Année 2022 - 2023

Algèbre linéaire
Méthode d'élimination de Laplace-Gauss
Calcul matriciel
Changement de bases
Optimisation

Par

Patrick Drouot

Chapitre n° 1: Calcul matriciel

I. Calculs matriciels.

1. Définition d'une matrice.

Définition:
Une matrice est un tableau de nombres réels (a_{ij}) repérés par leur numéro de ligne ... et de colonne ... . On dit qu'une matrice est de dimension .... lorsqu'elle est constituée de ... lignes et de ... colonnes.

On nomme traditionnellement les matrices à l'aide d'une lettre majuscule et on les encadre avec des parenthèses.
Exemple :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension .... , et $\boldsymbol{a_{23}} = \ldots$.
- $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice .... de dimension .... , et $\boldsymbol{b_{12}} = \ldots$.
- $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une matrice .... de dimension .... et $\boldsymbol{c_{31}} = \ldots$.
- $D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice .... de dimension .... et $\boldsymbol{d_{11}} = \ldots$.

Ainsi, un vecteur est une matrice .... ou une matrice ....

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- A est une matrice ....
- B est une matrice ....
- C est une matrice ....

2. Addition de matrices.

Définition:
Les matrices A et B étant de même dimension (n,p). On définit la matrice somme $C = A + B$ comme étant la matrice de dimension (n,p) obtenue en ajoutant terme à terme les éléments de A et de B.

Exemple :

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 1 & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice .... de dimension .....

Propriété

- L'addition de matrices est commutative : $A + B = B + A$.
- L'addition de matrices de dimension (n, p) possède un élément neutre, la matrice .... , notée ..... , c'est une matrice de dimension (n, p) dont tous les coefficients sont nuls

Ainsi, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, lorsqu'on écrit $A + 0$, on écrit .

Le vecteur nulle du plan s'écrit ou suivant que l'on note les coordonnées en colonne ou en ligne. Dans les deux cas, c'est une ....

3. Multiplication d'une matrice par un nombre réel.

Si $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$ alors le vecteurs $5\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées , et $-2\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées .
Il en est de même pour les matrices :

Définition:
Lorsqu'on multiplie une matrice par un nombre, on obtient une matrice de même dimension dont tous les éléments ont été multipliés par ce nombre.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ alors $2A =$ et $-A =$

$A + (-A) =$

Définition:
Etant donnée une matrice A. La matrice $\ldots = -1 \times A$ est appelée la matrice .... de A.

Exercice n° 1: Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$2A - 3B =$ ....

4. Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne.

Définition:
Le produit d'une matrice « ligne » (c'est-à-dire de dimension $(1, p)$) par une matrice colonne (c'est-à-dire de dimension $(p, 1)$) est « la somme des produits des coefficients entre eux ».

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots \\ b_{p1} \end{pmatrix}$ alors $AB = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + \ldots + a_{1p} \times b_{p1}$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} =$

Exercice n° 2: Calcule $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

5. Produit matriciel.

Propriété

Etant donné une matrice A de dimension $a \times b$ et une matrice B de dimension $c \times d$, le produit de la matrice A par la matrice B, noté AB, n'est défini que si . . . . Et dans ce cas, la dimension du produit AB sera $a \times d$. Et dans ce cas, la dimension du produit AB est $a \times d$:

$$\begin{bmatrix} \text{Matrice de} \\ \text{dimension } (\boldsymbol{a}, \ldots) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{Matrice de} \\ \text{dimension } (\ldots, \boldsymbol{d}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Matrice de} \\ \text{dimension } (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) \end{bmatrix}$$

Exemple : Parmi ces matrices, lesquelles peuvent être multipliées entre elles ? Et dans ce cas, quelle est la dimension de leur produit ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} , \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} , \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- Le produit AB : . . . .
- Le produit BA : . . . .
- Le produit AC : . . . .
- Le produit CA : . . . .
- Le produit BC : . . . .
- Le produit CB : . . . .

Corollaire

Pour que le produit d'une matrice A par une matrice B soit défini, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

Pour calculer le produit $C = \left(c_{ij}\right)$ d'une matrice $A = \left(a_{ij}\right)$ de dimension (n, p) par une matrice $B = \left(b_{ij}\right)$ de dimension $(\ldots, q)$, on multiplie les « lignes » de la matrice A par les « colonnes » de la matrice B :

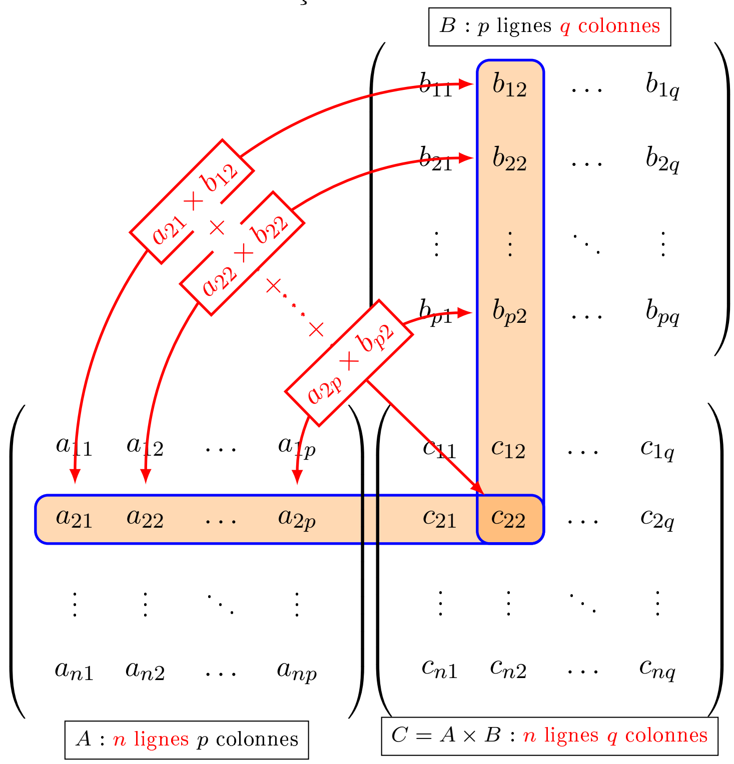
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \ldots \\ b_{qj} \end{pmatrix}$$

L'élément c_{ij} de la matrice $C = AB$ est égale au produit de la i^{e} ligne de la matrice A par la j^{e} colonne de B.

Exemple : Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. La dimension de A est . . . . et celle de B est . . . . , donc le produit AB est défini. La dimension de la matrice AB sera . . . .

On applique l'algorithme de droite, en plaçant les matrices d'une certaine façon :

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}}^{B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A} & \underbrace{\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}_{AB} \end{array}$$



Exercice n° 3: Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. Calcule, s'ils sont possibles, les produits AB, AC, et AD.

Exercice n° 4: On note A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ et B la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$AB =$ ....

$BA =$ ....

On constate que ....

Propriété
Le produit matriciel n'est pas ....

6. Transposée d'une matrice.

Définition: Transposée d'une matrice
La .... d'une matrice A est la matrice dont les lignes sont les colonnes de A. On la note .....

$$\text{Si } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}, \text{ alors } {}^tA = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}}$$

Exemple :

- Si $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$ alors ${}^tA =$ et ${}^t({}^tA) =$
- Si $B = \begin{pmatrix}7 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ alors ${}^tB =$

7. Matrice identité.

> **Définition:**
> Soit n un entier naturel.
> La **matrice identité d'ordre n** est
> $$I_n = \begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Exemple : Calculons $A \times I_3$.

$$\overbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}^{I_3}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 1 & 4\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}}_{A} \quad \underbrace{\begin{pmatrix}\dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots\end{pmatrix}}_{AI_3}$$

Exemple : $\underbrace{\begin{pmatrix}\dots & \dots\\ \dots & \dots\end{pmatrix}}_{I_2}\begin{pmatrix}7 & -3 & 8\\ 11 & 4 & -5\end{pmatrix} =$ et $\begin{pmatrix}3 & 15\\ 17 & 0\\ -1 & 6\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}\dots & \dots\\ \dots & \dots\end{pmatrix}}_{I_2} =$

Exemple : $I_1 = (\quad)$, $I_2 = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$, et $I_4 = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

II. Matrices carrées

> **Définition:**
> Une matrice carrée est une matrice ayant le même nombre de lignes que de colonnes. On dit qu'une matrice carrée est .... n si elle a n lignes, et donc n colonnes. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté ....

1. Puissances d'une matrice.

Du fait de nombre identique du nombre de lignes et de colonnes, on peut calculer la puissance d'une matrice :

> **Définition:** A^n
> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$. On définit les puissances de A de la façon suivante :
> $$A^0 = I_n \text{ et si } n > 0, A^p = A \times A^{p-1}$$

Propriété

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$(A^m)^k = A^{mk} \text{ et } A^m \times A^k = A^{m+k}$$

En général, $(AB)^k = \underbrace{(AB) \times (AB) \ldots \times (AB)}_{k \text{ fois}} \neq A^k B^k$, sauf dans le cas particulier où les deux matrices A et B commutent $(AB = BA)$:

$$(AB)^2 = AB \times AB = A \times \underbrace{B \times A} \times B = A \times \ldots \times \ldots \times B = \ldots\ldots$$

2. Matrices inverses.

Propriété

Si A est une matrice carrée d'ordre n alors :

$$BA = I_n \iff \ldots\ldots = I_n$$

Démonstration ardue.

Supposons que $BA = I_n$, et Considérons les applications linéaires $\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & Ax \end{array}$ et $\begin{array}{rccl} g\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & Bx \end{array}$.

$f(u) = f(v) \iff Au = Av \implies BAu = BAv \implies I_n u = I_n v \implies u = v$ donc f est injective.

En dimension finie, d'après le théorème du rang, une application linéaire injective est surjective, donc bijective.

$$(g \circ f)(x) = g(Ax) = BAx = I_n x = x$$

Etant donné un $y \in \mathbb{R}^n$, comme f est bijective, il existe, $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$, donc

$$\begin{aligned} g(y) &= g(f(x)) \\ g(y) &= (g \circ f)(x) \\ g(y) &= x \\ f(g(y)) &= f(x) \\ ABy &= y \end{aligned}$$

Donc, $AB = I_n$.

Définition:

Etant donnée une matrice A carrée d'ordre n. On dit que la matrice B est la matrice .... de A si, et seulement si,

$$AB = I_n \text{ ou } BA = I_n$$

La matrice inverse de A est notée .....

Remarque

Une matrice inversible n'a .... matrice inverse : car si une matrice carrée A d'ordre n avait deux matrices inverses B et C, on aurait :

$$\begin{aligned}(BA)C &= B(AC)\\ I_nC &= BI_n\\ C &= B\end{aligned}$$

Remarque

Si la matrice A est inversible, son inverse ne s'écrit pas $\frac{1}{A}$. D'ailleurs, si on écrivait $\frac{1}{A}$, que signifierait 1 ?

Exemple : Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned}&\bullet\ AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\\ &\bullet\ BA = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\text{ donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \text{ et } B^{-1} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

Propriété

Si A est une matrice inversible, $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$. Autrement dit, une matrice inversible commute avec sa matrice ....

$$\left.\begin{aligned}&\bullet\ CA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\\ &\bullet\ A^{-1}C = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\text{ donc } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarques

Une matrice inversible n'a aucune raison de commuter avec une autre matrice.

- Pour les nombres réels, le quotient $\frac{a}{b}$ est égal à ab^{-1} ou .... qui sont .... car la multiplication des réels est ....
- Mais, l'écriture fractionnaire $\frac{C}{A}$ n'a aucun sens, car ....

L'écriture fractionnaire $\frac{X}{Y}$ est .... , car elle ne précise pas si on multiplie X par l'inverse de Y à gauche ou à droite.

III. Calcul du déterminant.

Le calcul du déterminant d'une matrice permet de déterminer notamment si une matrice est inversible ou pas :

- Si $\det(A) \neq 0$ alors la matrice A est inversible.
- Si $\det(A) = 0$ alors la matrice A n'est pas inversible.

Le déterminant d'une matrice A est aussi noté .....

- **Le déterminant d'une matrice 2×2 :** $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

  Exemple :

  ✦ $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} =$ .... ✦ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$ ....

  ✦ $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 15 \end{vmatrix} =$ .... ✦ $\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$ ....

- **Le déterminant d'une matrice 3×3 :** On développe le déterminant suivant une ligne ou une colonne.

  Pour ce faire on attribue à chaque coefficient le signe $+$ ou $-$ du tableau suivant : $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Développement suivant la deuxième ligne :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 6^{-} & -1^{+} & 1^{-} \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -6 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -6 \times \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Développement suivant la dernière colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3^{+} \\ 4 & 5 & 6^{-} \\ 7 & 8 & 9^{+} \end{vmatrix} = \ldots\ldots \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \ldots\ldots \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \ldots\ldots \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \ldots\ldots \times \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} \ldots\ldots \times \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} \ldots\ldots \times \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice n° 5: Calcule les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ -3 & x \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \text{et } C = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice n° 6: Démontre que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Exercice n° 7: Parmi ces matrices, lesquelles sont inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 12 & 8 \end{pmatrix},\ \text{et } D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 8: Calcule le déterminant de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. En développant suivant la première colonne ;
2. en développant suivant la seconde ligne ;

IV. Comatrices et matrices inverses.

Définition:

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La .... de la matrice A, notée .... , est :

$$\begin{pmatrix} +d & -c \\ -b & +a \end{pmatrix}$$

Exercice n° 9: Calcule la comatrice de $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Propriété

Si la matrice A est inversible alors sa matrice inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ {}^t\mathrm{com}(A)$$

Exercice n° 10: La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Et si oui, quelle est sa matrice inverse ? Vérifie ton calcul.

Définition:

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. La .... de la matrice A est :

$$\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Exercice n° 11: La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Et si oui, quelle est sa matrice inverse ? Vérifie ton calcul.

Chapitre n° 2: Déterminant

I. Calculs matriciels.

1. Définition d'une matrice.

Définition:
Une matrice est un tableau de nombres réels (a_{ij}) repérés par leur numéro de ligne ... et de colonne ... . On dit qu'une matrice est de dimension .... lorsqu'elle est constituée de ... lignes et de ... colonnes.

On nomme traditionnellement les matrices à l'aide d'une lettre majuscule et on les encadre avec des parenthèses.
Exemple :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension .... , et $\boldsymbol{a_{23}} = \dots$.
- $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice .... de dimension .... , et $\boldsymbol{b_{12}} = \dots$.
- $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une matrice .... de dimension .... et $\boldsymbol{c_{31}} = \dots$.
- $D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice .... de dimension .... et $\boldsymbol{d_{11}} = \dots$.

Ainsi, un vecteur est une matrice .... ou une matrice ....

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- A est une matrice ....
- B est une matrice ....
- C est une matrice ....

2. Addition de matrices.

Définition:
Les matrices A et B étant de même dimension (n, p). On définit la matrice somme $C = A + B$ comme étant la matrice de dimension (n, p) obtenue en ajoutant terme à terme les éléments de A et de B.

Exemple :

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 1 & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice .... de dimension .....

Propriété

- L'addition de matrices est commutative : $A + B = B + A$.
- L'addition de matrices de dimension (n, p) possède un élément neutre, la matrice .... , notée ..... , c'est une matrice de dimension (n, p) dont tous les coefficients sont nuls

Ainsi, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, lorsqu'on écrit $A + 0$, on écrit .

Le vecteur nulle du plan s'écrit ou suivant que l'on note les coordonnées en colonne ou en ligne. Dans les deux cas, c'est une ....

3. Multiplication d'une matrice par un nombre réel.

Si $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$ alors le vecteurs $5\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées , et $-2\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées .

Il en est de même pour les matrices :

Définition:

Lorsqu'on multiplie une matrice par un nombre, on obtient une matrice de même dimension dont tous les éléments ont été multipliés par ce nombre.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ alors $2A =$ et $-A =$

$A + (-A) =$

Définition:

Etant donnée une matrice A. La matrice $\ldots = -1 \times A$ est appelée la matrice .... de A.

Exercice n° 1: Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$2A - 3B =$ ....

4. Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne.

Définition:

Le produit d'une matrice « ligne » (c'est-à-dire de dimension $(1, p)$) par une matrice colonne (c'est-à-dire de dimension $(p, 1)$) est « la somme des produits des coefficients entre eux ».

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{p1} \end{pmatrix}$ alors $AB = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + \ldots + a_{1p} \times b_{p1}$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} =$

Exercice n° 2: Calcule $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

5. Produit matriciel.

Propriété

Etant donné une matrice A de dimension $a \times b$ et une matrice B de dimension $c \times d$, le produit de la matrice A par la matrice B, noté AB, n'est défini que si .... Et dans ce cas, la dimension du produit AB sera $a \times d$. Et dans ce cas, la dimension du produit AB est $a \times d$:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Matrice de} \\ \text{dimension } (\boldsymbol{a}, \ldots) \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} \text{Matrice de} \\ \text{dimension } (\ldots, \boldsymbol{d}) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Matrice de} \\ \text{dimension } (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) \end{array} \right]$$

Exemple : Parmi ces matrices, lesquelles peuvent être multipliées entre elles ? Et dans ce cas, quelle est la dimension de leur produit ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- Le produit AB : ....
- Le produit BA : ....
- Le produit AC : ....
- Le produit CA : ....
- Le produit BC : ....
- Le produit CB : ....

Corollaire

Pour que le produit d'une matrice A par une matrice B soit défini, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

Pour calculer le produit $C = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix}$ d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$ de dimension (n, p) par une matrice $B = \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}$ de dimension $(\ldots, q)$, on multiplie les « lignes » de la matrice A par les « colonnes » de la matrice B :

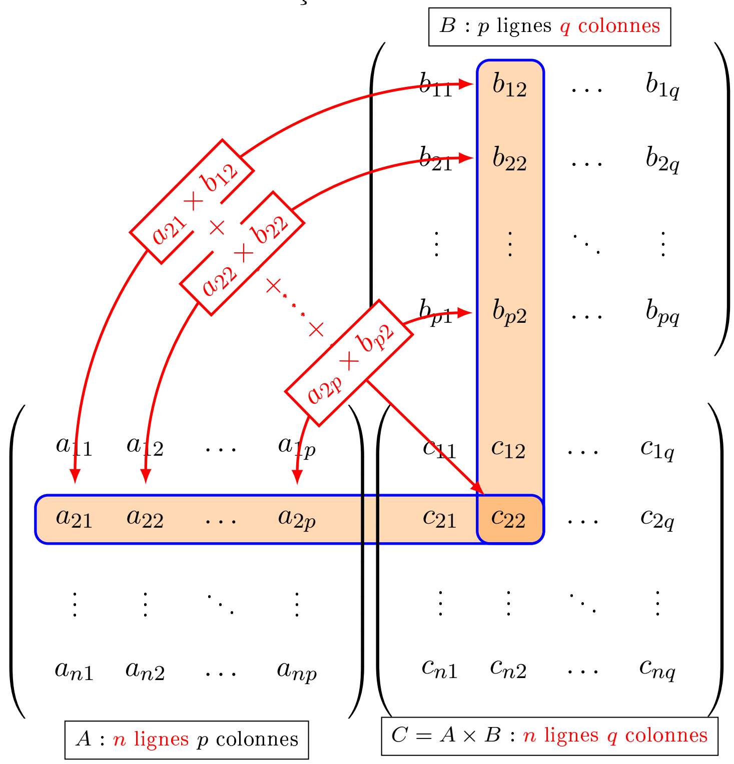
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{qj} \end{pmatrix}$$

L'élément c_{ij} de la matrice $C = AB$ est égale au produit de la i^{e} ligne de la matrice A par la j^{e} colonne de B.

Exemple : Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. La dimension de A est .... et celle de B est .... , donc le produit AB est défini. La dimension de la matrice AB sera ....

On applique l'algorithme de droite, en plaçant les matrices d'une certaine façon :

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}}^{B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A} & \underbrace{\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}_{AB} \end{array}$$



Exercice n° 3: Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. Calcule, s'ils sont possibles, les produits AB, AC, et AD.

Exercice n° 4: On note A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ et B la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$AB =$ ....

$BA =$ ....

On constate que ....

Propriété
Le produit matriciel n'est pas ....

6. Transposée d'une matrice.

Définition: Transposée d'une matrice
La .... d'une matrice A est la matrice dont les lignes sont les colonnes de A. On la note .....

$$\text{Si } A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}, \text{ alors } {}^tA = (a_{ji})_{\substack{1 \le j \le p \\ 1 \le i \le n}}$$

Exemple :

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA =$ et ${}^t({}^tA) =$
- Si $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors ${}^tB =$

7. Matrice identité.

Définition:

Soit n un entier naturel.
La **matrice identité d'ordre n** est

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple : Calculons $A \times I_3$.

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A} & \underbrace{\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}_{AI_3} \end{array}$$

Exemple : $\underbrace{\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}}_{I_2} \begin{pmatrix} 7 & -3 & 8 \\ 11 & 4 & -5 \end{pmatrix} =$ et $\begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 17 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}}_{I_2} =$

Exemple : $I_1 = (\quad)$, $I_2 = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$, et $I_4 = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

II. Matrices carrées

Définition:

Une matrice carrée est une matrice ayant le même nombre de lignes que de colonnes. On dit qu'une matrice carrée est .... n si elle a n lignes, et donc n colonnes. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté ....

1. Puissances d'une matrice.

Du fait de nombre identique du nombre de lignes et de colonnes, on peut calculer la puissance d'une matrice :

Définition: A^n

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$. On définit les puissances de A de la façon suivante :

$$A^0 = I_n \text{ et si } n > 0, A^p = A \times A^{p-1}$$

Propriété
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$(A^m)^k = A^{mk} \text{ et } A^m \times A^k = A^{m+k}$$

En général, $(AB)^k = \underbrace{(AB) \times (AB) \ldots \times (AB)}_{k \text{ fois}} \neq A^k B^k$, sauf dans le cas particulier où les deux matrices A et B commutent $(AB = BA)$:

$$(AB)^2 = AB \times AB = A \times \underbrace{B \times A} \times B = A \times \ldots \times \ldots \times B = \ldots\ldots$$

2. Matrices inverses.

Peut-on diviser des matrices entre elles ?

- Pour les nombres réels, $\dfrac{a}{b}$ signifie $a \times \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{b} \times a$ car la multiplication des réels est ....
- Par contre, pour les matrices se pose immédiatement un problème car, a priori, $A \times \dfrac{1}{B} \neq \dfrac{1}{B} \times A$ puisque la multiplication des matrices n'est pas .... Autrement dit, l'écriture $\dfrac{A}{B}$ est à proscrire car on ne sait pas si on multiplie A par l'inverse de B à gauche ou à droite. D'ailleurs, quand j'écris $\dfrac{1}{B}$, que signifie 1 ?

On ne divise pas les matrices entre elles.

Définition:
Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que la matrice B est la matrice inverse de A si $AB = I_n$.
La matrice inverse de A est notée .....

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{B} = \qquad\qquad \text{donc } A^{-1} = \ldots \quad \text{et } B^{-1} = \ldots$$

Propriété
Si $AB = I_n$ alors ....

C'est la raison pour laquelle il n'y a pas de matrices inverses à droite ou à gauche. La matrice inverse de B commute avec B : ....

Propriété
Si la matrice A est inversible alors $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

III. Calcul du déterminant.

Le calcul du déterminant d'une matrice permet de déterminer notamment si une matrice est inversible ou pas :

- Si $\det(A) \neq 0$ alors la matrice A est inversible.
- Si $\det(A) = 0$ alors la matrice A n'est pas inversible.

Le déterminant d'une matrice A est aussi noté .....

- **Le déterminant d'une matrice 2×2 :** $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

  Exemple :

  ✦ $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} =$ .... ✦ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$ ....

  ✦ $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 15 \end{vmatrix} =$ .... ✦ $\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$ ....

- **Le déterminant d'une matrice 3×3 :** On développe le déterminant suivant une ligne ou une colonne.

  Pour ce faire on attribue à chaque coefficient le signe $+$ ou $-$ du tableau suivant : $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Développement suivant la deuxième ligne :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 6^{-} & -1^{+} & 1^{-} \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -6 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -6 \times \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Développement suivant la dernière colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3^{+} \\ 4 & 5 & 6^{-} \\ 7 & 8 & 9^{+} \end{vmatrix} = \ldots\ldots \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \ldots\ldots \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \ldots\ldots \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \ldots\ldots \times \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} \ldots\ldots \times \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} \ldots\ldots \times \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice n° 5: Calcule les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ -3 & x \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \text{et } C = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice n° 6: Démontre que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Exercice n° 7: Parmi ces matrices, lesquelles sont inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 12 & 8 \end{pmatrix},\ \text{et } D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 8: Calcule le déterminant de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. En développant suivant la première colonne ;
2. en développant suivant la seconde ligne ;

IV. Comatrices et matrices inverses.

Définition:

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La .... de la matrice A, notée .... , est :

$$\begin{pmatrix} +d & -c \\ -b & +a \end{pmatrix}$$

Exercice n° 9: Calcule la comatrice de $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Propriété

Si la matrice A est inversible alors sa matrice inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^t\mathrm{com}(A)$$

Exercice n° 10: La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Et si oui, quelle est sa matrice inverse ? Vérifie ton calcul.

Définition:

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. La .... de la matrice A est :

$$\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Exercice n° 11: La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Et si oui, quelle est sa matrice inverse ? Vérifie ton calcul.

Chapitre n° 3: Méthode de Cramer

I. Systèmes linéaires carrés : les formules de Cramer

Pour résoudre un système de n équations linéaires à n inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & \dots & a_{1,j}x_j & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 & + & \dots & a_{i,j}x_j & + & \dots & + & a_{i,n}x_i & = & b_i \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_n & + & \dots & a_{n,j}x_j & + & \dots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}, \text{ on pose } \Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Théorème
Le système a une solution unique si et seulement si son déterminant Δ est ....

Théorème
Si $\Delta \neq 0$, l'unique solution du système est $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$ avec $j \in \{1, \dots, n\}$.

Δ_j le déterminant obtenu en remplaçant la j-ième colonne de Δ par le second membre.
Ces formules sont appelées les ....

Exemple : Résolvons le système $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x + 3y = 12 \end{cases}$.

Exercice n° 1: Résous les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 25 \\ 5x + 2y = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 6x + 7y = 6 \\ 3x - 14y = 13 \end{cases}$
3. $\begin{cases} -6x + 4y = 3 \\ -15x + 10y = 14 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 20x - 10y = 10 \\ 6x - 3y = 3 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases}$

Exemple : Résolvons $\begin{cases} px & + & p^2y & = & p \\ p^2x & - & py & = & 1 \end{cases}$

Exercice n° 2: Résous $\begin{cases} ax + y = 2 \\ (a^2+1)x + 2ay = 1 \end{cases}$

Remarque

A

ussi séduisantes qu'elles soient, les formules de Cramer sont parfaitement inefficaces pour les systèmes ayant un grand nombres d'équations, car les déterminants demandent un trop grand nombre de calculs.

Exercice n° 3: Résous le système $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ x - 3z = 1 \end{cases}$

Chapitre n° 4: Méthode d'élimination de Gauss-Jordan

En mathématiques, plus précisément en algèbre linéaire, l' .... , aussi appelée méthode du .... , nommée en hommage à Carl Friedrich Gauss et Wilhelm Jordan, est un algorithme pour déterminer les solutions d'un système d'équations linéaires, pour déterminer le rang d'une matrice ou pour calculer l'inverse d'une matrice (carrée) inversible. Lorsqu'on applique l'élimination de Gauss à une matrice, on obtient sa forme ....

I. Opérations sur les lignes.

Considérons le système : $\begin{cases} a+b+c+d=5 \\ a+2b-c+d=12 \\ 3a-b+2d=-5 \\ -a-2b+c=-9 \end{cases}$

A ce système on associe la matrice augmentée $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 12 \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$

Effectuons les opérations suivantes :

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2-L_1 \\ L_3-3L_1 \\ L_4+L_1 \end{array}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3+4L_2 \\ L_4+L_2 \end{array}$

A ce stade, on dit que la matrice est ....

La résolution algébrique d'une matrice .... est .... :

$\begin{cases} \quad\quad\quad\quad = 5 \\ \quad\quad\quad\quad = 7 \\ \quad -11c-d = 8 \\ \quad\quad\quad d = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} \quad\quad\quad\quad = 2 \\ \quad\quad\quad\quad = 7 \\ \quad\quad c \quad\; = \\ \quad\quad\quad d = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} \quad\quad\quad\quad = 3 \\ \quad b \quad\quad\; = \\ \quad\quad c \quad\; = \\ \quad\quad\quad d = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} a \quad\quad\quad\; = \\ \quad b \quad\quad\; = \\ \quad\quad c \quad\; = \\ \quad\quad\quad d = 3 \end{cases}$

La matrice associée à ce dernier système est :

La matrice est ....

Définition:

Une matrice est .... si le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne. Les premiers éléments non nuls commençant chacune des lignes sont appelés les éléments .... ou .... de la matrice échelonnée.

Exemple :

Les matrices $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont ....

II. Systèmes linéaires : le pivot de Gauss.

Définition:
On dit que deux systèmes linéaires sont .... s'ils ont le même ensemble de solutions.

Propriété : Les trois opérations élémentaires.
Partant d'un système linéaire quelconque, on obtient un système linéaire équivalent en lui appliquant l'une des opérations suivantes :

- Permutation de deux lignes L_i et L_j : ....
- Multiplication d'une ligne L_i par un scalaire α non nul : ....
- Addition à une ligne L_i d'un multiple αL_j d'une autre ligne $(j \neq i)$: ....

Pour aller plus vite, on peut directement appliquer $(j \neq i)$: ....
MAIS, il ne faut jamais que $\boldsymbol{\alpha}$ .... , car sinon, on perd la ligne .....

Le principe du pivot de Gauss est le suivant : par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes, on ramène la résolution du système initial à celle d'un système .... (triangulaire dans le cas des matrices carrées) :

Considérons un système linéaire de 4 équations et sa matrice augmentée associée :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & y & + & z & + & t & = & 10 \\ & & & & 3z & + & t & = & 1 \\ x & - & y & + & z & + & 2t & = & 4 \\ x & + & y & - & z & - & t & = & -3 \end{array}\right.$$

1. La Méthode d'élimination de Gauss-Jordan par l'exemple :

On permute les lignes L_1 et L_3 pour que le premiers coefficient, appelé pivot, ne soit pas nul :

$$\begin{array}{c} L_3 \\ L_1 \end{array} \xrightarrow{\text{pivot}}$$

On permute les lignes L_2 et L_3 pour que le deuxième pivot de la deuxième ligne ne soit pas nul :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \end{array}\right) \xrightarrow{\text{pivot}} \left(\begin{array}{cccc|c} \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \end{array}\right)$$

Le nouveau pivot est 3 :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & -27 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{pivot}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ & & & & \end{array}\right)$$

Le système est
. . . .

Il ne reste plus qu'à remonter le système pour déterminer la valeur de chacune des inconnues :

$$\begin{cases} x - y + z + \ldots = 4 \\ y + z + \ldots = 10 \\ 3z + \ldots = 1 \\ t = \ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y \ \ldots + 14 = 4 \\ y \ \ldots + 7 = 10 \\ z = \ldots \\ t = \ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ \ldots \ + 12 = 4 \\ y = \ldots \\ z = \ldots \\ t = \ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \ldots \\ y = \ldots \\ z = \ldots \\ t = \ldots \end{cases}$$

2. La Méthode d'élimination de Gauss-Jordan par l'algorithmique.

On permute les lignes pour que le premiers coefficient, appelé pivot, ne soit pas nul :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right) \xrightarrow[\text{le pivot de } L_1]{\text{On utilise}} \left(\begin{array}{cccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right)$$

On recommence de façon récursive avec la matrice encadrée.

Implémentation : Code en Python de la réduction d'une matrice :

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ lig \dashrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad col \\ \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,col-1} & a_{1,col} & \cdots & a_{1,p} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,col-1} & a_{2,col} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{lig,col} & \cdots & a_{lig,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,col} & \cdots & a_{n,p} \end{array}\right) \end{array}$$

```python
1 import numpy as np
2 a=np.matrix([[1,-3,17], [1,1,1],[2,-1,14],[2,1,6],[1,5,-15]],dtype=float)
3 n=a.shape[0] #nombre d'équations
4 p=a.shape[1] #nombre de variables + 1 (second membre)
5
6 def pivot(m,lig,col):
7     i=lig
8     while(m[i,col]==0 and i<n-1):i=i+1
9     if m[i,col]!=0:
10        if i!=lig :m[[i,lig],:]=m[[j,lig],:]
11        for i in range(lig+1,n):
12            a[i]=a[i]-a[lig]*a[i,col]/a[lig,col]#Elimination
13        lig=lig+1
14    col=col+1
15    if col!=p and lig!=n:pivot(m,lig,col)
16    return(m)
17
18 print(pivot(a,0,0))
```

Détails :

2 à 4 La matrice a du système à n lignes et p colonnes.

6 Initialisation de la fonction récursive pivot

7 à 9 Si dans la première colonne de la matrice encadrée en rouge, l'un des coefficient n'est pas nul :

– **alors :**

  - `10` Permutation la ligne contenant ce coefficient avec la ligne lig : $a_{lig,col}$ est alors non nul.
  - `12` "Elimination" avec la ligne lig (pivot $a_{lig,col}$) de tous les coefficients de la colonne col des lignes qui suivent la ligne lig.
  - `13` Incrémentation de lig de 1 puisque cette ligne vient de servir de pivot.
- **sinon :** La colonne col de la matrice encadrée en rouge ne contient que des zéros. Elle ne possède aucun pivot.

`14` Soit la colonne col de la matrice encadrée en rouge est pleine de zéro, soit $a_{lig,col}$ a servi de pivot donc :

On passe à la colonne suivante.

`15` Si les variable lig et col ne dépasse pas les dimensions de la matrice, on relance la fonction `pivot`.

Dans le cas où les matrices ont des coefficients entiers, pour éviter les nombres flottants, et donc les erreurs d'approximation, on peut remplacer la ligne `12` par :

```
a[i]=a[i]*a[lig,col]-a[lig]*a[i,col]#Elimination
```

Exercice n° 1: Résous les systèmes suivants :

$$(A)\begin{cases} x+y+2z=5\\ x-y-z=1\\ x+z=3\end{cases} \qquad (C)\begin{cases} 3x+2y-z=-3\\ x+2y+2z=10\\ 2x-4y+3z=19\end{cases} \qquad (E)\begin{cases} 2x+y-2z+3w=1\\ 3x+2y-z+2w=4\\ 3x+3y+3z-3w=5\end{cases}$$

$$(B)\begin{cases} 2y+z=-8\\ x+y-2z=5\\ 3x+2z=8\end{cases} \qquad (D)\begin{cases} -x+3y+2z=5\\ x+7y+4z=6\\ 3x+y=4\end{cases} \qquad (F)\begin{cases} x+2y-2z+3w=2\\ 2x+4y-3z+4w=5\\ 5x+10y-8z+11w=12\end{cases}$$

III. Application au calcul de l'inverse d'une matrice

Pour inverser une matrice carrée A de taille n, on crée une matrice augmentée à n lignes et $2n$ colonnes en bordant la matrice A par la matrice identité I_n, ce qui génère une matrice notée $A|I_n$. On va échelonner puis réduire la matrice A, et en même temps faire les mêmes opérations sur la matrice I_n. La matrice finale sera de la forme $I_n|A^{-1}$.

Exemple :

Calculons l'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix}2&4&2\\0&1&1\\2&2&-1\end{pmatrix}$

On échelonne (triangularise) le système :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 2 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ 2 & 2 & -1 & & & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 2 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ & & & & & \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & \end{array}\right)$$

Puis on le réduit (diagonalise) :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 + 2L_3 \\ L_2 + L_3 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

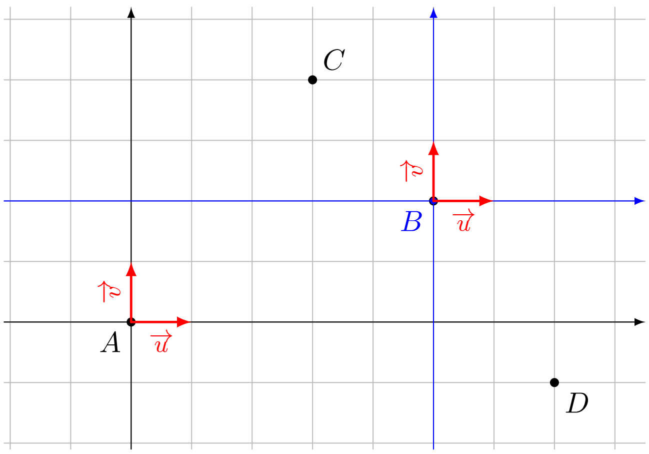
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Exercice n° 2: Détermine, si elle existe, la matrice inverse de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Chapitre n° 5: Valeurs propres et optimisation

I. Repères affines et Bases vectorielles



Dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ on a les coordonnées :

- $A\begin{pmatrix}\cdots\\\dots\end{pmatrix}$ • $B\begin{pmatrix}\cdots\\\dots\end{pmatrix}$ • $C\begin{pmatrix}\cdots\\\dots\end{pmatrix}$ • $D\begin{pmatrix}\cdots\\\dots 1\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AB} =$ .... donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\cdots\\\dots\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{BA} =$ .... donc $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}\cdots\\\dots\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{BD} =$ .... donc $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}\cdots\\\dots\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\cdots\\\dots\end{pmatrix}$ • $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}\cdots\\\dots\end{pmatrix}$

Dans le repère $(B, \vec{u}, \vec{v})$ on a : • $A\begin{pmatrix}\cdots\\\dots\end{pmatrix}$ • $B\begin{pmatrix}\cdots\\\dots\end{pmatrix}$ • $C\begin{pmatrix}\cdots\\\dots\end{pmatrix}$ • $D\begin{pmatrix}\cdots\\\dots\end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{AB} =$ .... donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{BD} =$ .... donc $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{BA} =$ .... donc $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\cdots\\\dots\end{pmatrix}$ • $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}\cdots\\\dots\end{pmatrix}$

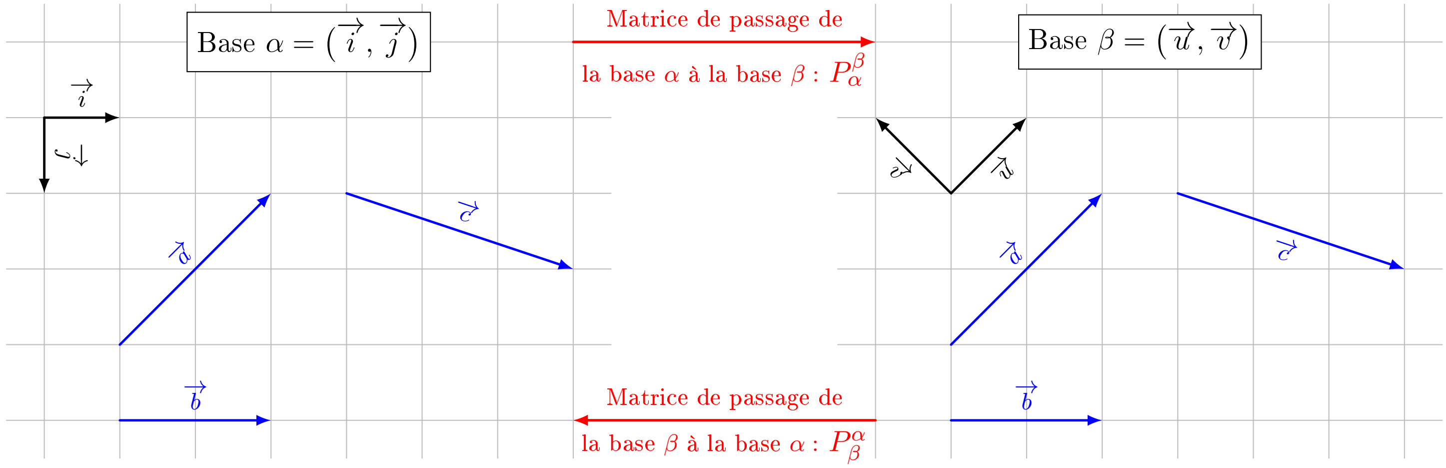
Les coordonnées d'un vecteur dans un repère ne dépendent pas du choix de .... Ainsi, si on retire l'origine d'un repère, il reste sa base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Définitions-propriétés

On dit que les vecteurs $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}$ forme une .... d'un espace vectoriel si pour chaque vecteur $\vec{m}$, il existe .... n-uplet de nombres réels $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tel que $\vec{m} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \dots + x_n\vec{e_n}$.

- Les n réels $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont les .... du vecteur $\vec{m}$ dans la base $\alpha = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$.
- On note ...... les coordonnées du vecteur $\vec{m}$ dans la base α.
- Dans le plan, pour que deux vecteurs forment une base, il faut et il suffit qu'ils ne soient pas ....
- Un espace vectoriel n'ayant pas de base est dit de dimension ....
- Si un espace vectoriel a une base, alors toutes les bases de cet espace vectoriel ont le même nombre de vecteurs.
- Un espace vectoriel est dit de dimension n s'il admet une base de n vecteurs.
- Le plan vectoriel est un espace vectoriel de dimension ...

II. Changement de bases



$$\left(\overrightarrow{i}\right)_\alpha = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad \left(\overrightarrow{j}\right)_\alpha = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \qquad \left(\overrightarrow{u}\right)_\beta = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad \left(\overrightarrow{v}\right)_\beta = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\left(\overrightarrow{a}\right)_\alpha = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad \left(\overrightarrow{b}\right)_\alpha = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad \left(\overrightarrow{c}\right)_\alpha = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \qquad \left(\overrightarrow{a}\right)_\beta = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad \left(\overrightarrow{b}\right)_\beta = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad \left(\overrightarrow{c}\right)_\beta = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\left(\overrightarrow{u}\right)_\alpha = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad \left(\overrightarrow{v}\right)_\alpha = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \qquad \left(\overrightarrow{i}\right)_\beta = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad \left(\overrightarrow{j}\right)_\beta = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Définition:
La matrice de passage de la base α à la base β, notée .... , est la matrice dont les colonnes sont constituées des ....

Ainsi, la matrice de passage de

- la base α à la base β est ....
- la base β à la base α est ....

Propriété
$\left(\overrightarrow{m}\right)_\alpha =$ .... et $\left(\overrightarrow{m}\right)_\beta =$ ....

Ainsi : $\left(\overrightarrow{c}\right)_\alpha = \underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}}\underbrace{\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ et $\left(\overrightarrow{c}\right)_\beta = \underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}}\underbrace{\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

La matrice de passage de la base α à la base β transforme les coordonnées exprimée dans la base β d'un vecteur à celles exprimées dans la base α : ça marche à l'envers !
La matrice de passage est dite .... pour les coordonnées.

Alors pourquoi ce nom ?

$$P_\alpha^\beta(\overrightarrow{i})_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (\overrightarrow{u})_\alpha \text{ et } P_\alpha^\beta(\overrightarrow{j})_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (\overrightarrow{v})_\alpha$$

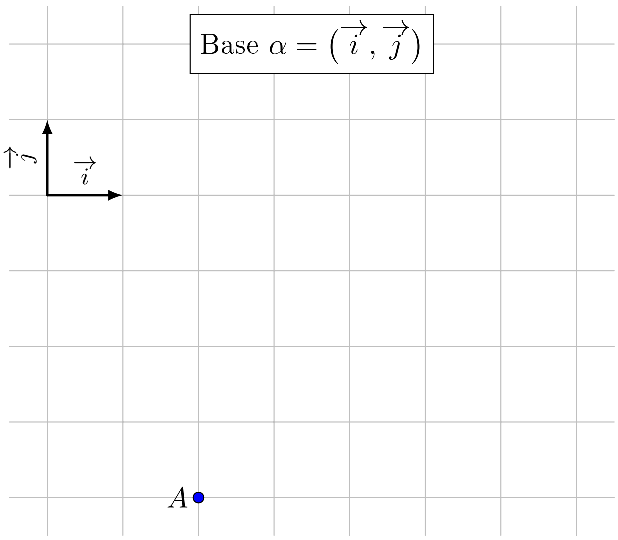
A réfléchir !...

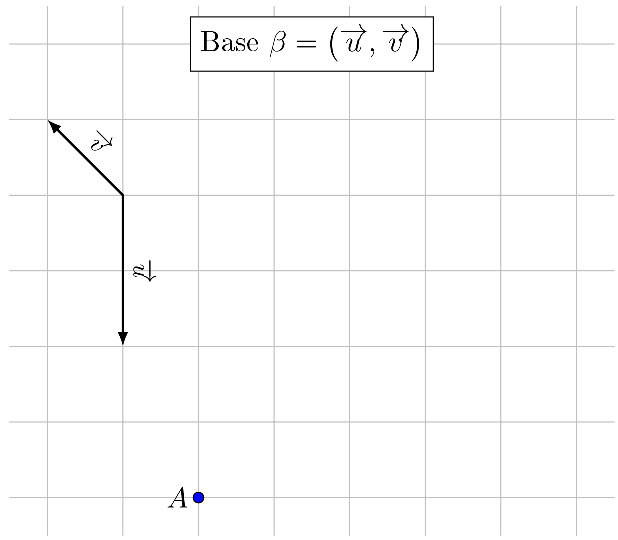
Calculons le produit : $P_\alpha^\beta P_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

Propriété

P_α^β est la matrice inverse de P_β^α.

Exercice n° 1:





1. Détermine la matrice de passage de la base α à la base β.
2. Détermine la matrice de passage de la base β à la base α.
3. Sachant que $(\overrightarrow{AB})_\beta \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, calcule ses coordonnées dans la base α, puis place le point B.
4. Sachant que $(\overrightarrow{BC})_\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, calcule ses coordonnées dans la base β, puis place le point C.
5. Détermine les coordonnées du vecteur $(\overrightarrow{AC})$ dans la base α, puis dans la base β.

Définition:

On appelle base .... d'un espace vectoriel, une base qui se présente de manière naturelle.

Exercice n° 2: Soit α la base canonique du laboratoire, et $\beta = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une base dont la matrice de passage est

$$P_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. P_α^β est la matrice de passage de quelle base à quelle base ?
2. On sait que $P_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$. Détermine a.
3. Soient $(\overrightarrow{a})_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $(\overrightarrow{b})_\beta = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Détermine $(\overrightarrow{a})_\beta$ et $(\overrightarrow{b})_\alpha$.

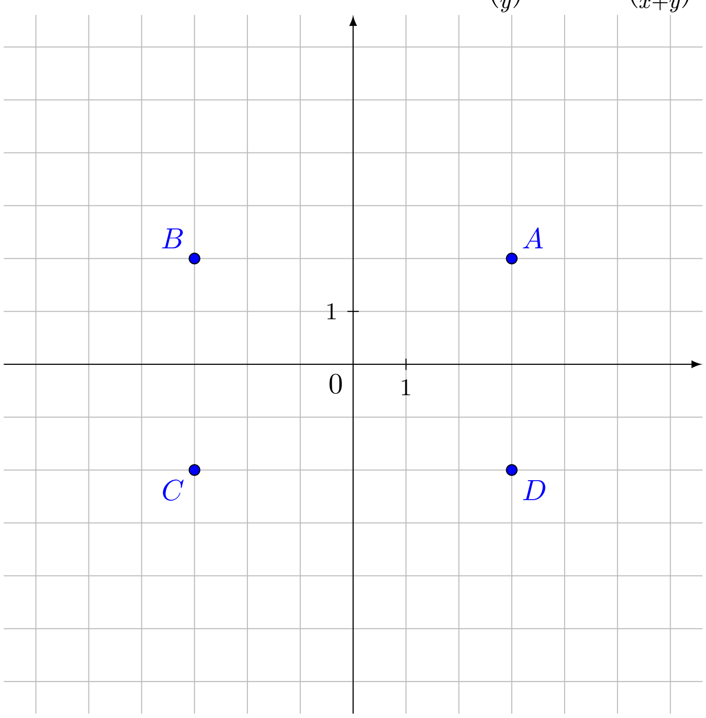
III. Application linéaire et matrice

Normalement, dans cette branche des mathématiques, l'algèbre linéaire, on ne travaille qu'avec des vecteurs. Pour des raisons didactiques, nous allons représenter les vecteurs par des points. A chaque point M du repère nous associerons le vecteur $\overrightarrow{m}$ partant de l'origine et allant vers le point M.

Rappel:
On dit qu'une application f est linéaire si pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, vecteur $\overrightarrow{v}$, réel a :

$$f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \text{et } f(a\overrightarrow{u}) = \dots\dots\dots\dots$$

Considérons l'application linéaire $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \binom{x}{y} & \longmapsto & \binom{x-y}{x+y} \end{array}$, et considérons les quatre points A, B, C et D suivants :



- $f(A) = f\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
- $f(B) = f\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
- $f(C) = f\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
- $f(D) = f\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

<u>Point de vu matriciel :</u>

- $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix} =$
- $f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
- $f(B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

Autrement dit, il semble qu'on puisse associer la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à l'application linéaire f.

Exercice n° 3: On note α la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et β la base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

1. Détermine la matrice de passage P_α^β.
2. Calcule $\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)_\alpha$ et déduis-en $\left(\overrightarrow{v}\right)_\beta$.
3. Calcule $\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right)_\alpha$. et déduis-en $\left(\overrightarrow{u}\right)_\beta$.
4. Déduis-en la matrice de passage de la base β à la base α.
5. Déduis-en les coordonnées de $f(A)$ dans la base β.
6. Déduis-en l'expression de l'application linéaire f dans la base β.

Notations :

La matrice de l'application linéaire f est notée $\underset{\alpha}{\text{mat}}(f)$ dans la base α, et .... dans la base β.

$\underset{\alpha}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\underset{\beta}{\text{mat}}(f) =$

Propriété

$\underset{\beta}{\text{mat}}(f) = P_\beta^\alpha \, \underset{\alpha}{\text{mat}}(f) \, P_\alpha^\beta$

IV. Diagonalisation

Définition:

Soit f une application linéaire. Un nombre λ est une .... de f s'il existe un vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que :

$$f(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v}$$

Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est appelé .... associé à la valeur propre λ.

Exemple : Considérons l'application linéaire $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \binom{x}{y} & \longmapsto & \binom{x+2y}{3x+2y} \end{array}$.

Vérifier que $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -1$ sont des valeurs propres de f.

Théorème

Soit f une application linéaire. On note A la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Exemple : Reprenons l'application linéaire précédente, et déterminons ses valeurs propres.

Définition:

Soit f une application linéaire. On dit que f est .... s'il existe une base β de E tel que :

$$\underset{\beta}{mat}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème

Soit f une application linéaire.

$$\underset{\beta}{\text{mat}}(f) \text{ est diagonale } \iff \beta \text{ est une base constituée de vecteurs propres}$$

Exemple :Détermine une base β où la matrice de l'application linéaire précédente est diagonale

Exercice n° 4: On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A quelle application linéaire f correspond-elle ?
2. Détermine ses valeurs propres.
3. Détermine un vecteur propre associé à chaque des valeurs propres.
4. Détermine une base β où la la matrice de l'application f est diagonale.
5. Détermine la matrice de f dans la base β.

Exercice n° 5: On considère l'application linéaire $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3x \\ x+2y \end{pmatrix} \end{array}$

1. Détermine ses valeurs propres.
2. Détermine un vecteur propre associé à chaque des valeurs propres.
3. Détermine une base β où la la matrice de l'application f est diagonale.
4. Détermine la matrice de f dans la base β.

Propriété

Si dans une base β, la matrice d'une application linéaire f est triangulaire :

$$\underset{\beta}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ou } \underset{\beta}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors ses valeurs propres sont les valeurs portées par sa diagonale.

Exemple : Dans l'exemple précédent, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ses valeurs propres sont donc 3 et 2.

V. Application à l'étude des fonctions à plusieurs variables.

1. Gradient d'une fonction à plusieurs variables.

Dans tout cette section, $f : \mathbb{R}^n \longleftrightarrow \mathbb{R}$ dérivable par rapport à chacune de ses variables.

Définition:

On appelle .... de f en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le vecteur colonne :

$$\nabla(f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \ldots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

On appelle .... de f $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tel que $\nabla(f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 10\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}$

Théorème

Si f admet un .... en un point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, alors $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un point critique de f.

Définition:

Si f admet des dérivées partielles d'ordre 2, alors on appelle .... de f en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la matrice :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Théorème

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un point critique de f. Si les valeurs propres de la matrice hessienne de f sont :

- strictement positives, alors f admet un minimum local en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
- sont strictement négatives, alors f admet un maximum local en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
- sont non nulles et deux de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et le point critique est appelé .... ou ....

2. Application aux fonctions réelles à deux variables.

Définition:

Si une fonction réelle f de deux variables réelles admet des dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et y, on appelle .... de f en (x, y) la matrice :

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Théorème

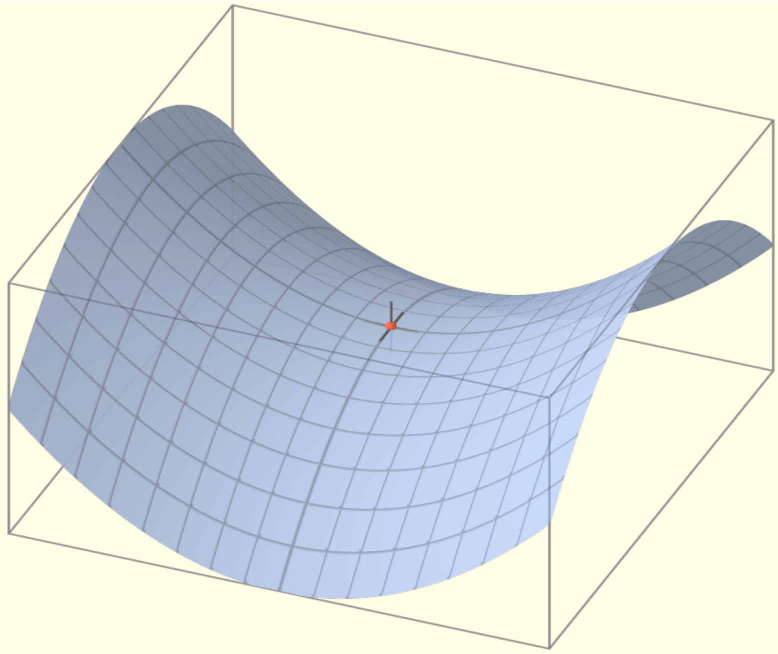
Si f est une fonction réelle de deux variables réelles de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, on a, pour tous réels x, y, h, et k :

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + {}^t\nabla(f)(x,y)\binom{h}{k} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \nabla^2(f)(x,y) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)$$

Théorème

Soit (x, y) un point critique de f. Si les valeurs propres de la matrice hessienne de f sont :

- strictement positives, alors f admet un .... local en (x, y) ;
- sont strictement négatives, alors f admet un .... local en (x, y) ;
- sont non nulles et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en (x, y) et le point critique est appelé .... ou .... :



Exercice n° 6: Trouver les points critiques et discuter leur nature pour $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:

1. $f(x, y) = (x-1)^2 + 2y^2$;
2. $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$.
3. $f(x, y) = x^2y - 4y$.
4. $f(x, y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

Exercice n° 7: Extremums multicritiques : Discuter la nature des points critiques de la fonction :

$$\begin{array}{rcl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto x^2y^2 + 4x^2y + 3x^2 - 4y^2 - 16y - 12 \end{array}$$

dont la surface est dessiner à droite.