Exemple n° 1 : Considérons une application linéaire définie dans une base par la matrice
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale donc $\lambda =$

Exemple n° 1 : Considérons une application linéaire définie dans une base par la matrice
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale donc $\lambda = 2$;
- **Recherchons ses vecteurs propres :**

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dots \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

s'écrit $\begin{cases} (2 - \quad)x + y + 0z = 0 \\ 0x + (2 - \quad)y + 1z = 0 \\ 0x + 0y + (2 - \quad)z = 0 \end{cases}$

Exemple n° 1 : Considérons une application linéaire définie dans une base par la matrice
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale donc $\lambda = 2$;
- **Recherchons ses vecteurs propres :**

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

s'écrit $\begin{cases} (2 - \quad)x + y + 0z = 0 \\ 0x + (2 - \quad)y + 1z = 0 \\ 0x + 0y + (2 - \quad)z = 0 \end{cases}$

Exemple n° 1 : Considérons une application linéaire définie dans une base par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale donc $\lambda = 2$;
- **Recherchons ses vecteurs propres :**

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

s'écrit $\begin{cases} (2 - \mathbf{2})x + & y & + & 0z & = 0 \\ 0x & + (2 - \quad)y + & & 1z & = 0 \\ 0x & + & 0y & + (2 - \quad)z & = 0 \end{cases}$

Exemple n° 1 : Considérons une application linéaire définie dans une base par la matrice
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale donc $\lambda = 2$;
- **Recherchons ses vecteurs propres :**

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

s'écrit $\begin{cases} (2-\mathbf{2})x + & y & + & 0z & = 0 \\ 0x & + (2-\mathbf{2})y & + & 1z & = 0 \\ 0x & + & 0y & + (2- \quad)z & = 0 \end{cases}$

Exemple n° 1 : Considérons une application linéaire définie dans une base par la matrice
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale donc $\lambda = 2$;
- **Recherchons ses vecteurs propres :**

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

s'écrit $\left\{ \begin{array}{llll} (2-\mathbf{2})x + & y & + \quad 0z & = 0 \\ 0x & + (2-\mathbf{2})y + & 1z & = 0 \\ 0x & + \quad 0y & + (2-\mathbf{2})z & = 0 \end{array} \right.$

Exemple n° 1 : Considérons une application linéaire définie dans une base par la matrice
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale donc $\lambda = 2$;
- **Recherchons ses vecteurs propres :**

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

s'écrit $\begin{cases} (2-\mathbf{2})x + y + 0z = 0 \\ 0x + (2-\mathbf{2})y + 1z = 0 \\ 0x + 0y + (2-\mathbf{2})z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \\ z = \\ 0 = \end{cases}$ soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 : Considérons une application linéaire définie dans une base par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale donc $\lambda = 2$;
- **Recherchons ses vecteurs propres :**

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

s'écrit $\begin{cases} (2-\mathbf{2})x + y + 0z = 0 \\ 0x + (2-\mathbf{2})y + 1z = 0 \\ 0x + 0y + (2-\mathbf{2})z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ z = \\ 0 = \end{cases}$ soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 : Considérons une application linéaire définie dans une base par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale donc $\lambda = 2$;
- **Recherchons ses vecteurs propres :**

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

s'écrit $\begin{cases} (2-\mathbf{2})x + y + 0z = 0 \\ 0x + (2-\mathbf{2})y + 1z = 0 \\ 0x + 0y + (2-\mathbf{2})z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = \end{cases}$ soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 : Considérons une application linéaire définie dans une base par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale donc $\lambda = 2$;
- **Recherchons ses vecteurs propres :**

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

s'écrit $\begin{cases} (2-\mathbf{2})x + y + 0z = 0 \\ 0x + (2-\mathbf{2})y + 1z = 0 \\ 0x + 0y + (2-\mathbf{2})z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 : Considérons une application linéaire définie dans une base par la matrice
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale donc $\lambda = 2$;
- **Recherchons ses vecteurs propres :**

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

s'écrit $\begin{cases} (2-\mathbf{2})x + y + 0z = 0 \\ 0x + (2-\mathbf{2})y + 1z = 0 \\ 0x + 0y + (2-\mathbf{2})z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 : Considérons une application linéaire définie dans une base par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale donc $\lambda = 2$;
- **Recherchons ses vecteurs propres :**

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

s'écrit $\begin{cases} (2-\mathbf{2})x + y + 0z = 0 \\ 0x + (2-\mathbf{2})y + 1z = 0 \\ 0x + 0y + (2-\mathbf{2})z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 : Considérons une application linéaire définie dans une base par la matrice
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale donc $\lambda = 2$;
- **Recherchons ses vecteurs propres :**

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

s'écrit $\begin{cases} (2-\mathbf{2})x + y + 0z = 0 \\ 0x + (2-\mathbf{2})y + 1z = 0 \\ 0x + 0y + (2-\mathbf{2})z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exemple n° 1 : Considérons une application linéaire définie dans une base par la matrice
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale donc $\lambda = 2$;
- **Recherchons ses vecteurs propres :**

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

s'écrit $\begin{cases} (2-\mathbf{2})x + y + 0z = 0 \\ 0x + (2-\mathbf{2})y + 1z = 0 \\ 0x + 0y + (2-\mathbf{2})z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

L'application n'est pas diagonalisable car

Exemple n° 1 : Considérons une application linéaire définie dans une base par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale donc $\lambda = 2$;
- **Recherchons ses vecteurs propres :**

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

s'écrit $\begin{cases} (2-\mathbf{2})x + y + 0z = 0 \\ 0x + (2-\mathbf{2})y + 1z = 0 \\ 0x + 0y + (2-\mathbf{2})z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

L'application n'est pas diagonalisable car **on ne peut pas construire une base constituée de trois vecteurs avec un seul vecteur propre.**

Exemple n° 1 : Considérons une application linéaire définie dans une base par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- A est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale donc $\lambda = 2$;
- **Recherchons ses vecteurs propres :**

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

s'écrit $\begin{cases} (2-\mathbf{2})x + y + 0z = 0 \\ 0x + (2-\mathbf{2})y + 1z = 0 \\ 0x + 0y + (2-\mathbf{2})z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

L'application n'est pas diagonalisable car **on ne peut pas construire une base constituée de trois vecteurs avec un seul vecteur propre.**

Exercice n° 5: Pour chacune des applications linéaires de E suivantes :

i. détermine le polynôme caractéristique de l'application linéaire ;
ii. détermine ses valeurs propres réelles ;
iii. détermine les sous-espaces propres associés à chacune de ses valeurs propres réelles ;
iv. détermine si l'application linéaire est diagonalisable, et si elle l'est, détermine une base où sa matrice diagonale, et précise sa matrice dans cette base.

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $\text{mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$.
2. $E = \mathbb{R}^2$ et $\text{mat}(g) = \begin{pmatrix} 21 & 24 \\ -12 & -13 \end{pmatrix}$.
3. $E = \mathbb{R}^2$ et $\text{mat}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $E = \mathbb{R}^3$ et $\text{mat}(j) = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -2 \\ 9 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. $E = \mathbb{R}^3$ et $\text{mat}(k) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
6. $E = \mathbb{R}^2$ et $\text{mat}(r) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.