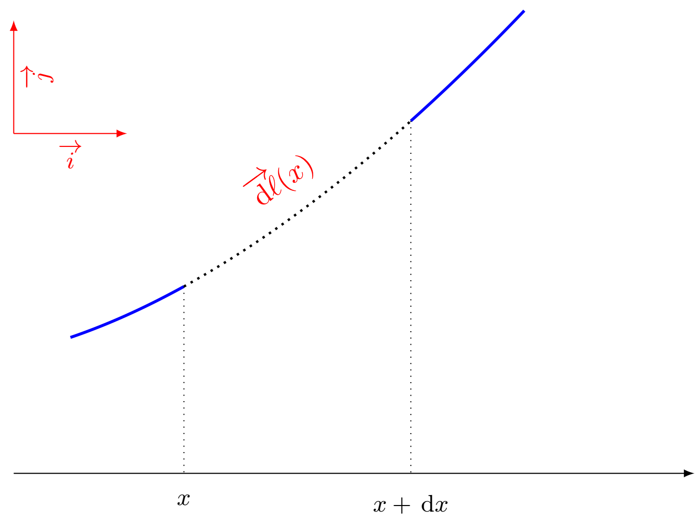
Détermination de l'équation différentielle de la chaînette.

On recherche une équation différentielle dont les solutions sont des fonctions y représentants des chaînettes.

On se place dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{j}$ est un vecteur vertical dirigé vers le haut (opposé au champ de pesanteur).

Nous découpons la chaînette en petits morceaux, chaque morceau étant compris entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. Ici $\mathrm{d}x$ désigne un réel aussi petit que l'on veut (infinitésimal). Nous noterons $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ le morceau infinitésimal de la chainette compris entre x et $x+\mathrm{d}x$, et $\mathrm{d}\ell$ sa longueur. Trois forces s'appliquent à notre mini-bout de chaînette :

- **Le poids** .... : c'est une force verticale, proportionnelle à la masse du morceau. Si μ est la masse linéique (la masse que ferait un mètre de chaîne, exprimée en kg/m), la masse de notre petit bout est $\mu\,\mathrm{d}\ell$, et son poids $\overrightarrow{P} = -P\overrightarrow{j} = -\mu\,\mathrm{d}\ell \times g\,\overrightarrow{j}$
- **La tension en $\boldsymbol{x}$**, ... : force tangente à la chaînette en x.
- **La tension en $\boldsymbol{x}+\mathbf{d}\boldsymbol{x}$**, ... : force tangente à la chaînette en $x+\mathrm{d}x$.

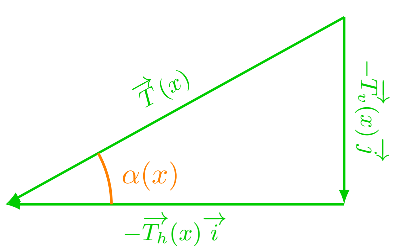


Notre chaîne étant en équilibre, le principe fondamental de la mécanique Newtonienne s'écrit :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$

Exercice n° 2:

1. Que nous apprend la première équation sur la tension horizontale T_h ?
2. On note $\alpha(x)$ l'angle représenté sur la figure ci-dessous :



   (a) Quel est le lien entre cet angle et y la courbe représentant la chaînette ?

   (b) Déduis-en l'égalité $y''(x) = \dfrac{T_v'(x)}{T_h}$

Exercice n° 3: La seconde équation : En utilisant le résultat de calcul différentiel : $\ell' = \sqrt{1+y'^2}$ démontre que $y'' = \dfrac{1}{a}\sqrt{1+y'}$ où $a = \dfrac{T_h}{\mu g}$.

La chaînette est la solution de l'équation différentielle .... où $a = \dfrac{T_h}{\mu g}$

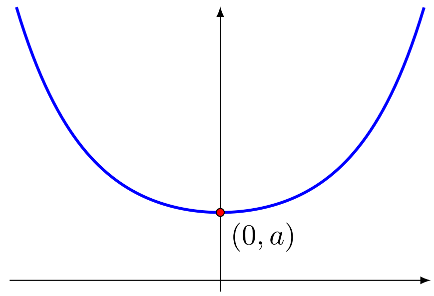
Il ne nous reste plus qu'à résoudre cette E.D :
Exercice n° 4:

1. En posant $z(x) = y'(x)$ démontre que résoudre cette E.D d'ordre 2, revient à résoudre une E.D d'ordre 1.

2. On pose $z(x) = \mathrm{sh}\big(u(x)\big)$
   (a) Détermine l'expression de z' en fonction de u et u'.
   (b) Détermine $u(x)$. On rappelle que $\mathrm{ch}^2(x) = 1 + \mathrm{sh}(x)^2$.
   (c) Détermine y

Exercice n° 5: On note $y(x) = a\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{a} + C_1\right) + C_2$. Détermine C_1 et C_2 pour que le sommet de la chaînette ait pour coordonnées $(0, a)$.

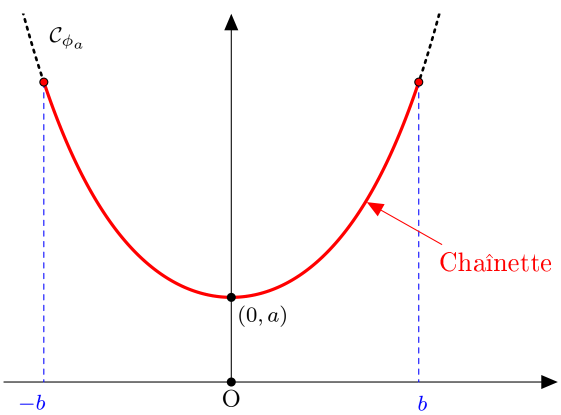
<u>Indications :</u> On pourra commencer par calculer $y'(0)$.



Proposition n° 1:
Etant donné une chaînette, dans tout repère orthonormé où l'axe des ordonnées est son axe de symétrie, la chaînette est la courbe représentative de la fonction .... où $a = \dfrac{T_h}{\mu g}$, μ étant la masse linéique (de la chaine, de la corde, ou du câble) et g l'intensité de la pesanteur.

$$\boxed{\textbf{Dorénavant, on se placera dans le repère où la chaînette est définie par } \boldsymbol{\phi_a(x) = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)}}$$

Proposition n° 2:
La demi-longueur ℓ de la portion de la chaînette de paramètre a comprise entre les abscisses $-b$ et b est ....



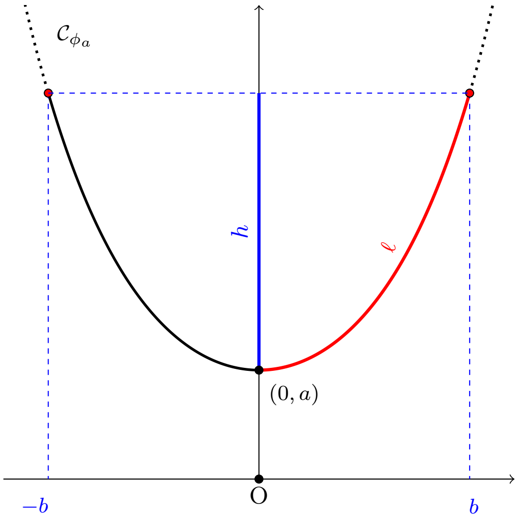
....

....

....

....

Proposition n° 3:
Pour une chaînette de demi-longueur ℓ et de flèche h on a : $a =$ ....



....

....

....

....

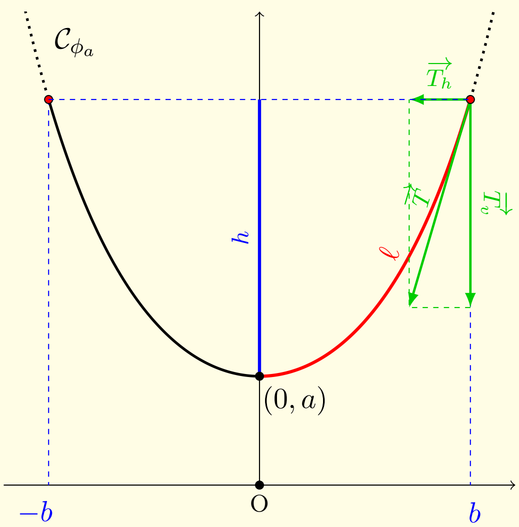
....

....

....

Proposition n° 4:

Etant donnée une chaînette définie par $\phi_a(x) = a\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ définie sur $[-b\,,\,b]$, h sa flèche, et ℓ sa demi-longueur.



- La tension .... T_h est constante et vaut :

$$Th = \text{......................}$$

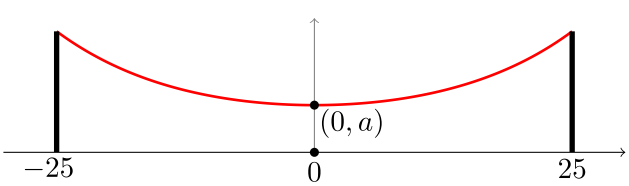
- La tension .... est : ....
- La tension totale est :

$T =$ ....

Exercice n° 6:

1. Que vaut la tension si la chaînette est rectiligne ?
2. Que vaut la tension si la longueur de la chaînette est infinie ?

Exercice n° 7:



Deux pylônes sont espacés de 50m. Quelle doit être la longueur en centimètres du fil joignant ces deux pylônes pour que la tension aux extrémités soit minimale ?

La résolution sera numérique, elle nécessitera l'usage de la calculatrice.