

Optimisation.

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

Lorsqu'on a une fonction ayant plusieurs variables, on peut la dérivées suivant chacune de ses variables :

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

Lorsqu'on a une fonction ayant plusieurs variables, on peut la dérivées suivant chacune de ses variables :

Exemple n° 1 : Considérons les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y) = x^3 + 2y - z^2 \text{ et } g(x, y, z) = 3x^2yz + 3.$$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

Lorsqu'on a une fonction ayant plusieurs variables, on peut la dérivées suivant chacune de ses variables :

Exemple n° 1 : Considérons les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y) = x^3 + 2y - z^2 \text{ et } g(x, y, z) = 3x^2yz + 3.$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \\ \frac{\partial g}{\partial x} = \\ \frac{\partial g}{\partial y} = \\ \frac{\partial g}{\partial z} = \end{array} \right.$$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

Lorsqu'on a une fonction ayant plusieurs variables, on peut la dérivées suivant chacune de ses variables :

Exemple n° 1 : Considérons les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y) = x^3 + 2y - z^2 \text{ et } g(x, y, z) = 3x^2yz + 3.$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \\ \frac{\partial g}{\partial x} = \\ \frac{\partial g}{\partial y} = \\ \frac{\partial g}{\partial z} = \end{array} \right.$$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

Lorsqu'on a une fonction ayant plusieurs variables, on peut la dérivées suivant chacune de ses variables :

Exemple n° 1 : Considérons les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y) = x^3 + 2y - z^2 \text{ et } g(x, y, z) = 3x^2yz + 3.$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \\ \frac{\partial g}{\partial x} = \\ \frac{\partial g}{\partial y} = \\ \frac{\partial g}{\partial z} = \end{array} \right.$$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

Lorsqu'on a une fonction ayant plusieurs variables, on peut la dérivées suivant chacune de ses variables :

Exemple n° 1 : Considérons les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y) = x^3 + 2y - z^2 \text{ et } g(x, y, z) = 3x^2yz + 3.$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{3x^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{2} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{-2z} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \end{array} \right.$$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

Lorsqu'on a une fonction ayant plusieurs variables, on peut la dérivées suivant chacune de ses variables :

Exemple n° 1 : Considérons les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y) = x^3 + 2y - z^2 \text{ et } g(x, y, z) = 3x^2yz + 3.$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{3x^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{2} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{-2z} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{6xyz} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \end{array} \right.$$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

Lorsqu'on a une fonction ayant plusieurs variables, on peut la dérivées suivant chacune de ses variables :

Exemple n° 1 : Considérons les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y) = x^3 + 2y - z^2 \text{ et } g(x, y, z) = 3x^2yz + 3.$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{3x^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{2} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{-2z} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{6xyz} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{3x^2z} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \end{array} \right.$$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

Lorsqu'on a une fonction ayant plusieurs variables, on peut la dérivées suivant chacune de ses variables :

Exemple n° 1 : Considérons les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y) = x^3 + 2y - z^2 \text{ et } g(x, y, z) = 3x^2yz + 3.$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{3x^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{2} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{-2z} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{6xyz} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{3x^2z} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \mathbf{3x^2y} \end{array} \right.$$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

Lorsqu'on a une fonction ayant plusieurs variables, on peut la dérivées suivant chacune de ses variables :

Exemple n° 1 : Considérons les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y) = x^3 + 2y - z^2 \text{ et } g(x, y, z) = 3x^2yz + 3.$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{3x^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{2} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{-2z} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{6xyz} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{3x^2z} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \mathbf{3x^2y} \end{array} \right.$$

Exemple n° 2 :

- $\frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial x} = \dots\dots\dots$
- $\frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial y} = \dots\dots\dots$
- $\frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial z} = \dots\dots\dots$
- $\frac{\partial(x^4 - 4y^5)}{\partial y} = \dots\dots\dots$
- $\frac{\partial(5a^2 - b^2a^3)}{\partial b} = \dots\dots\dots$
- $\frac{\partial(1 - abc - a^4)}{\partial a} = \dots\dots\dots$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

Lorsqu'on a une fonction ayant plusieurs variables, on peut la dériver suivant chacune de ses variables :

Exemple n° 1 : Considérons les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y) = x^3 + 2y - z^2 \text{ et } g(x, y, z) = 3x^2yz + 3.$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{3x^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{2} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{-2z} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{6xyz} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{3x^2z} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \mathbf{3x^2y} \end{array} \right.$$

Exemple n° 2 :

- $\frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial x} = \mathbf{2xy^2 - y}$
- $\frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial y} = \dots\dots\dots$
- $\frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial z} = \dots\dots\dots$
- $\frac{\partial(x^4 - 4y^5)}{\partial y} = \dots\dots\dots$
- $\frac{\partial(5a^2 - b^2a^3)}{\partial b} = \dots\dots\dots$
- $\frac{\partial(1 - abc - a^4)}{\partial a} = \dots\dots\dots$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

Lorsqu'on a une fonction ayant plusieurs variables, on peut la dériver suivant chacune de ses variables :

Exemple n° 1 : Considérons les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y) = x^3 + 2y - z^2 \text{ et } g(x, y, z) = 3x^2yz + 3.$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{3x^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{2} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{-2z} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{6xyz} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{3x^2z} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \mathbf{3x^2y} \end{array} \right.$$

Exemple n° 2 :

- $\frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial x} = \mathbf{2xy^2 - y}$
- $\frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial y} = \mathbf{2x^2y - x}$
- $\frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial z} = \dots\dots\dots$
- $\frac{\partial(x^4 - 4y^5)}{\partial y} = \dots\dots\dots$
- $\frac{\partial(5a^2 - b^2a^3)}{\partial b} = \dots\dots\dots$
- $\frac{\partial(1 - abc - a^4)}{\partial a} = \dots\dots\dots$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

Lorsqu'on a une fonction ayant plusieurs variables, on peut la dériver suivant chacune de ses variables :

Exemple n° 1 : Considérons les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y) = x^3 + 2y - z^2 \text{ et } g(x, y, z) = 3x^2yz + 3.$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{3x^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{2} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{-2z} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{6xyz} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{3x^2z} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \mathbf{3x^2y} \end{array} \right.$$

Exemple n° 2 :

$$\bullet \frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial x} = \mathbf{2xy^2 - y}$$

$$\bullet \frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial y} = \mathbf{2x^2y - x}$$

$$\bullet \frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial z} = \mathbf{0}$$

$$\bullet \frac{\partial(x^4 - 4y^5)}{\partial y} = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \frac{\partial(5a^2 - b^2a^3)}{\partial b} = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \frac{\partial(1 - abc - a^4)}{\partial a} = \dots\dots\dots$$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

Lorsqu'on a une fonction ayant plusieurs variables, on peut la dérivées suivant chacune de ses variables :

Exemple n° 1 : Considérons les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y) = x^3 + 2y - z^2 \text{ et } g(x, y, z) = 3x^2yz + 3.$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{3x^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{2} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{-2z} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{6xyz} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{3x^2z} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \mathbf{3x^2y} \end{array} \right.$$

Exemple n° 2 :

$$\bullet \frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial x} = \mathbf{2xy^2 - y}$$

$$\bullet \frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial y} = \mathbf{2x^2y - x}$$

$$\bullet \frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial z} = \mathbf{0}$$

$$\bullet \frac{\partial(x^4 - 4y^5)}{\partial y} = \mathbf{4x^3}$$

$$\bullet \frac{\partial(5a^2 - b^2a^3)}{\partial b} = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \frac{\partial(1 - abc - a^4)}{\partial a} = \dots\dots\dots$$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

Lorsqu'on a une fonction ayant plusieurs variables, on peut la dériver suivant chacune de ses variables :

Exemple n° 1 : Considérons les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y) = x^3 + 2y - z^2 \text{ et } g(x, y, z) = 3x^2yz + 3.$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{3x^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{2} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{-2z} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{6xyz} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{3x^2z} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \mathbf{3x^2y} \end{array} \right.$$

Exemple n° 2 :

$$\bullet \frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial x} = \mathbf{2xy^2 - y}$$

$$\bullet \frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial y} = \mathbf{2x^2y - x}$$

$$\bullet \frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial z} = \mathbf{0}$$

$$\bullet \frac{\partial(x^4 - 4y^5)}{\partial y} = \mathbf{4x^3}$$

$$\bullet \frac{\partial(5a^2 - b^2a^3)}{\partial b} = \mathbf{-2ba^3}$$

$$\bullet \frac{\partial(1 - abc - a^4)}{\partial a} = \dots\dots\dots$$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

Lorsqu'on a une fonction ayant plusieurs variables, on peut la dériver suivant chacune de ses variables :

Exemple n° 1 : Considérons les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y) = x^3 + 2y - z^2 \text{ et } g(x, y, z) = 3x^2yz + 3.$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{3x^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{2} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{-2z} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \mathbf{6xyz} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \mathbf{3x^2z} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \mathbf{3x^2y} \end{array} \right.$$

Exemple n° 2 :

$$\bullet \frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial x} = \mathbf{2xy^2 - y}$$

$$\bullet \frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial y} = \mathbf{2x^2y - x}$$

$$\bullet \frac{\partial(x^2y^2 - yx + 2)}{\partial z} = \mathbf{0}$$

$$\bullet \frac{\partial(x^4 - 4y^5)}{\partial y} = \mathbf{4x^3}$$

$$\bullet \frac{\partial(5a^2 - b^2a^3)}{\partial b} = \mathbf{-2ba^3}$$

$$\bullet \frac{\partial(1 - abc - a^4)}{\partial a} = \mathbf{-bc - 4a^3}$$

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial a} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right) = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial c} \right) = \dots\dots\dots$$

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial a} = 2ab - c^2b$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right) = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial c} \right) = \dots\dots\dots$$

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial a} = 2ab - c^2b$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right) = 2b$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial c} \right) = \dots\dots\dots$$

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial a} = 2ab - c^2b$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = -2abc$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right) = 2b$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial c} \right) = \dots\dots\dots$$

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial a} = 2ab - c^2b$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = -2abc$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right) = 2b$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial c} \right) = \frac{\partial(-2abc)}{\partial a} = -2bc$$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial a} = 2ab - c^2b$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = -2abc$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right) = 2b$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial c} \right) = \frac{\partial(-2abc)}{\partial a} = -2bc$$



$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)$ est notée $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}$, et appelée la **dérivée seconde de f par rapport à a** .

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial a} = 2ab - c^2b$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = -2abc$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right) = 2b$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial c} \right) = \frac{\partial(-2abc)}{\partial a} = -2bc$$



$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)$ est notée $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}$, et appelée la **dérivée seconde de f par rapport à a** .

$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial c} \right)$ est notée $\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial c}$, et appelée la **dérivée seconde de f par rapport à c puis à a** .

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial a} = 2ab - c^2b$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = -2abc$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right) = 2b$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial c} \right) = \frac{\partial(-2abc)}{\partial a} = -2bc$$



$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)$ est notée $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}$, et appelée la **dérivée seconde de f par rapport à a** .

$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial c} \right)$ est notée $\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial c}$, et appelée la **dérivée seconde de f par rapport à c puis à a** .

Remarque : Dans l'expression $\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}$, on dérive en premier par rapport à la variable la plus à droite au dénominateur.

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{\partial(\quad)}{\partial b} =$

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial b} =$$

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial b} = 2d^3$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial d^2} = \frac{\partial(\quad)}{\partial d} =$

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial b} = 2d^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial d^2} = \frac{\partial(3b^2d^2)}{\partial d} =$$

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial b} = 2d^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial d^2} = \frac{\partial(3b^2d^2)}{\partial d} = 6b^2d$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = \frac{\partial(\quad)}{\partial c} =$$

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial b} = 2d^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial d^2} = \frac{\partial(3b^2d^2)}{\partial d} = 6b^2d$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = \frac{\partial(-2acb)}{\partial c} =$$

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial b} = 2d^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial d^2} = \frac{\partial(3b^2d^2)}{\partial d} = 6b^2d$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = \frac{\partial(-2acb)}{\partial c} = -2ab$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = \frac{\partial(\quad)}{\partial a} =$$

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial b} = 2d^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial d^2} = \frac{\partial(3b^2d^2)}{\partial d} = 6b^2d$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = \frac{\partial(-2acb)}{\partial c} = -2ab$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial a} =$$

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial b} = 2d^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial d^2} = \frac{\partial(3b^2d^2)}{\partial d} = 6b^2d$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = \frac{\partial(-2acb)}{\partial c} = -2ab$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial a} = 2a - c^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial c \partial a} = \frac{\partial(\quad)}{\partial c} =$$

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial b} = 2d^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial d^2} = \frac{\partial(3b^2d^2)}{\partial d} = 6b^2d$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = \frac{\partial(-2acb)}{\partial c} = -2ab$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial a} = 2a - c^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial c \partial a} = \frac{\partial(2ab - bc^2)}{\partial c} =$$

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial b} = 2d^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial d^2} = \frac{\partial(3b^2d^2)}{\partial d} = 6b^2d$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = \frac{\partial(-2acb)}{\partial c} = -2ab$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial a} = 2a - c^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial c \partial a} = \frac{\partial(2ab - bc^2)}{\partial c} = -2bc$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} = \frac{\partial(\quad)}{\partial b} =$$

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial b} = 2d^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial d^2} = \frac{\partial(3b^2d^2)}{\partial d} = 6b^2d$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = \frac{\partial(-2acb)}{\partial c} = -2ab$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial a} = 2a - c^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial c \partial a} = \frac{\partial(2ab - bc^2)}{\partial c} = -2bc$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} = \frac{\partial(2ab - bc^2)}{\partial b} =$$

Exemple n° 3 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^4 par $f(a, b, c, d) = a^2b - abc^2 + b^2d^3$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial b} = 2d^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial d^2} = \frac{\partial(3b^2d^2)}{\partial d} = 6b^2d$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = \frac{\partial(-2acb)}{\partial c} = -2ab$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial a} = 2a - c^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial c \partial a} = \frac{\partial(2ab - bc^2)}{\partial c} = -2bc$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} = \frac{\partial(2ab - bc^2)}{\partial b} = 2a - c^2$$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial b} = 2d^3$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial d^2} = \frac{\partial(3b^2d^2)}{\partial d} = 6b^2d$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = \frac{\partial(-2acb)}{\partial c} = -2ab$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial a} = 2a - c^2$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial c \partial a} = \frac{\partial(2ab - bc^2)}{\partial c} = -2bc$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} = \frac{\partial(2ab - bc^2)}{\partial b} = 2a - c^2$



Théorème de Schwarz

Si f a ses dérivées secondes par rapport à x continues, et ses dérivées secondes par rapport à y continues, alors : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial b} = 2d^3$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial d^2} = \frac{\partial(3b^2d^2)}{\partial d} = 6b^2d$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = \frac{\partial(-2acb)}{\partial c} = -2ab$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = \frac{\partial(a^2 - ac^2 + 2bd^3)}{\partial a} = 2a - c^2$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial c \partial a} = \frac{\partial(2ab - bc^2)}{\partial c} = -2bc$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} = \frac{\partial(2ab - bc^2)}{\partial b} = 2a - c^2$



Théorème de Schwarz

Si f a ses dérivées secondes par rapport à x continues, et ses dérivées secondes par rapport

à y continues, alors : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

1. Gradient d'une fonction à deux variables.



Définition:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles.

1. Gradient d'une fonction à deux variables.



Définition:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles. Le **gradient** de f en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, noté $\text{grad}f(x)$, est le vecteur :

1. Gradient d'une fonction à deux variables.



Définition:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles. Le **gradient** de f en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, noté $\text{grad}f(x)$, est le vecteur :

$$\text{grad}f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

1. Gradient d'une fonction à deux variables.



Définition:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles. Le **gradient** de f en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, noté $\text{grad}f(x)$, est le vecteur :

$$\text{grad}f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Les physiciens et les anglo-saxons notent souvent $\vec{\nabla}f(x)$ ou $\nabla f(x)$ pour $\text{grad}f(x)$.

1. Gradient d'une fonction à deux variables.



Définition:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles. Le **gradient** de f en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, noté $\text{grad}f(x)$, est le vecteur :

$$\text{grad}f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Les physiciens et les anglo-saxons notent souvent $\vec{\nabla}f(x)$ ou $\nabla f(x)$ pour $\text{grad}f(x)$. Le symbole ∇ se lit « nabla ».

Exemple n° 4 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x - y, \quad g(x, y) = x^3 y^2, \quad h(x, y) = x^2 - y^2 + 3$$

$$k(x, y) = x^2 + 3y^2 + xy, \quad \ell(x, y) = 1 + 4y^3 - 5x^2 y, \quad \text{et } m(a, b) = a^2 b + ab^2$$

Exemple n° 4 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x - y, \quad g(x, y) = x^3y^2, \quad h(x, y) = x^2 - y^2 + 3$$

$$k(x, y) = x^2 + 3y^2 + xy, \quad \ell(x, y) = 1 + 4y^3 - 5x^2y, \quad \text{et } m(a, b) = a^2b + ab^2$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}f(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}k(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}g(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}\ell(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}h(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}m(a, b) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

Exemple n° 4 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x - y, \quad g(x, y) = x^3y^2, \quad h(x, y) = x^2 - y^2 + 3$$

$$k(x, y) = x^2 + 3y^2 + xy, \quad \ell(x, y) = 1 + 4y^3 - 5x^2y, \quad \text{et } m(a, b) = a^2b + ab^2$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}k(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}g(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}\ell(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}h(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}m(a, b) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

Exemple n° 4 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x - y, \quad g(x, y) = x^3y^2, \quad h(x, y) = x^2 - y^2 + 3$$

$$k(x, y) = x^2 + 3y^2 + xy, \quad \ell(x, y) = 1 + 4y^3 - 5x^2y, \quad \text{et } m(a, b) = a^2b + ab^2$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}k(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}g(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}\ell(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}h(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}m(a, b) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

Exemple n° 4 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x - y, \quad g(x, y) = x^3 y^2, \quad h(x, y) = x^2 - y^2 + 3$$

$$k(x, y) = x^2 + 3y^2 + xy, \quad \ell(x, y) = 1 + 4y^3 - 5x^2 y, \quad \text{et } m(a, b) = a^2 b + ab^2$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla} k(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla} g(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 y^2 \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla} \ell(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla} h(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla} m(a, b) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

Exemple n° 4 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x - y, \quad g(x, y) = x^3y^2, \quad h(x, y) = x^2 - y^2 + 3$$

$$k(x, y) = x^2 + 3y^2 + xy, \quad \ell(x, y) = 1 + 4y^3 - 5x^2y, \quad \text{et } m(a, b) = a^2b + ab^2$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}k(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}g(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 \\ 2x^3y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}\ell(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}h(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}m(a, b) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

Exemple n° 4 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x - y, \quad g(x, y) = x^3 y^2, \quad h(x, y) = x^2 - y^2 + 3$$

$$k(x, y) = x^2 + 3y^2 + xy, \quad \ell(x, y) = 1 + 4y^3 - 5x^2 y, \quad \text{et } m(a, b) = a^2 b + ab^2$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla} k(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla} g(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 y^2 \\ 2x^3 y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla} \ell(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla} h(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla} m(a, b) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

Exemple n° 4 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x - y, \quad g(x, y) = x^3y^2, \quad h(x, y) = x^2 - y^2 + 3$$

$$k(x, y) = x^2 + 3y^2 + xy, \quad \ell(x, y) = 1 + 4y^3 - 5x^2y, \quad \text{et } m(a, b) = a^2b + ab^2$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}k(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}g(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 \\ 2x^3y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}\ell(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}h(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}m(a, b) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

Exemple n° 4 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x - y, \quad g(x, y) = x^3y^2, \quad h(x, y) = x^2 - y^2 + 3$$

$$k(x, y) = x^2 + 3y^2 + xy, \quad \ell(x, y) = 1 + 4y^3 - 5x^2y, \quad \text{et } m(a, b) = a^2b + ab^2$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}k(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}g(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 \\ 2x^3y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}\ell(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}h(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}m(a, b) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

Exemple n° 4 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x - y, \quad g(x, y) = x^3y^2, \quad h(x, y) = x^2 - y^2 + 3$$

$$k(x, y) = x^2 + 3y^2 + xy, \quad \ell(x, y) = 1 + 4y^3 - 5x^2y, \quad \text{et } m(a, b) = a^2b + ab^2$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}k(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 6y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}g(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 \\ 2x^3y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}\ell(x, y) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}h(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}m(a, b) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

Exemple n° 4 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x - y, \quad g(x, y) = x^3y^2, \quad h(x, y) = x^2 - y^2 + 3$$

$$k(x, y) = x^2 + 3y^2 + xy, \quad \ell(x, y) = 1 + 4y^3 - 5x^2y, \quad \text{et } m(a, b) = a^2b + ab^2$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}k(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 6y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}g(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 \\ 2x^3y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}\ell(x, y) = \begin{pmatrix} -10xy \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}h(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}m(a, b) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

Exemple n° 4 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x - y, \quad g(x, y) = x^3y^2, \quad h(x, y) = x^2 - y^2 + 3$$

$$k(x, y) = x^2 + 3y^2 + xy, \quad \ell(x, y) = 1 + 4y^3 - 5x^2y, \quad \text{et } m(a, b) = a^2b + ab^2$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}k(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 6y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}g(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 \\ 2x^3y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}\ell(x, y) = \begin{pmatrix} -10xy \\ -5x^2 + 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}h(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}m(a, b) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

Exemple n° 4 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x - y, \quad g(x, y) = x^3y^2, \quad h(x, y) = x^2 - y^2 + 3$$

$$k(x, y) = x^2 + 3y^2 + xy, \quad \ell(x, y) = 1 + 4y^3 - 5x^2y, \quad \text{et } m(a, b) = a^2b + ab^2$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}k(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 6y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}g(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 \\ 2x^3y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}\ell(x, y) = \begin{pmatrix} -10xy \\ -5x^2 + 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}h(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}m(a, b) = \begin{pmatrix} b^2 + 2ab \end{pmatrix}$$

Exemple n° 4 : Détermine les gradients de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x - y, \quad g(x, y) = x^3y^2, \quad h(x, y) = x^2 - y^2 + 3$$

$$k(x, y) = x^2 + 3y^2 + xy, \quad \ell(x, y) = 1 + 4y^3 - 5x^2y, \quad \text{et } m(a, b) = a^2b + ab^2$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}k(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 6y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}g(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 \\ 2x^3y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}\ell(x, y) = \begin{pmatrix} -10xy \\ -5x^2 + 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}h(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{\nabla}m(a, b) = \begin{pmatrix} b^2 + 2ab \\ a^2 + 2ab \end{pmatrix}$$

2. Hessienne d'une fonction à deux variables.



Définition:

Si une fonction réelle f de deux variables réelles admet des dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et y , on appelle **matrice hessienne** de f en (x, y) la matrice :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

2. Hessienne d'une fonction à deux variables.



Définition:

Si une fonction réelle f de deux variables réelles admet des dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et y , on appelle **matrice hessienne** de f en (x, y) la matrice :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2y^2 - y^4$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dots\dots\dots$$

2. Hessienne d'une fonction à deux variables.



Définition:

Si une fonction réelle f de deux variables réelles admet des dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et y , on appelle **matrice hessienne** de f en (x, y) la matrice :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2y^2 - y^4$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dots\dots\dots$$

2. Hessienne d'une fonction à deux variables.



Définition:

Si une fonction réelle f de deux variables réelles admet des dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et y , on appelle **matrice hessienne** de f en (x, y) la matrice :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2y^2 - y^4$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 4y^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dots\dots\dots$$

2. Hessienne d'une fonction à deux variables.



Définition:

Si une fonction réelle f de deux variables réelles admet des dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et y , on appelle **matrice hessienne** de f en (x, y) la matrice :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2y^2 - y^4$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 4y^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dots\dots\dots$$

2. Hessienne d'une fonction à deux variables.



Définition:

Si une fonction réelle f de deux variables réelles admet des dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et y , on appelle **matrice hessienne** de f en (x, y) la matrice :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2y^2 - y^4$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 4y^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 12y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dots\dots\dots$$

2. Hessienne d'une fonction à deux variables.



Définition:

Si une fonction réelle f de deux variables réelles admet des dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et y , on appelle **matrice hessienne** de f en (x, y) la matrice :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2y^2 - y^4$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 4y^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 12y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dots\dots\dots$$

2. Hessienne d'une fonction à deux variables.



Définition:

Si une fonction réelle f de deux variables réelles admet des dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et y , on appelle **matrice hessienne** de f en (x, y) la matrice :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Exemple n° 5 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2y^2 - y^4$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 4y^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 12y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy$$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 4y^3$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 12y^2$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 4y^3$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 12y^2$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy$

Donc, la hessienne est : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \end{pmatrix}$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 4y^3$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 12y^2$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy$

Donc, la hessienne est : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 2y^2 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \end{pmatrix}$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 4y^3$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 12y^2$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy$

Donc, la hessienne est : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2y^2 \\ 4xy \\ 2x^2 - 12y^2 \end{pmatrix}$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 4y^3$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 12y^2$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy$

Donc, la hessienne est : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \left(\begin{matrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & \end{matrix} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} & & \end{matrix}$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 4y^3$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 12y^2$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy$

Donc, la hessienne est : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \left(\begin{array}{cc} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 - 12y^2 \end{array} \right) \end{matrix}$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 4y^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 12y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy$$

Donc, la hessienne est : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 - 12y^2 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \end{matrix}$

Exemple n° 6 : Considérons la fonction g définie sur \mathbb{R}^2 par $g(x, y) = x^3y - 6x + y^2$, on a :

$$\vec{\nabla}g(x, y) = \left(\quad \quad \right) \quad \text{et} \quad \nabla^2(g)(x, y) = \left(\quad \quad \right)$$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 4y^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 12y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy$$

Donc, la hessienne est : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 - 12y^2 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \end{matrix}$

Exemple n° 6 : Considérons la fonction g définie sur \mathbb{R}^2 par $g(x, y) = x^3y - 6x + y^2$, on a :

$$\vec{\nabla}g(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y - 6 \\ \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2(g)(x, y) = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 4y^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 12y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy$$

Donc, la hessienne est : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \left(\begin{matrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 - 12y^2 \end{matrix} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} & & \end{matrix}$

Exemple n° 6 : Considérons la fonction g définie sur \mathbb{R}^2 par $g(x, y) = x^3y - 6x + y^2$, on a :

$$\vec{\nabla}g(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y - 6 \\ x^3 + 2y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2(g)(x, y) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 4y^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 12y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy$$

Donc, la hessienne est : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 - 12y^2 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \end{matrix}$

Exemple n° 6 : Considérons la fonction g définie sur \mathbb{R}^2 par $g(x, y) = x^3y - 6x + y^2$, on a :

$$\vec{\nabla}g(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y - 6 \\ x^3 + 2y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2(g)(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy & \\ & \end{pmatrix}$$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 4y^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 12y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy$$

Donc, la hessienne est : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \left(\begin{array}{cc} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 - 12y^2 \end{array} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} & & \end{matrix}$

Exemple n° 6 : Considérons la fonction g définie sur \mathbb{R}^2 par $g(x, y) = x^3y - 6x + y^2$, on a :

$$\vec{\nabla}g(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y - 6 \\ x^3 + 2y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2(g)(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy & \\ & 3x^2 \end{pmatrix}$$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 4y^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 12y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy$$

Donc, la hessienne est : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 - 12y^2 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{matrix}$

Exemple n° 6 : Considérons la fonction g définie sur \mathbb{R}^2 par $g(x, y) = x^3y - 6x + y^2$, on a :

$$\vec{\nabla}g(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y - 6 \\ x^3 + 2y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2(g)(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 \\ 3x^2 & 2 \end{pmatrix}$$

I. Dérivées partielles et calcul différentiel.

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 4y^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 12y^2$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy$$

Donc, la hessienne est : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 - 12y^2 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \end{matrix}$

Exemple n° 6 : Considérons la fonction g définie sur \mathbb{R}^2 par $g(x, y) = x^3y - 6x + y^2$, on a :

$$\vec{\nabla}g(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y - 6 \\ x^3 + 2y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2(g)(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 \\ 3x^2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Fonction à une variable.

On suppose que les fonctions que nous allons étudier sont deux fois dérivables, de dérivées secondes continues.

1. Fonction à une variable.

On suppose que les fonctions que nous allons étudier sont deux fois dérivables, de dérivées secondes continues.

f a un minimum en a :

x	a
$f'(x)$	0
$f(x)$	 $f(a)$
$f''(x)$	

f a un maximum en a :

x	a
$f'(x)$	0
$f(x)$	 $f(a)$
$f''(x)$	



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f a un minimum en a .



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f a un maximum en a .

1. Fonction à une variable.

On suppose que les fonctions que nous allons étudier sont deux fois dérivables, de dérivées secondes continues.

f a un minimum en a :

x	a
$f'(x)$	$- \quad 0$
$f(x)$	
$f''(x)$	

f a un maximum en a :

x	a
$f'(x)$	0
$f(x)$	
$f''(x)$	



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f a un minimum en a .



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f a un maximum en a .

1. Fonction à une variable.

On suppose que les fonctions que nous allons étudier sont deux fois dérivables, de dérivées secondes continues.

f a un minimum en a :

x	a
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	
$f''(x)$	

f a un maximum en a :

x	a
$f'(x)$	0
$f(x)$	
$f''(x)$	



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f a un minimum en a .



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f a un maximum en a .

1. Fonction à une variable.

On suppose que les fonctions que nous allons étudier sont deux fois dérivables, de dérivées secondes continues.

f a un minimum en a :

x	a		
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	 $f(a)$		
$f''(x)$	+		

f a un maximum en a :

x	a		
$f'(x)$	0		
$f(x)$	 $f(a)$		
$f''(x)$			



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f a un minimum en a .



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f a un maximum en a .

1. Fonction à une variable.

On suppose que les fonctions que nous allons étudier sont deux fois dérivables, de dérivées secondes continues.

f a un minimum en a :

x	a		
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			
$f''(x)$	+		

f a un maximum en a :

x	a		
$f'(x)$	0		
$f(x)$			
$f''(x)$			



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f a un **minimum** en a .



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f a un **maximum** en a .

1. Fonction à une variable.

On suppose que les fonctions que nous allons étudier sont deux fois dérivables, de dérivées secondes continues.

f a un minimum en a :

x	a		
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	 $f(a)$		
$f''(x)$	+		

f a un maximum en a :

x	a		
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	 $f(a)$		
$f''(x)$	-		



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f a un **mini-**
mum en a .



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f a un
en a .

1. Fonction à une variable.

On suppose que les fonctions que nous allons étudier sont deux fois dérivables, de dérivées secondes continues.

f a un minimum en a :

x	a		
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	 $f(a)$		
$f''(x)$	+		

f a un maximum en a :

x	a		
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	 $f(a)$		
$f''(x)$			



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f a un **mini-**
mum en a .



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f a un
en a .

1. Fonction à une variable.

On suppose que les fonctions que nous allons étudier sont deux fois dérivables, de dérivées secondes continues.

f a un minimum en a :

x	a		
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			
$f''(x)$	+		

f a un maximum en a :

x	a		
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			
$f''(x)$	-		



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f a un **minimum** en a .



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f a un **maximum** en a .

1. Fonction à une variable.

On suppose que les fonctions que nous allons étudier sont deux fois dérivables, de dérivées secondes continues.

f a un minimum en a :

x	a		
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			
$f''(x)$	+		

f a un maximum en a :

x	a		
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			
$f''(x)$	-		



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f a un **minimum** en a .



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f a un **maximum** en a .

1. Fonction à une variable.

On suppose que les fonctions que nous allons étudier sont deux fois dérivables, de dérivées secondes continues.

f a un minimum en a :

x	a		
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			
$f''(x)$	+		

f a un maximum en a :

x	a		
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			
$f''(x)$	-		



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f a un **minimum** en a .



Théorème

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f a un **maximum** en a .



Définition:

Un point où la dérivée s'annule s'appelle un point **critique**.

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 7 : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$.

① On cherche les points critiques : $f'(x) =$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 7 : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$.

① On cherche les points critiques : $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 7 : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$.

① On cherche les points critiques : $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

On cherche les x qui annule la dérivée :

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 7 : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$.

① On cherche les points critiques : $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

On cherche les x qui annule la dérivée : $\Delta =$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 7 : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$.

① On cherche les points critiques : $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

On cherche les x qui annule la dérivée : $\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-36) =$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 7 : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$.

① On cherche les points critiques : $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

On cherche les x qui annule la dérivée : $\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-36) = 900$,

on trouve $x_1 =$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 7 : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$.

① On cherche les points critiques : $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

On cherche les x qui annule la dérivée : $\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-36) = 900$,

on trouve $x_1 = \frac{-6 - 30}{12} =$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 7 : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$.

① On cherche les points critiques : $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

On cherche les x qui annule la dérivée : $\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-36) = 900$,

on trouve $x_1 = \frac{-6 - 30}{12} = -3$ et $x_2 =$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 7 : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$.

① On cherche les points critiques : $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

On cherche les x qui annule la dérivée : $\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-36) = 900$,

on trouve $x_1 = \frac{-6 - 30}{12} = -3$ et $x_2 = \frac{-6 + 30}{12} =$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 7 : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$.

① On cherche les points critiques : $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

On cherche les x qui annule la dérivée : $\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-36) = 900$,

on trouve $x_1 = \frac{-6 - 30}{12} = -3$ et $x_2 = \frac{-6 + 30}{12} = 2$

② On étudie la dérivée seconde : $f''(x) =$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 7 : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$.

① On cherche les points critiques : $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

On cherche les x qui annule la dérivée : $\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-36) = 900$,

on trouve $x_1 = \frac{-6 - 30}{12} = -3$ et $x_2 = \frac{-6 + 30}{12} = 2$

② On étudie la dérivée seconde : $f''(x) = 12x + 6$

• $f''(-3) =$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 7 : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$.

① On cherche les points critiques : $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

On cherche les x qui annule la dérivée : $\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-36) = 900$,

on trouve $x_1 = \frac{-6 - 30}{12} = -3$ et $x_2 = \frac{-6 + 30}{12} = 2$

② On étudie la dérivée seconde : $f''(x) = 12x + 6$

- $f''(-3) = 12 \times (-3) + 6 =$

Exemple n° 7 : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$.

① On cherche les points critiques : $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

On cherche les x qui annule la dérivée : $\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-36) = 900$,

on trouve $x_1 = \frac{-6 - 30}{12} = -3$ et $x_2 = \frac{-6 + 30}{12} = 2$

② On étudie la dérivée seconde : $f''(x) = 12x + 6$

• $f''(-3) = 12 \times (-3) + 6 = -30 < 0$ donc f a un

Exemple n° 7 : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$.

① On cherche les points critiques : $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

On cherche les x qui annule la dérivée : $\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-36) = 900$,

on trouve $x_1 = \frac{-6 - 30}{12} = -3$ et $x_2 = \frac{-6 + 30}{12} = 2$

② On étudie la dérivée seconde : $f''(x) = 12x + 6$

- $f''(-3) = 12 \times (-3) + 6 = -30 < 0$ donc f a un maximum en $x = -3$.
- $f''(2) =$

Exemple n° 7 : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$.

① On cherche les points critiques : $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

On cherche les x qui annule la dérivée : $\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-36) = 900$,

on trouve $x_1 = \frac{-6 - 30}{12} = -3$ et $x_2 = \frac{-6 + 30}{12} = 2$

② On étudie la dérivée seconde : $f''(x) = 12x + 6$

- $f''(-3) = 12 \times (-3) + 6 = -30 < 0$ donc f a un maximum en $x = -3$.
- $f''(2) = 12 \times 2 + 6 =$

Exemple n° 7 : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$.

① On cherche les points critiques : $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

On cherche les x qui annule la dérivée : $\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-36) = 900$,

on trouve $x_1 = \frac{-6 - 30}{12} = -3$ et $x_2 = \frac{-6 + 30}{12} = 2$

② On étudie la dérivée seconde : $f''(x) = 12x + 6$

- $f''(-3) = 12 \times (-3) + 6 = -30 < 0$ donc f a un maximum en $x = -3$.
- $f''(2) = 12 \times 2 + 6 = 30 > 0$ donc f a un

Exemple n° 7 : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$.

① On cherche les points critiques : $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

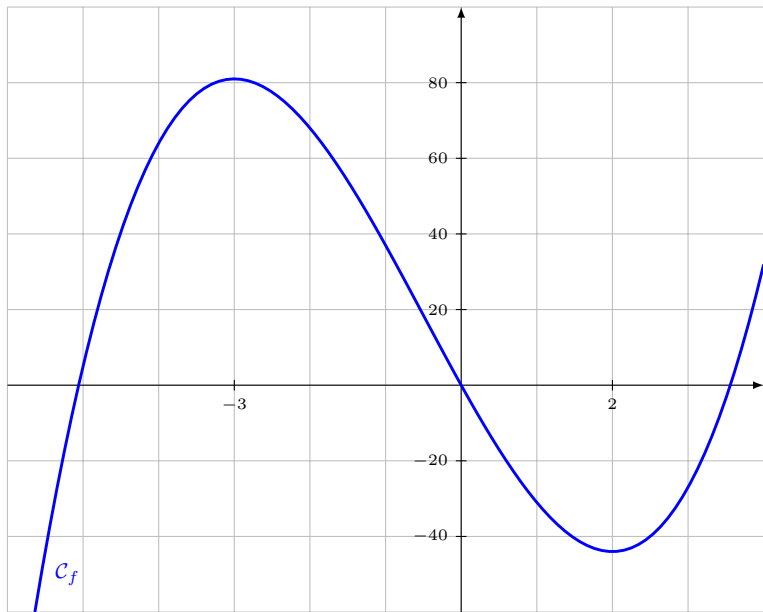
On cherche les x qui annule la dérivée : $\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-36) = 900$,

on trouve $x_1 = \frac{-6 - 30}{12} = -3$ et $x_2 = \frac{-6 + 30}{12} = 2$

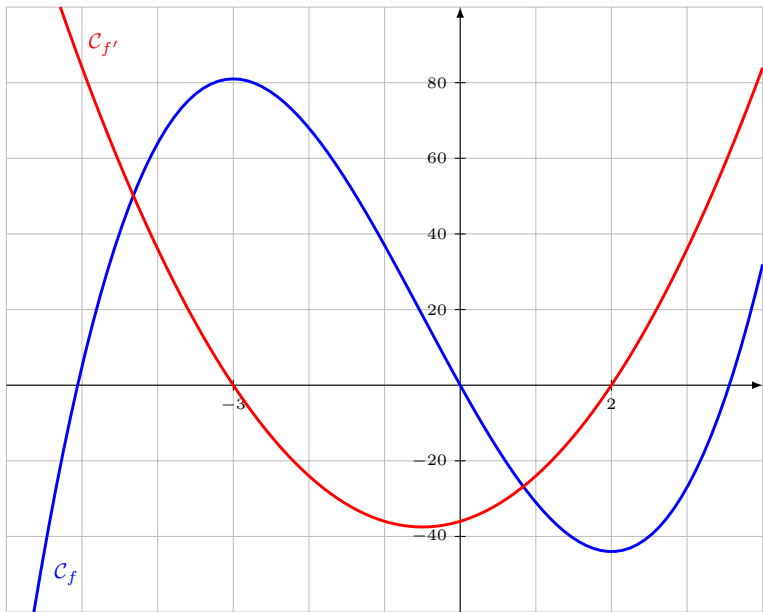
② On étudie la dérivée seconde : $f''(x) = 12x + 6$

- $f''(-3) = 12 \times (-3) + 6 = -30 < 0$ donc f a un maximum en $x = -3$.
- $f''(2) = 12 \times 2 + 6 = 30 > 0$ donc f a un minimum en $x = 2$.

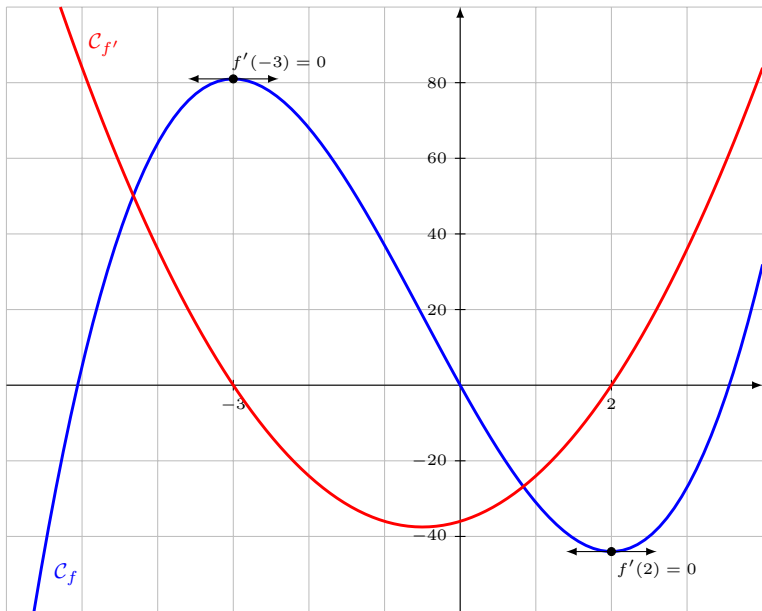
II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.



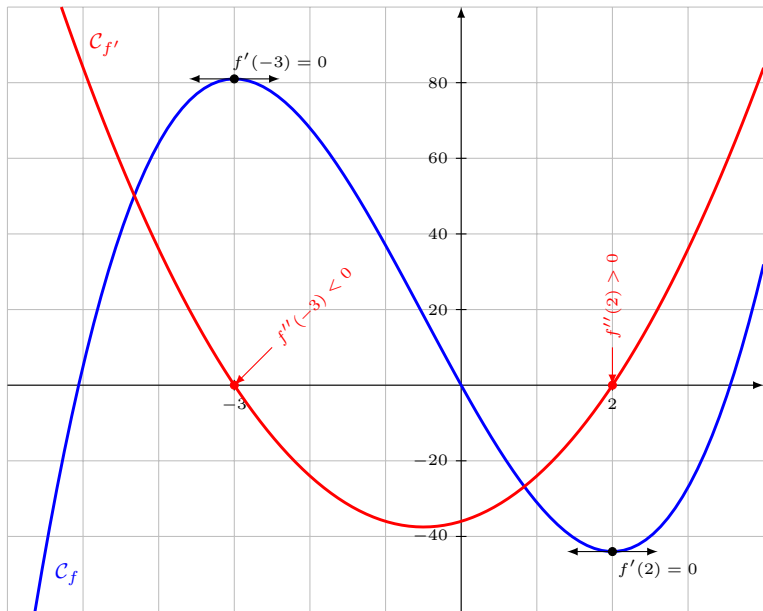
II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.



II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.



II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.



2. Fonction à deux variables.

Fonction à une variable $y = f(x)$

Points critiques : on recherche les x qui annulent la dérivée

$$f'(x) = 0$$

Fonction à deux variables $z = f(x, y)$

Points critiques : on recherche les couples (x, y) qui annulent le gradient

$$\vec{\nabla}f(x, y) = \vec{0}, \text{ soit } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

2. Fonction à deux variables.

Fonction à une variable $y = f(x)$	Fonction à deux variables $z = f(x, y)$
<p>Points critiques : on recherche les x qui annulent la dérivée</p> $f'(x) = 0$	<p>Points critiques : on recherche les couples (x, y) qui annulent le gradient</p> $\vec{\nabla}f(x, y) = \vec{0}, \text{ soit } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$
<p>Etude d'un point critique en a :</p>	<p>Etude d'un point critique en (a, b) :</p>

2. Fonction à deux variables.

Fonction à une variable $y = f(x)$	Fonction à deux variables $z = f(x, y)$
<p>Points critiques : on recherche les x qui annulent la dérivée</p> $f'(x) = 0$	<p>Points critiques : on recherche les couples (x, y) qui annulent le gradient</p> $\vec{\nabla}f(x, y) = \vec{0}, \text{ soit } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$
<p>Etude d'un point critique en a :</p> <ul style="list-style-type: none"> On calcule la dérivée seconde $f''(x)$; 	<p>Etude d'un point critique en (a, b) :</p> <ul style="list-style-type: none"> On calcule la hessienne $\nabla^2(f)(x, y)$

2. Fonction à deux variables.

Fonction à une variable $y = f(x)$	Fonction à deux variables $z = f(x, y)$
<p>Points critiques : on recherche les x qui annulent la dérivée</p> $f'(x) = 0$	<p>Points critiques : on recherche les couples (x, y) qui annulent le gradient</p> $\vec{\nabla}f(x, y) = \vec{0}, \text{ soit } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$
<p>Etude d'un point critique en a :</p> <ul style="list-style-type: none"> On calcule la dérivée seconde $f''(x)$; On l'évalue en $x = a$: $f''(a)$ 	<p>Etude d'un point critique en (a, b) :</p> <ul style="list-style-type: none"> On calcule la hessienne $\nabla^2(f)(x, y)$ On l'évalue en $(x, y) = (a, b)$: $\nabla^2(f)(a, b)$

2. Fonction à deux variables.

Fonction à une variable $y = f(x)$	Fonction à deux variables $z = f(x, y)$
<p>Points critiques : on recherche les x qui annulent la dérivée</p> $f'(x) = 0$	<p>Points critiques : on recherche les couples (x, y) qui annulent le gradient</p> $\vec{\nabla}f(x, y) = \vec{0}, \text{ soit } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$
<p>Etude d'un point critique en a :</p> <ul style="list-style-type: none"> On calcule la dérivée seconde $f''(x)$; On l'évalue en $x = a$: $f''(a)$ 	<p>Etude d'un point critique en (a, b) :</p> <ul style="list-style-type: none"> On calcule la hessienne $\nabla^2(f)(x, y)$ On l'évalue en $(x, y) = (a, b)$: $\nabla^2(f)(a, b)$ On détermine ses valeurs propres :

2. Fonction à deux variables.

Fonction à une variable $y = f(x)$	Fonction à deux variables $z = f(x, y)$
<p>Points critiques : on recherche les x qui annulent la dérivée</p> $f'(x) = 0$	<p>Points critiques : on recherche les couples (x, y) qui annulent le gradient</p> $\vec{\nabla}f(x, y) = \vec{0}, \text{ soit } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$
<p>Etude d'un point critique en a :</p> <ul style="list-style-type: none"> ● On calcule la dérivée seconde $f''(x)$; ● On l'évalue en $x = a$: $f''(a)$ <ul style="list-style-type: none"> ☞ Si $f''(a) > 0$ on a un minimum 	<p>Etude d'un point critique en (a, b) :</p> <ul style="list-style-type: none"> ● On calcule la hessienne $\nabla^2(f)(x, y)$ ● On l'évalue en $(x, y) = (a, b)$: $\nabla^2(f)(a, b)$ ● On détermine ses valeurs propres : <ul style="list-style-type: none"> ☞ si elles sont strictement positives, on a un minimum

2. Fonction à deux variables.

Fonction à une variable $y = f(x)$	Fonction à deux variables $z = f(x, y)$
<p>Points critiques : on recherche les x qui annulent la dérivée</p> $f'(x) = 0$	<p>Points critiques : on recherche les couples (x, y) qui annulent le gradient</p> $\vec{\nabla}f(x, y) = \vec{0}, \text{ soit } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$
<p>Etude d'un point critique en a :</p> <ul style="list-style-type: none"> • On calcule la dérivée seconde $f''(x)$; • On l'évalue en $x = a$: $f''(a)$ <ul style="list-style-type: none"> ☞ Si $f''(a) > 0$ on a un minimum ☞ Si $f''(a) < 0$ on a un maximum 	<p>Etude d'un point critique en (a, b) :</p> <ul style="list-style-type: none"> • On calcule la hessienne $\nabla^2(f)(x, y)$ • On l'évalue en $(x, y) = (a, b)$: $\nabla^2(f)(a, b)$ • On détermine ses valeurs propres : <ul style="list-style-type: none"> ☞ si elles sont strictement positives, on a un minimum ☞ si elles sont strictement négatives, on a un maximum

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

④ Recherche des points critiques : $\vec{\nabla}f = \vec{0} \iff$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

④ Recherche des points critiques : $\vec{\nabla}f = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \end{cases}$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

④ Recherche des points critiques : $\vec{\nabla}f = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \iff \end{cases}$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

④ Recherche des points critiques : $\vec{\nabla} f = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \iff x = y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \end{cases} \quad (1)$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

④ Recherche des points critiques : $\vec{\nabla} f = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \iff x = y & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

④ Recherche des points critiques : $\vec{\nabla} f = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \iff x = y & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Comme $x = y$ l'équation (2) devient

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

④ Recherche des points critiques : $\vec{\nabla} f = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \iff x = y & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Comme $x = y$ l'équation (2) devient $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

④ Recherche des points critiques : $\vec{\nabla} f = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \iff x = y & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Comme $x = y$ l'équation (2) devient $3x^2 - 2x - 1 = 0$. $\Delta =$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

④ Recherche des points critiques : $\vec{\nabla}f = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \iff x = y & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Comme $x = y$ l'équation (2) devient $3x^2 - 2x - 1 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) =$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

④ Recherche des points critiques : $\vec{\nabla}f = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \iff x = y & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Comme $x = y$ l'équation (2) devient $3x^2 - 2x - 1 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

④ Recherche des points critiques : $\vec{\nabla}f = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \iff x = y & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Comme $x = y$ l'équation (2) devient $3x^2 - 2x - 1 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$

On trouve $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \end{array} \right.$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

④ Recherche des points critiques : $\vec{\nabla}f = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \iff x = y & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Comme $x = y$ l'équation (2) devient $3x^2 - 2x - 1 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$

On trouve $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{2 - 4}{2 \times 3} = \end{array} \right.$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

④ Recherche des points critiques : $\vec{\nabla} f = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \iff x = y & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Comme $x = y$ l'équation (2) devient $3x^2 - 2x - 1 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$

On trouve $\begin{cases} x_1 = \frac{2 - 4}{2 \times 3} = -\frac{1}{3} \\ x_2 = \end{cases}$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

④ Recherche des points critiques : $\vec{\nabla} f = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \iff x = y & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Comme $x = y$ l'équation (2) devient $3x^2 - 2x - 1 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$

On trouve $\begin{cases} x_1 = \frac{2 - 4}{2 \times 3} = -\frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{2 + 4}{6} = \end{cases}$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

④ Recherche des points critiques : $\vec{\nabla}f = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \iff x = y & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Comme $x = y$ l'équation (2) devient $3x^2 - 2x - 1 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$

On trouve $\begin{cases} x_1 = \frac{2 - 4}{2 \times 3} = -\frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{2 + 4}{6} = 1 \end{cases}$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

④ Recherche des points critiques : $\vec{\nabla} f = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \iff x = y & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Comme $x = y$ l'équation (2) devient $3x^2 - 2x - 1 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$

On trouve $\begin{cases} x_1 = \frac{2-4}{2 \times 3} = -\frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{2+4}{6} = 1 \end{cases}$ On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

④ Recherche des points critiques : $\vec{\nabla} f = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \iff x = y & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Comme $x = y$ l'équation (2) devient $3x^2 - 2x - 1 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$

On trouve $\begin{cases} x_1 = \frac{2-4}{2 \times 3} = -\frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{2+4}{6} = 1 \end{cases}$ On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

④ Recherche des points critiques : $\vec{\nabla} f = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \iff x = y & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Comme $x = y$ l'équation (2) devient $3x^2 - 2x - 1 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$

On trouve $\begin{cases} x_1 = \frac{2-4}{2 \times 3} = -\frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{2+4}{6} = 1 \end{cases}$ On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

④ Recherche des points critiques : $\vec{\nabla}f = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \iff x = y & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Comme $x = y$ l'équation (2) devient $3x^2 - 2x - 1 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$

On trouve $\begin{cases} x_1 = \frac{2-4}{2 \times 3} = -\frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{2+4}{6} = 1 \end{cases}$ On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$

Rappel : $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 3y^2 - 2x - 1 \end{pmatrix}$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} & \end{matrix}$

Rappel : $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 3y^2 - 2x - 1 \end{pmatrix}$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2 & -2 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -2 \end{pmatrix}$

Rappel : $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 3y^2 - 2x - 1 \end{pmatrix}$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

Rappel : $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 3y^2 - 2x - 1 \end{pmatrix}$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2 & -2 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -2 & 6y \end{pmatrix}$

- **Etude en a** : $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$,

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2 & -2 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 6y \end{pmatrix}$

- **Etude en a** : $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & \\ & \end{pmatrix}$,

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

① **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

② **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

- **Etude en a** : $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$,

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

① **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

② **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

- **Etude en a** : $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$,

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

① **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

② **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en a** : $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \\ & -\lambda \end{vmatrix} =$$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en a** : $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & \\ & -\lambda \end{vmatrix} =$$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

① **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

② **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en a** : $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

① **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

② **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en a** : $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} =$$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en a** : $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(6 - \lambda) - (-2)(-2) =$$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en a** : $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(6 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8\lambda + 8.$$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en a** : $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(6 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8\lambda + 8.$$

Recherche des valeurs propres : $\Delta =$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

① **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

② **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en a** : $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(6 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8\lambda + 8.$$

Recherche des valeurs propres : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 8 =$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

① **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

② **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en a** : $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(6 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8\lambda + 8.$$

Recherche des valeurs propres : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 32$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

① **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

② **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en a** : $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(6 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8\lambda + 8.$$

Recherche des valeurs propres : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 32$

On trouve $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \end{array} \right.$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en a** : $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(6 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8\lambda + 8.$$

Recherche des valeurs propres : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 32$

$$\text{On trouve } \begin{cases} \lambda_1 = \frac{8 - \sqrt{32}}{2} = \end{cases}$$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

① **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

② **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2 & -2 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 6y \end{pmatrix}$

• **Etude en a** : $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(6 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8\lambda + 8.$$

Recherche des valeurs propres : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 32$

$$\text{On trouve } \begin{cases} \lambda_1 = \frac{8 - \sqrt{32}}{2} = \frac{8 - \sqrt{2 \times 16}}{2} = \end{cases}$$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

① **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

② **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en a** : $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(6 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8\lambda + 8.$$

Recherche des valeurs propres : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 32$

$$\text{On trouve } \left\{ \lambda_1 = \frac{8 - \sqrt{32}}{2} = \frac{8 - \sqrt{2 \times 16}}{2} = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{2} = \right.$$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

① **Recherche des points critiques :** On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

② **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en a :** $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(6 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8\lambda + 8.$$

Recherche des valeurs propres : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 32$

$$\text{On trouve } \begin{cases} \lambda_1 = \frac{8 - \sqrt{32}}{2} = \frac{8 - \sqrt{2 \times 16}}{2} = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{2} = 4 - 2\sqrt{2} \simeq 1,17 \\ \lambda_2 = \end{cases}$$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

① **Recherche des points critiques :** On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

② **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2 & -2 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 6y \end{pmatrix}$

• **Etude en a :** $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(6 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8\lambda + 8.$$

Recherche des valeurs propres : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 32$

$$\text{On trouve } \begin{cases} \lambda_1 = \frac{8 - \sqrt{32}}{2} = \frac{8 - \sqrt{2 \times 16}}{2} = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{2} = 4 - 2\sqrt{2} \simeq 1,7 \\ \lambda_2 = 4 + 2\sqrt{2} \simeq 6,83 \end{cases}$$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

① **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

② **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2 & -2 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 6y \end{pmatrix}$

• **Etude en a** : $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(6 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8\lambda + 8.$$

Recherche des valeurs propres : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 32$

$$\text{On trouve } \begin{cases} \lambda_1 = \frac{8 - \sqrt{32}}{2} = \frac{8 - \sqrt{2 \times 16}}{2} = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{2} = 4 - 2\sqrt{2} \simeq 1,7 \\ \lambda_2 = 4 + 2\sqrt{2} \simeq 6,83 \end{cases}$$

Les deux valeurs propres sont positives, donc f atteint un

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

① **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

② **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2 & -2 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 6y \end{pmatrix}$

• **Etude en a** : $\nabla^2(f)(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

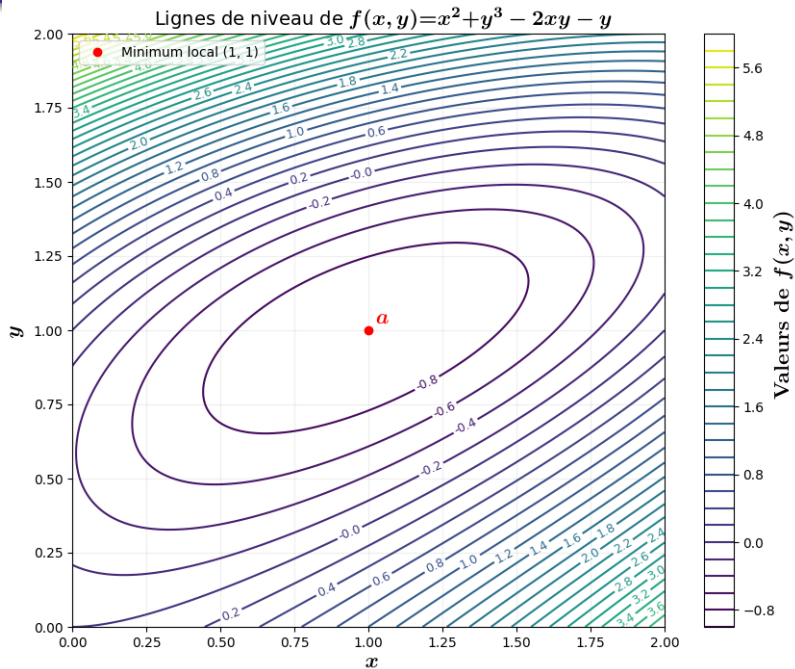
$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(6 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8\lambda + 8.$$

Recherche des valeurs propres : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 32$

$$\text{On trouve } \begin{cases} \lambda_1 = \frac{8 - \sqrt{32}}{2} = \frac{8 - \sqrt{2 \times 16}}{2} = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{2} = 4 - 2\sqrt{2} \simeq 1,7 \\ \lambda_2 = 4 + 2\sqrt{2} \simeq 6,83 \end{cases}$$

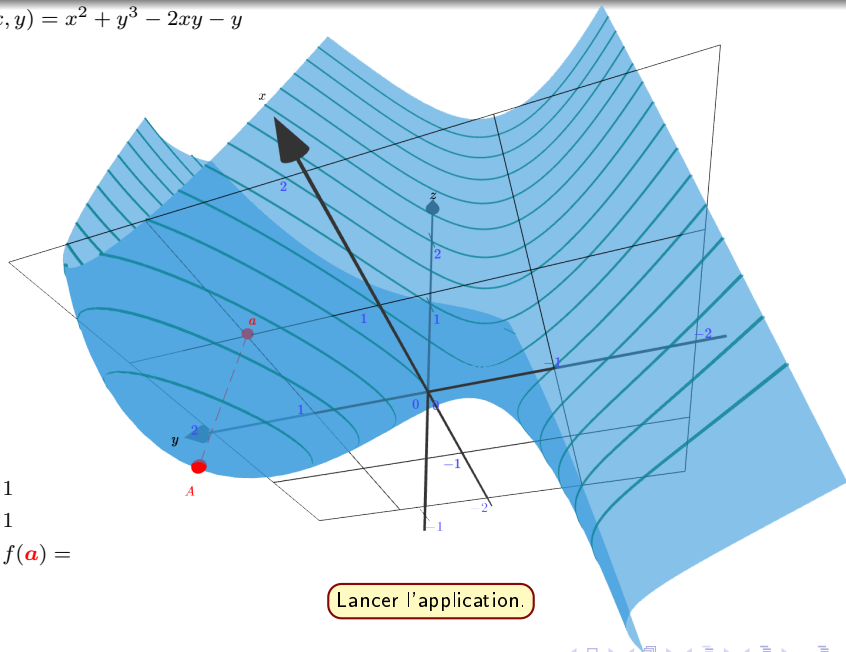
Les deux valeurs propres sont positives, donc f atteint un minimum en a .

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.



II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

$$f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$$

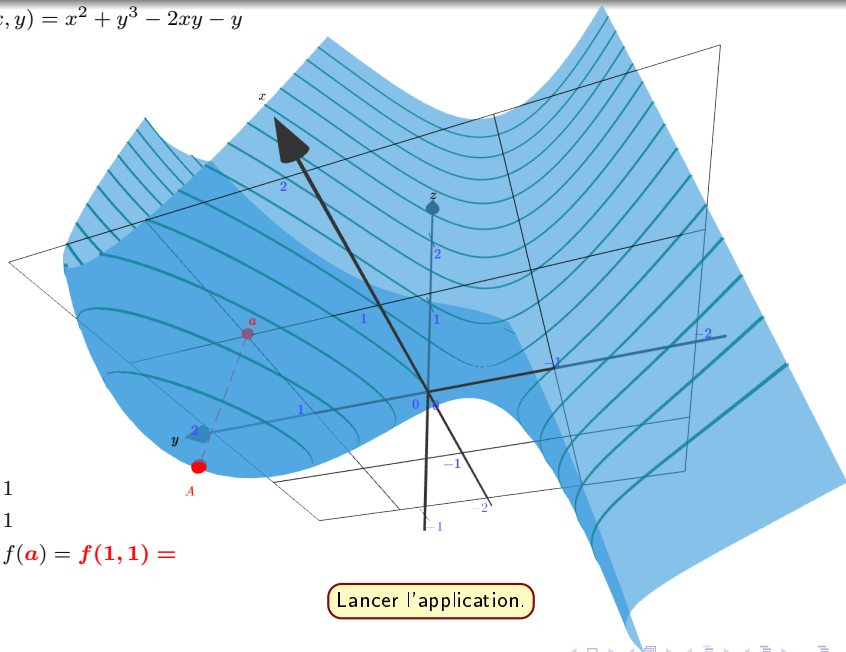


$$A \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} f(a) =$$

Lancer l'application.

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

$$f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$$

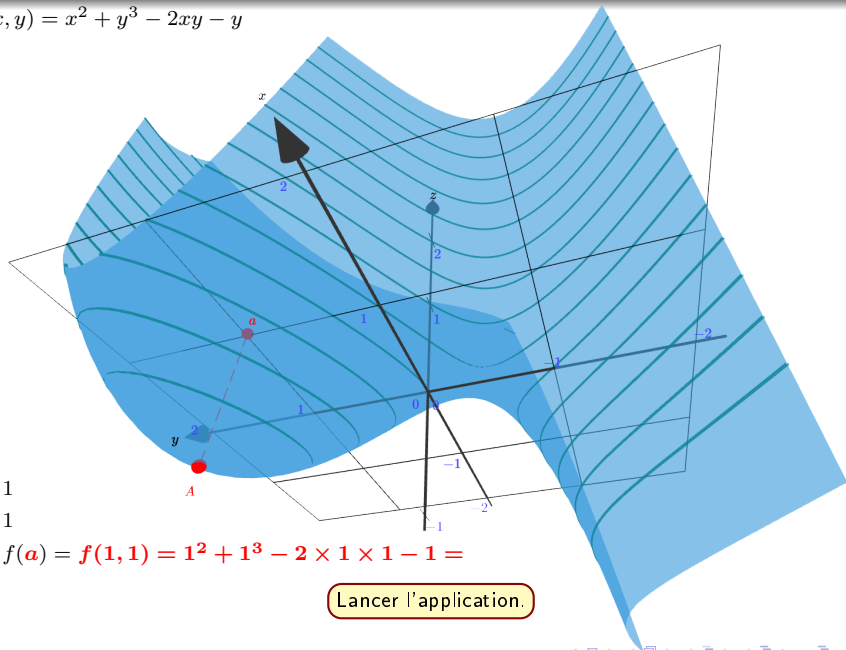


$$\mathbf{A} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} f(\mathbf{a}) = f(1, 1) =$$

Lancer l'application.

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

$$f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$$



$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(\mathbf{a}) = f(1, 1) = 1^2 + 1^3 - 2 \times 1 \times 1 - 1 =$$

Lancer l'application.

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2 & -2 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 6y \end{pmatrix}$

- Etude en b :

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2 & -2 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 6y \end{pmatrix}$

• **Etude en b** : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$,

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2 & -2 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 6y \end{pmatrix}$

- **Etude en b** : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & \\ & \end{pmatrix}$,

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

- **Etude en b** : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$,

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

- **Etude en b** : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$,

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

- 1 **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.
- 2 **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

- **Etude en b** : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \\ & -\lambda \end{vmatrix} =$$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en b** : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & \\ & -2 - \lambda \end{vmatrix} =$$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

- 1 **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.
- 2 **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix}$

- **Etude en b** : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} =$$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en b** : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-2 - \lambda) - (-2)(-2) =$$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en b** : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-2 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8.$$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en b** : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-2 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8.$$

Recherche des valeurs propres : $\lambda^2 =$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en b** : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-2 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8.$$

Recherche des valeurs propres : $\lambda^2 = 8 \iff \lambda =$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques :** On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en b :** $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-2 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8.$$

Recherche des valeurs propres : $\lambda^2 = 8 \iff \lambda = \pm \sqrt{8} =$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en b** : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-2 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8.$$

Recherche des valeurs propres : $\lambda^2 = 8 \iff \lambda = \pm\sqrt{8} = \pm\sqrt{4 \times 2} =$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$

• **Etude en b** : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-2 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8.$$

Recherche des valeurs propres : $\lambda^2 = 8 \iff \lambda = \pm\sqrt{8} = \pm\sqrt{4 \times 2} = \pm 2\sqrt{2}$

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

❶ **Recherche des points critiques** : On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

❷ **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix}$

• **Etude en b** : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-2 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8.$$

Recherche des valeurs propres : $\lambda^2 = 8 \iff \lambda = \pm\sqrt{8} = \pm\sqrt{4 \times 2} = \pm 2\sqrt{2}$

Les deux valeurs propres sont de signes différents, donc f atteint un point

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exemple n° 8 : On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

- 1 **Recherche des points critiques :** On obtient deux points critiques : $a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.
- 2 **Etude des points critiques.**

Calcul de la hessienne : $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix}$

- **Etude en b :** $\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-2 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 8.$$

Recherche des valeurs propres : $\lambda^2 = 8 \iff \lambda = \pm\sqrt{8} = \pm\sqrt{4 \times 2} = \pm 2\sqrt{2}$

Les deux valeurs propres sont de signes différents, donc f atteint un point **selle** en b .

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

- **Etude en b** : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

☞ vecteurs propres associés à $\lambda = 2\sqrt{2}$:

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

- ☞ vecteurs propres associés à $\lambda = 2\sqrt{2}$: Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur propre \vec{u} associé à $\lambda = 2\sqrt{2}$.

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

☞ vecteurs propres associés à $\lambda = 2\sqrt{2}$: Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur propre \vec{u} associé à $\lambda = 2\sqrt{2}$. On résout
$$\begin{cases} (2 - \lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

☞ vecteurs propres associés à $\lambda = 2\sqrt{2}$: Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur propre \vec{u} associé à $\lambda = 2\sqrt{2}$. On résout $\begin{cases} (2 - \lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - \lambda)y = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} (2 - 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - 2\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$.

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

☞ vecteurs propres associés à $\lambda = 2\sqrt{2}$: Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur propre \vec{u} associé à $\lambda = 2\sqrt{2}$. On résout $\begin{cases} (2 - \lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - \lambda)y = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} (2 - 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - 2\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$.

Ce système a un déterminant nulle, donc les deux équations sont proportionnelles, donc équivalentes.

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

☞ vecteurs propres associés à $\lambda = 2\sqrt{2}$: Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur propre \vec{u} associé à $\lambda = 2\sqrt{2}$. On résout $\begin{cases} (2 - \lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - \lambda)y = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} (2 - 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - 2\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$.

Ce système a un déterminant nulle, donc les deux équations sont proportionnelles, donc équivalentes.

$$(2 - 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \iff y =$$

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

☞ vecteurs propres associés à $\lambda = 2\sqrt{2}$: Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur propre \vec{u} associé à $\lambda = 2\sqrt{2}$. On résout $\begin{cases} (2 - \lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - \lambda)y = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} (2 - 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - 2\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$.

Ce système a un déterminant nulle, donc les deux équations sont proportionnelles, donc équivalentes.

$$(2 - 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \iff y = \frac{-(2 - 2\sqrt{2})x}{-2} = (1 - \sqrt{2})x,$$

en prenant $x = 1$,

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

☞ vecteurs propres associés à $\lambda = 2\sqrt{2}$: Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur propre \vec{u} associé à $\lambda = 2\sqrt{2}$. On résout $\begin{cases} (2 - \lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - \lambda)y = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} (2 - 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - 2\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$.

Ce système a un déterminant nulle, donc les deux équations sont proportionnelles, donc équivalentes.

$$(2 - 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \iff y = \frac{-(2 - 2\sqrt{2})x}{-2} = (1 - \sqrt{2})x,$$

en prenant $x = 1$, on obtient $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

☞ vecteurs propres associés à $\lambda = 2\sqrt{2}$: Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur propre \vec{u} associé à $\lambda = 2\sqrt{2}$. On résout $\begin{cases} (2 - \lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - \lambda)y = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} (2 - 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - 2\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$.

Ce système a un déterminant nulle, donc les deux équations sont proportionnelles, donc équivalentes.

$$(2 - 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \iff y = \frac{-(2 - 2\sqrt{2})x}{-2} = (1 - \sqrt{2})x,$$

en prenant $x = 1$, on obtient $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$

La valeur propre est positive, donc le point b correspond à un **minimum** dans la direction du vecteur propre \vec{u} . C'est la direction de la **montée** la plus rapide.

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

☞ vecteurs propres associés à $\lambda = -2\sqrt{2}$:

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

- ☞ vecteurs propres associés à $\lambda = -2\sqrt{2}$: Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur propre \vec{v} associé à $\lambda = -2\sqrt{2}$.

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

☞ vecteurs propres associés à $\lambda = -2\sqrt{2}$: Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur propre \vec{v} associé à $\lambda = -2\sqrt{2}$. On résout $\begin{cases} (2 - \lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - \lambda)y = 0 \end{cases}$ soit

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

☞ vecteurs propres associés à $\lambda = -2\sqrt{2}$: Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur propre \vec{v} associé à $\lambda = -2\sqrt{2}$. On résout $\begin{cases} (2 - \lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - \lambda)y = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} (2 + 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \\ -2x + (6 + 2\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$.

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

☞ vecteurs propres associés à $\lambda = -2\sqrt{2}$: Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur propre \vec{v} associé à $\lambda = -2\sqrt{2}$. On résout $\begin{cases} (2 - \lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - \lambda)y = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} (2 + 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \\ -2x + (6 + 2\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$.

Ce système a un déterminant nulle, donc les deux équations sont proportionnelles, donc équivalentes.

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

☞ vecteurs propres associés à $\lambda = -2\sqrt{2}$: Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur propre \vec{v} associé à $\lambda = -2\sqrt{2}$. On résout $\begin{cases} (2 - \lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - \lambda)y = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} (2 + 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \\ -2x + (6 + 2\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$.

Ce système a un déterminant nulle, donc les deux équations sont proportionnelles, donc équivalentes.

$$(2 + 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \iff y =$$

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

☞ vecteurs propres associés à $\lambda = -2\sqrt{2}$: Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur propre \vec{v} associé à $\lambda = -2\sqrt{2}$. On résout $\begin{cases} (2 - \lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - \lambda)y = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} (2 + 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \\ -2x + (6 + 2\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$.

Ce système a un déterminant nulle, donc les deux équations sont proportionnelles, donc équivalentes.

$$(2 + 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \iff y = \frac{-(2 + 2\sqrt{2})x}{-2} =$$

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

☞ vecteurs propres associés à $\lambda = -2\sqrt{2}$: Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur propre \vec{v} associé à $\lambda = -2\sqrt{2}$. On résout $\begin{cases} (2 - \lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - \lambda)y = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} (2 + 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \\ -2x + (6 + 2\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$.

Ce système a un déterminant nulle, donc les deux équations sont proportionnelles, donc équivalentes.

$$(2 + 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \iff y = \frac{-(2 + 2\sqrt{2})x}{-2} = (1 + \sqrt{2})x,$$

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

☞ vecteurs propres associés à $\lambda = -2\sqrt{2}$: Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur propre \vec{v} associé à $\lambda = -2\sqrt{2}$. On résout $\begin{cases} (2 - \lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - \lambda)y = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} (2 + 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \\ -2x + (6 + 2\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$.

Ce système a un déterminant nulle, donc les deux équations sont proportionnelles, donc équivalentes.

$$(2 + 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \iff y = \frac{-(2 + 2\sqrt{2})x}{-2} = (1 + \sqrt{2})x,$$

en prenant $x = 1$, on obtient $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$

- Etude en b : $\lambda = \pm 2\sqrt{2} \implies$ point selle.

Pour comprendre ce qu'est un point selle, on va rechercher les vecteurs propres :

☞ vecteurs propres associés à $\lambda = -2\sqrt{2}$: Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur propre \vec{v} associé à $\lambda = -2\sqrt{2}$. On résout $\begin{cases} (2 - \lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (6 - \lambda)y = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} (2 + 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \\ -2x + (6 + 2\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$.

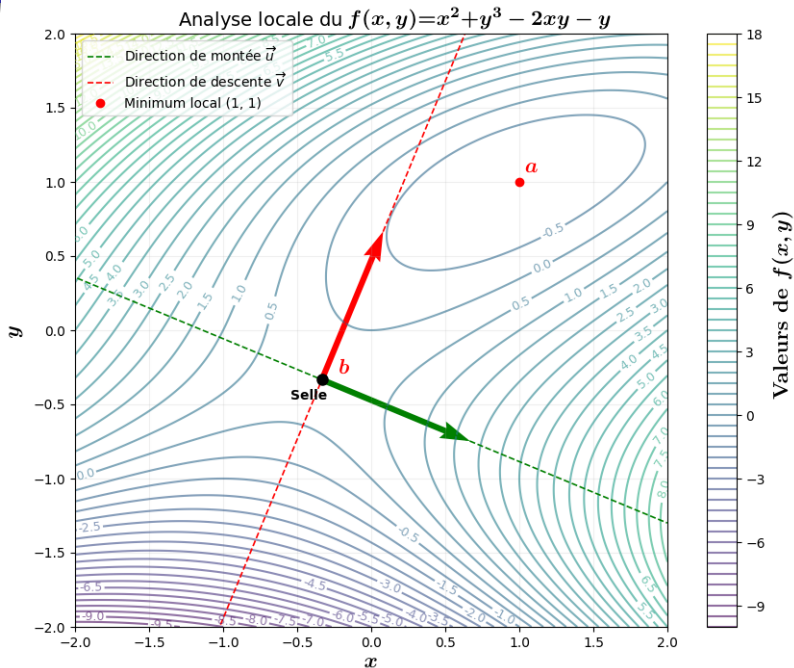
Ce système a un déterminant nulle, donc les deux équations sont proportionnelles, donc équivalentes.

$$(2 + 2\sqrt{2})x - 2y = 0 \iff y = \frac{-(2 + 2\sqrt{2})x}{-2} = (1 + \sqrt{2})x,$$

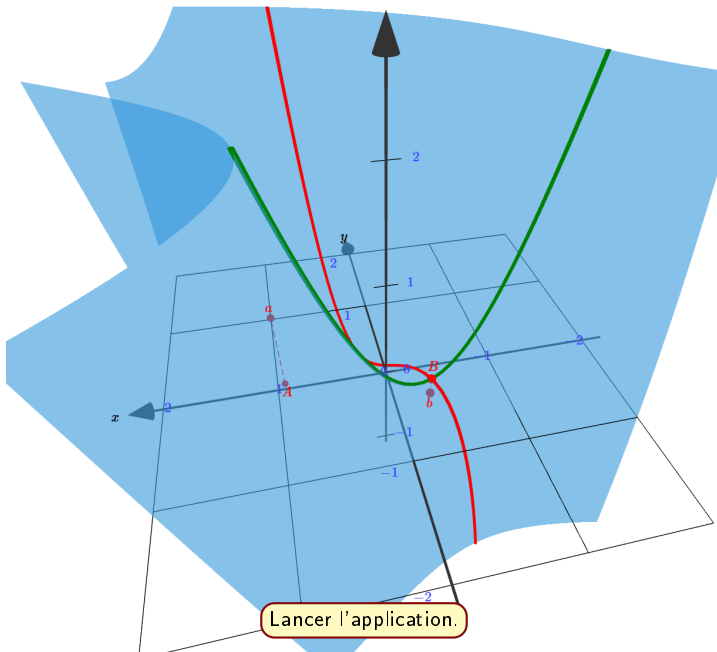
en prenant $x = 1$, on obtient $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$

La valeur propre est positive, donc le point b correspond à un **maximum** dans la direction du vecteur propre \vec{v} . C'est la direction de la **descente** la plus rapide.

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.



II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

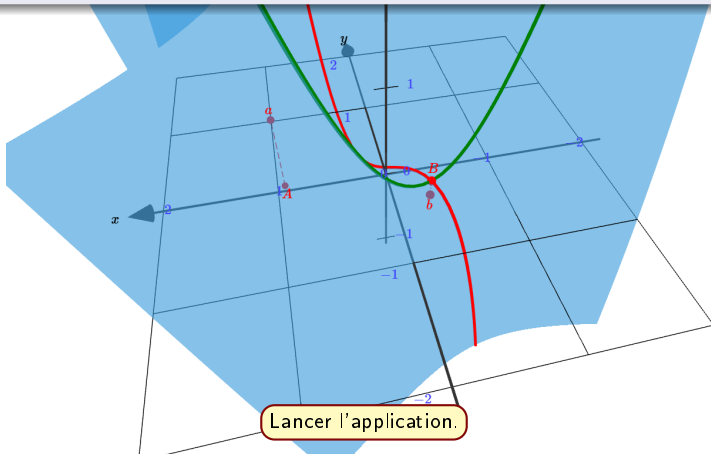


Lancer l'application.

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Calcul de la cote du point B

$$B \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$
$$f(b) =$$

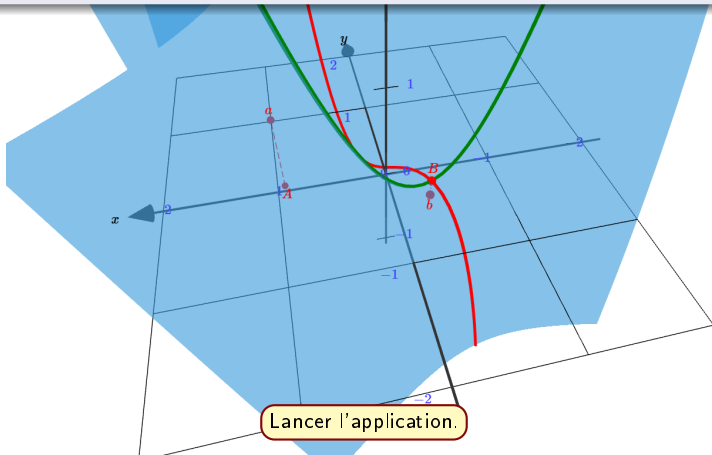


Lancer l'application.

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Calcul de la cote du point B

$$B \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases} \\ f(b) = f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) =$$

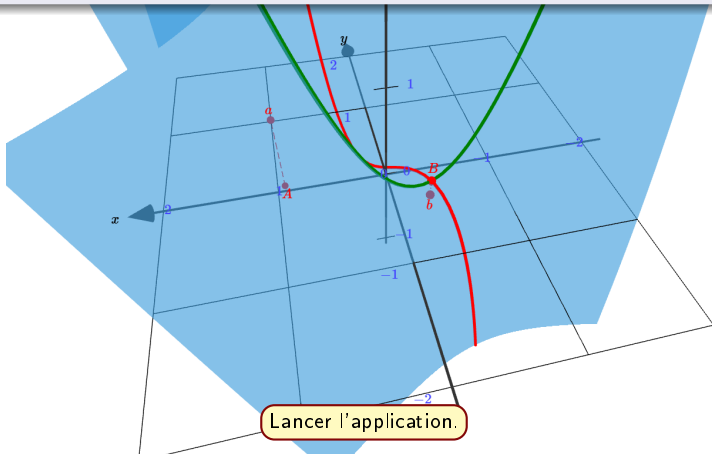


Lancer l'application.

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Calcul de la cote du point B

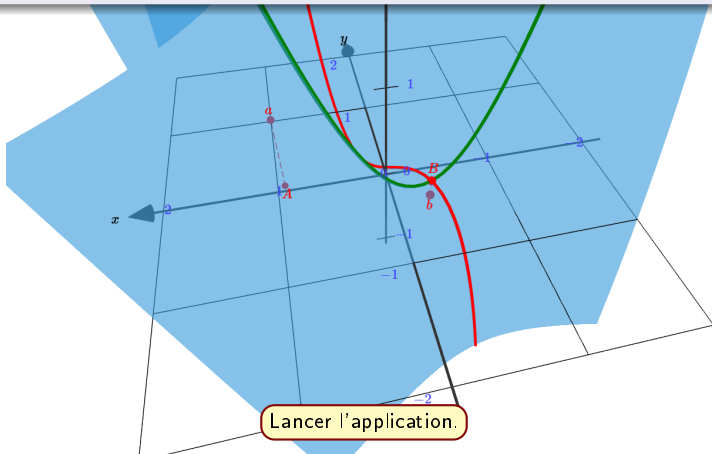
$$B \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases} \\ f(\mathbf{b}) = f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) =$$



II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Calcul de la cote du point B

$$B \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases} \\ f(\mathbf{b}) = f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27}$$



II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Calcul de la cote du point B

$$B \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases} \quad f(\mathbf{b}) = f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27}$$

Orthogonalité des vecteurs propres :

La matrice étant symétrique les vecteurs propres sont orthogonaux :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

Lancer l'application.

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Calcul de la cote du point B

$$B \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases} \quad f(\mathbf{b}) = f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27}$$

Orthogonalité des vecteurs propres :

La matrice étant symétrique les vecteurs propres sont orthogonaux :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} = 1 \times 1 + (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$$

=

Lancer l'application.

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Calcul de la cote du point B

$$B \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases} \quad f(\mathbf{b}) = f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27}$$

Orthogonalité des vecteurs propres :

La matrice étant symétrique les vecteurs propres sont orthogonaux :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} = 1 \times 1 + (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) \\ &= 1 + 1^2 - (\sqrt{2})^2 = \end{aligned}$$

Lancer l'application.

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Calcul de la cote du point B

$$B \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases} \quad f(\mathbf{b}) = f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27}$$

Orthogonalité des vecteurs propres :

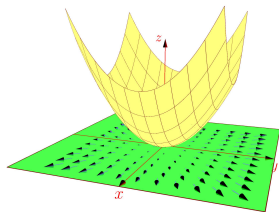
La matrice étant symétrique les vecteurs propres sont orthogonaux :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} = 1 \times 1 + (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) \\ &= 1 + 1^2 - (\sqrt{2})^2 = 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Lancer l'application.

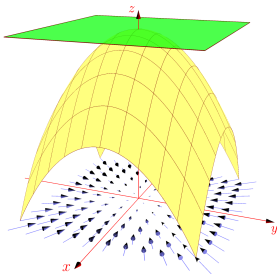


Un point critique n'est pas nécessairement un extremum.



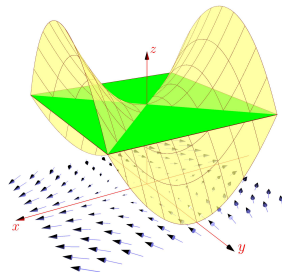
Minimum

On voit que le minimum repousse les vecteurs gradients.



Maximum

On voit que les vecteurs gradients pointent bien vers le maximum.



Point selle

Un minimum suivant l'axe (Ox) et un maximum suivant l'axe (Oy)

II. Application à l'étude des fonctions à deux variables.

Exercice n° 5: On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + xy^2 + 2$.