Mathématiques pour le technicien 5

TD d'algèbre n° 1 - Semestre 5
Méthode d'élimination de Gauss-Jordan.

En mathématiques, plus précisément en algèbre linéaire, l' .... , aussi appelée méthode du .... , nommée en hommage à Carl Friedrich Gauss et Wilhelm Jordan, est un algorithme pour déterminer les solutions d'un système d'équations linéaires, pour déterminer le rang d'une matrice ou pour calculer l'inverse d'une matrice (carrée) inversible. Lorsqu'on applique l'élimination de Gauss à une matrice, on obtient sa forme ....

I. Opérations sur les lignes.

Considérons le système : $\begin{cases} a+b+c+d=5 \\ a+2b-c+d=12 \\ 3a-b+2d=-5 \\ -a-2b+c=-9 \end{cases}$

A ce système on associe la matrice augmentée $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 12 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$

Effectuons les opérations suivantes :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 3L_1 \\ L_4 + L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 + 4L_2 \\ L_4 + L_2 \end{array}$$

A ce stade, on dit que la matrice est ....

La résolution algébrique d'une matrice .... est .... :

$$\begin{cases} \qquad\qquad = 5 \\ \qquad\qquad = 7 \\ \quad - 11c - d = 8 \\ \qquad\qquad d = 3 \end{cases}$$

On résout un système échelonné du bas vers le haut.

$$\begin{cases} a \qquad\qquad = \\ \quad b \qquad\quad = \\ \qquad c \qquad = \\ \qquad\quad d = \; 3 \end{cases}$$

La matrice associée à ce dernier système est : $\left(\begin{array}{cccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

A ce stade, on dit que la matrice est ....

Définition:
Une matrice est .... si le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne. Les premiers éléments non nuls commençant chacune des lignes sont appelés les éléments .... ou .... de la matrice échelonnée.

Exemple : Les matrices $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont ....

II. Systèmes linéaires : le pivot de Gauss.

Définition:
On dit que deux systèmes linéaires sont .... s'ils ont le même ensemble de solutions.

Propriété : Les trois opérations élémentaires.
Partant d'un système linéaire quelconque, on obtient un système linéaire équivalent en lui appliquant l'une des opérations suivantes :

- Permutation de deux lignes L_i et L_j : ....
- Multiplication d'une ligne L_i par un scalaire α non nul : ....
- Addition à une ligne L_i d'un multiple αL_j d'une autre ligne $(j \neq i)$: ....

Pour aller plus vite, on peut directement appliquer $(j \neq i)$: ....
MAIS, il ne faut jamais que $\boldsymbol{\alpha}$ .... , car sinon, on perd l'information contenue dans la ligne .....

Le principe du pivot de Gauss est le suivant : par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes, on ramène la résolution du système initial à celle d'un système .... (triangulaire dans le cas des matrices carrées).

1. La Méthode d'élimination de Gauss-Jordan par l'exemple :

Considérons un système linéaire de 4 équations et sa matrice augmentée associée :

$$\begin{cases} y + z + t = 10 \\ 3z + t = 1 \\ x - y + z + 2t = 4 \\ x + y - z - t = -3 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

On commence par permuter les lignes $\boldsymbol{L_1}$ et $\boldsymbol{L_3}$ pour que le premier coefficient de la première ligne, celle du pivot, ne soit pas nul :

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_3 \\ \\ L_1 \\ \\ \end{array} \end{array} \xrightarrow{\text{pivot}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right) \dots\dots$$

La ligne qui vient de servir de pivot ne pourrait plus être utilisée.
On permute les lignes $\boldsymbol{L_2}$ et $\boldsymbol{L_3}$ pour que le deuxième pivot de la deuxième ligne ne soit pas nul :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ L_3 \\ L_2 \\ \\ \end{array} \xrightarrow{\text{pivot}} \left(\begin{array}{cccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \boxed{1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

Le nouveau pivot est 3 :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \boxed{3} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ 3L_4 + \dots \end{array}$$

Le système est
....

Il ne reste plus qu'à remonter le système pour déterminer la valeur de chacune des inconnues :

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots \\ 3z + t = 1 \\ t = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t = 7 \end{cases}$$

2. L'algorithme de la méthode d'élimination de Gauss-Jordan.

On permute les lignes pour que le premiers coefficient, appelé pivot, ne soit pas nul :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\dots} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right) \xrightarrow[\text{le pivot de } L_1]{\text{On utilise}} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\dots} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

On recommence de façon récursive avec la matrice encadrée.

Exemple : Résolvons $\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ a-b+c+d=10 \\ a-2b+c-d=-7 \\ 2a+3b+3d=4 \end{cases}$. Sa matrice augmentée associée est $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -7 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \dots \end{array}$$

La matrice est
....

donc, il ne reste plus qu'à remonter le système pour déterminer la valeur de chacune des inconnues :

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d = \dots \end{cases}$$

Au lieu de remonter le système pour déterminer la valeur des inconnues, on va .... la matrice échelonnée. Pour ce faire, on va appliquer la méthode du pivot de Gauss à "l'envers", en allant de la droite vers la gauche, et du bas vers le haut :

$$\underset{\text{(matrice échelonnée)}}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -44 \end{array}\right)} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 4 & \dots & \dots \\ 0 & -2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -8 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -44 \end{array}\right)\begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 11 \end{array}\right)\begin{array}{l} \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right)\begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \\ \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{array}\right)\begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \\ \\ \end{array}$$

La matrice est ....

on retrouve $\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \\ c = \dots \\ d = \dots \end{cases}$

Cette "réduction" peut sembler plus longue que la méthode algébrique où l'on remonte le système, mais elle est beaucoup plus rapide dans la résolution de systèmes plus compliqués.

Définition:

Une matrice est .... si

- ✦ elle est échelonnée ;
- ✦ le premier coefficient non nul de chaque ligne vaut 1, et c'est le seul non nul de sa colonne.

Exemple : Les matrices suivantes sont-elles réduites ?

a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ....

b. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ....

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ....

d. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ....

e. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ....

f. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ....

Exercice n° 1: Résous les systèmes suivants en échelonnant puis réduisant les matrices augmentées associées.

a. $\begin{cases} a - b + c = 14 \\ 2a + b - c = -2 \\ -a + b + 3c = -2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2a - b + c = -4 \\ a + b - c = -5 \\ -a + 2b - 3c = -5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2a - b + d = -1 \\ 6a - 3b - 2c = -1 \\ b + c = -1 \\ a - b - c - d = -1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} -2a+3b+c=0 \\ 4a+5c=1 \\ 10a-3b+9c=3 \end{cases}$ e. $\begin{cases} 2a-b=1 \\ 2a+2c=1 \\ 3a+2c=3 \\ -a+b=1 \end{cases}$

3. Sous-espace affine solution.

Commençons par résoudre le système suivant : $\begin{cases} a+2b+3c+d=0 \\ 4a-3c+e=0 \\ b+2c=1 \end{cases}$. On lui associe la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{c|c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right) \ldots\ldots$$

La matrice est ....

Les éléments .... (pivots) qui correspondent aux variables a, b, et c sont ..... . Les deux autres variables d et e sont .... Ce qui signifie que l'on peut exprimer les variables a, b, et c en fonctions des variables d, et e.

On réduit :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \ldots\ldots \\ \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \ldots\ldots \\ \\ \\ \end{array}$$

$\begin{cases} a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

L'ensemble des vecteurs de coordonnées (a, b, c, d, e) solutions du système est un plan .... de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^5$.

Définition:

Le nombre d'éléments .... d'un système échelonné ou de la matrice associée est appelé le ..... du système ou de la matrice.

théorème de Rouché-Fontené (1)

Les solutions d'un système linéaire de n variables de rang p engendre un sous-espace .... de dimension $n-p$.

Exemple :

- l'équation $3x+3y+2z=6$ sa matrice $\left(\begin{array}{c|c} \quad\quad & \quad \end{array}\right)$ est ....

  On la réduit : ....

  ....

  Son rang est ... ses solutions forment un sous-espace affine de dimension .... de .... : ....

(1). En italie, ce théorème est rebaptisé théorème de Rouché-Capelli.

- l'équation $-6x+3y-4z=-12$ sa matrice $\left(\qquad\qquad \middle| \qquad \right)$ est ....

  On la réduit :

  ....

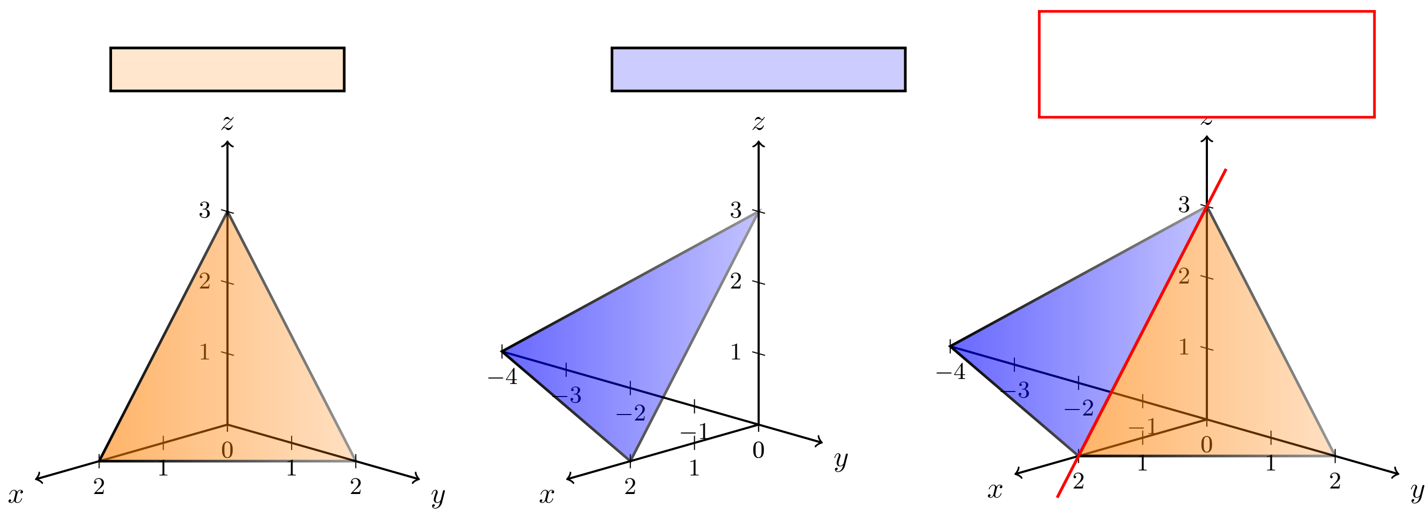
  Son rang est ... ses solutions forment ....

- le système $\begin{cases} 3x+3y+2z=6 \\ -6x+3y-4z=-12 \end{cases}$ sa matrice $\left(\qquad\qquad \middle| \qquad \right)$

  On l'échelonne : $\left(\qquad\qquad \middle| \qquad \right) L_1$, on réduit $\left(\qquad\qquad \middle| \qquad \right)$

  La matrice échelonnée et réduite est $\left(\qquad\qquad \middle| \qquad \right)$ soit $\begin{cases} x= \\ y= \end{cases}$ . ...

  .... Son rang est ... ses solutions forment ....



Exercice n° 2: Etudie les solutions des systèmes :

a. $\begin{cases} a+3b+3c+2d=6 \\ -2a-6b+c+3d=2 \\ a+3b-c-2d=-2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4a-2b+c-4d=4 \\ 6a-3b+c-7d=6 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2a-b+2d=1 \\ -2a+b-2d=5 \\ b+4d=-2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2a+8b+6c-3d+10e=7 \\ a+4b+3c+2d+5e=0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} a-b-c=-2 \\ b+c+d=0 \\ 2a+b+5c-d=0 \end{cases}$

f. $\begin{cases} a+b+d=3 \\ b-2c+d=-7 \\ a+b+c+2d=7 \end{cases}$

Mathématiques pour le technicien 5

TD d'algèbre n° 2 - Semestre 5
Géométrie dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

Les Éléments d'Euclide, mathématicien grec qui vécut aux alentours de 300 avant notre ère, sont la première formalisation occidentale des connaissances géométriques de l'époque. Les notions de droite, de plan, de longueur, d'aire y sont exposées et forment le support des cours de géométrie élémentaire. La conception de la géométrie est intimement liée à la vision de l'espace physique ambiant, et repose beaucoup sur un sens : la vue. Ce qui la limite à la dimension 2 et 3, et l'empêche de traiter des situations en dimension supérieure.

L'objet de ce cours est un survol des concepts modernes permettant d'appréhender une géométrie en dimension quelconque mais finie.

Pourquoi ajouter des dimensions ? [(2)]

- La **mécanique du solide** apporte un point de vue nouveau sur la géométrie euclidienne. Si notre espace décrit la position du centre de gravité, le solide peut tourner autour de ce centre. Il dispose encore de trois degrés de liberté supplémentaires. Il est nécessaire de considérer un espace de dimension six, pour rendre compte de la position exacte du solide.

  Il en est de même pour la vitesse. Elle est décrite par le mouvement du centre de gravité, représenté classiquement par un vecteur de l'espace physique et par une rotation, que l'on peut modéliser par un vecteur (vecteur perpendiculaire au plan de rotation et dont la longueur est proportionnelle à la vitesse angulaire). Mathématiquement, le champ des vitesses est dit équiprojectif et se représente par un torseur. L'espace auquel il appartient est encore de dimension six.

- En **mécanique statique**, un objet est considéré comme l'assemblage d'un ensemble de solides soumis à des contraintes qui les lient entre eux. L'objet est l'étude de la stabilité d'un corps, comme un pont ou un gratte-ciel. La dimension est égale à six fois le nombre de solides composant l'objet. Cette démarche est surtout développée durant le 20e siècle. En effet, la dimension croît rapidement et une puissance de calcul accessible uniquement depuis l'arrivée des ordinateurs est nécessaire pour rendre ces techniques opérationnelles.

Remarque : Cette démarche consistant à définir des espaces abstraits, qui ne représentent plus directement notre univers visible, mais des espaces spécifiques aux problèmes étudiés, est féconde. Elle permet d'utiliser les outils de la géométrie euclidienne dans des contextes variés.

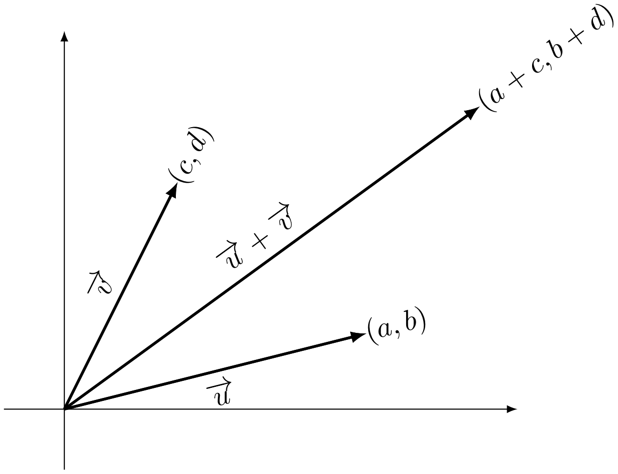
La géométrie euclidienne est une géométrie réelle, non pas au sens où elle existe (question philosophique), mais parce qu'elle est définie sur le corps des nombres réels, noté .... .

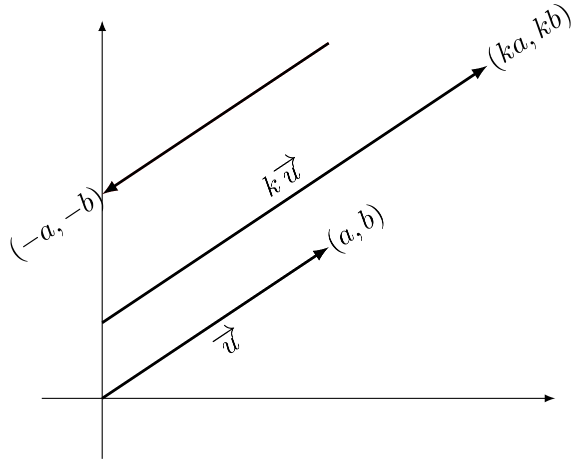
La géométrie euclidienne repose sur une branche particulière des mathématiques : l' ....

(2). Paragraphes repris sur le site de Wikipédia : géométrie euclidienne.

III. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.





2. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Définition:

Etant donnés : $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs, et deux nombres réels a et b, en munissant $\mathbb{R}^n$ des deux lois :

Une loi interne + définie par :

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(\overrightarrow{x}\ ,\ \overrightarrow{y}) \longmapsto \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} =$$

Une loi externe $\times$ définie par :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(a\ ,\ \overrightarrow{x}) \longmapsto a \times \overrightarrow{x} =$$

ont confère à $\mathbb{R}^n$ une structure d' ....

On écrit aussi $(\mathbb{R}^n, +, \times)$ est un ....

La structure d'espace vectoriel permet d'additionner des vecteurs et de les multiplier par un scalaire (un nombre réel). Cette structure permet de

- définir le parallélisme : *Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires (proportionnels)*;
- démontrer le théorème de Thalès, de Ménélaüs, de Ceva, etc.

Mais, elle ne permet pas de démontrer le théorème de Pythagore. Pour ce faire il faut pouvoir mesurer les longueurs et les angles, il nous faut donc introduite une structure supplémentaire :

3. La structure euclidienne.

Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$:

Définition:

Le **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté .... , est le scalaire obtenu en ajoutant les produits de composantes correspondantes :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = {}^t\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

Le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{u}$ par lui-même $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$, noté $\overrightarrow{u}^2$ est égal à ....
$\overrightarrow{u}^2$ est appelé le .... du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Définition:

La **norme** du vecteur $\overrightarrow{u}$, notée .... , est égale à $\sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}} =$ ....

Définition:

La mesure géométrique θ de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est définie par $\cos(\theta) = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|}$

Exercice n° 1: Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois points : $A\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $C\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Calcule les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Déduis-en une mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.
4. Détermine une mesure de l'angle géométrique $\widehat{CBA}$.

Mathématiques pour le technicien 5

TD d'algèbre n° 3 - Semestre 5
Bases de l'algèbre linéaire.

IV. Des bases de l'algèbre linéaire.

1. Combinaisons linéaires et sous-espaces vectoriels.

Définition:

Etant donnée une famille $\mathcal{V}$ de p vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots,$ et $\overrightarrow{u_p}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{V} = \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\right)$$

- Une .... de cette famille de vecteurs est une somme de la forme :

$$a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + \ldots + a_p\overrightarrow{u_p} \text{ où les } a_i \in \mathbb{R}$$

- un .... E de $\mathbb{R}^n$ est une partie de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ qui est .... par combinaison linéaire, autrement dit :

$$\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \overrightarrow{v} \in E, \forall a \in \mathbb{R}, \text{ et } \forall b \in \mathbb{R} : a\,\overrightarrow{u} + b\,\overrightarrow{v} \in E$$

Le symbole $\forall$ signifie quel que soit.

- L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{V}$ forme un .... de $\mathbb{R}^n$, noté $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\right)$.

Exemple :

1. $\left(2\overrightarrow{u_1} - 3\overrightarrow{u_2}\right) \in$ ....
2. $\left(\dfrac{4}{3}\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_3}\right) \in$ ....
3. $\left(4\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_1}\right) \in$ ....
4. $\left(2\overrightarrow{u_2} - 6\overrightarrow{u_2}\right) \in$ ....
5. $\left(3\overrightarrow{u_2} + 5\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_3}\right) \in$ ....

Exercice n° 1: Si $\left(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}\right) \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}\right)$ alors que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{u_2}$?

$$\left(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}\right) \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}\right) \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Définition:

Etant donnés deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

i. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont .... ;

ii. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont .... ;

iii. $\overrightarrow{u} \in$ .... ;

iv. $\overrightarrow{v} \in$ ....

Remarque :

- Le vecteur nul, noté ... , est colinéaire à tous les vecteurs, car quel que soit le vecteur $\overrightarrow{u}$ on a :

.... autrement dit ....

- La réciproque est fausse : $\text{Vect}\left(\overrightarrow{0}\right) =$ ..... est un espace vectoriel de dimension ...

Exercice n° 2: Si $\left(2\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_3}\right) \in \text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)$ alors que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{u_3}$?

$\left(2\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_3}\right) \in \text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) \iff$ ....

$\iff$ ....

$\iff$ ....

$\iff$ ....

$\iff$ ....

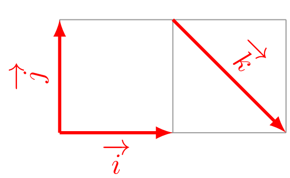
2. Familles libres et familles liées.

Définition:

Une famille de vecteurs est .... si aucun d'eux ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres.

Une famille de vecteurs est ...... si elle n'est pas libre. Autrement dit, une famille est ...... si l'un de ses vecteurs est une combinaison linéaire des autres.

Exemple : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ on considère les trois vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, et $\overrightarrow{k}$ suivants :



La famille $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est libre, car sinon il existerait un réel a tel que $\overrightarrow{j} = a\,\overrightarrow{i}$. Ce qui impossible puisque $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ ne sont pas ....

Il en est de même des familles ....

Par contre, la famille $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ n'est pas libre, car ....

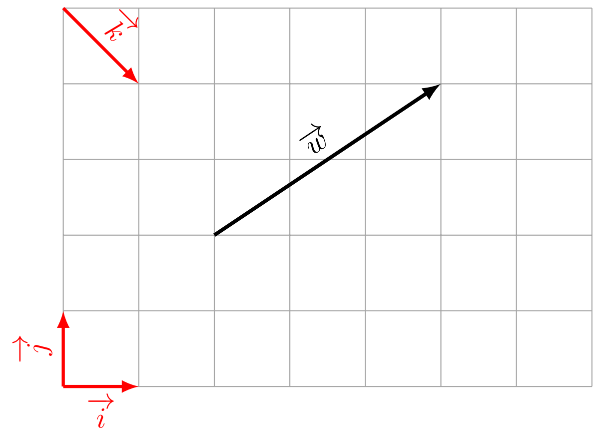
Théorème d'unicité

Soit $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p})$ est une famille libre. Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur qui est une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{V}$:

$$\overrightarrow{u} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{v_n}$$

alors cette décomposition de $\overrightarrow{u}$ en une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{V}$ est ....

Décomposition de $\overrightarrow{u}$ dans la famille ...... $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$



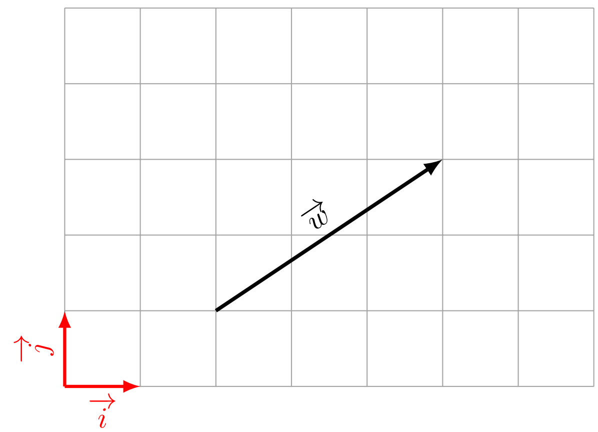
$\overrightarrow{w} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overrightarrow{w} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overrightarrow{w} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

On trouve trois combinaisons linéaires différentes des vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, et $\overrightarrow{k}$.

Décomposition de $\overrightarrow{u}$ dans la famille .... $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$



$\overrightarrow{w} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overrightarrow{w} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

On trouve toujours la même combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.

Exemple : Considérons dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, la famille de vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ où $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Est-elle libre ou liée ? C'est une question longue à traiter, car si cette famille est liée, alors quel vecteur est une combinaison linéaire des deux autres ? Si on suppose, par exemple, que $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{w}$, alors on est amené à résoudre le système :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \\ \ldots \end{pmatrix} \text{ soit } \left\{\begin{array}{rcrcr} 1 & = & 3a & - & b \\ 0 & = & a & - & b \\ -2 & = & & - & 4b \\ 3 & = & \ldots & + & \ldots \end{array}\right.$$

Si on trouve une solution à ce système, alors $\overrightarrow{u}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}$ et ... et la famille est liée. Mais, si on ne trouve pas de solution, cela signifie que $\overrightarrow{u}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, et on ne peut pas conclure, car peut-être que $\overrightarrow{v}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et ..., ou que $\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et ....

Dans le cas où la famille est libre, on doit pour le démontrer, résoudre trois systèmes et ne trouver pour chacun d'entre eux ....

Réfléchissons différemment en étudiant le système suivant :

$$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \text{ d'inconnues } (a, b, c)$$

Il a une solution évidente : $(x, y, z) = (\ldots, \ldots, \ldots)$. Supposons qu'il ait une autre solution, donc non nulle. Si, par exemple, $a \neq 0$, alors, $a\overrightarrow{u} = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\overrightarrow{u} = \dfrac{-b\overrightarrow{v} - c\overrightarrow{w}}{a} = -\dfrac{b}{a}\overrightarrow{v} - \dfrac{c}{a}\overrightarrow{w}$, et $\overrightarrow{u}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ donc la famille est liée. Il s'en suit le théorème suivant :

Théorème

Une famille $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p})$ est

- .... si et seulement si : $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{0}$ entraîne que les λ_i sont tous nuls ;
- ...... si et seulement si, il existe un λ_i non nul tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{0}$.

Appliquons ce théorème à notre exemple introductif. On écrit le système en remplaçant les λ_i par des a, b, c, etc.

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\1\\0\\5\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ soit } \begin{cases} a + 3b - c = 0 \\ \quad\ \ b - c = 0 \\ -2a \quad - 4c = 0 \\ \qquad\qquad = \end{cases} \quad \begin{cases} a + 3b - c = 0 \\ \quad\ \ b - c = 0 \\ \qquad\quad = 0 \quad L_3 + \ldots L_1 \\ \qquad\quad = 0 \quad L_4 - \ldots L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 3b - c = 0 \\ \quad\ \ b - c = 0 \\ \quad\ \ \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = 0 \quad \ldots\ldots \\ \quad\ \ \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = 0 \quad \ldots\ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 3b - c = 0 \\ \quad\ \ b - c = 0 \end{cases} \text{ est } \ldots\ldots\ldots\ldots\ .$$

La variable c est libre. Donc, elle peut prendre n'importe quelle valeur. Le système a donc une solution non nulle : la famille est ....

Allons plus loin :

$$\begin{cases} a = \ldots \\ b = \ c \end{cases} \text{ pour } c = 1 \text{ on obtient : } \begin{cases} a = \ldots \\ b = \ldots \\ c = \ 1 \end{cases} \text{ donc } -2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}. \text{ Il s'en suit que } \overrightarrow{v} = \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Vérifions : $2\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\3\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}} - \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\\1\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{w}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\ldots\\\ldots\\\ldots\\\ldots\end{pmatrix}}_{\ldots}$

Démonstration du théorème d'unicité de la décomposition.

Soit $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_p})$ est une famille de vecteurs. Supposons que $\overrightarrow{u}$ ait deux décompositions différentes :

$$\overrightarrow{u} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{v_n} \text{ et } \overrightarrow{u} = b_1\overrightarrow{v_1} + b_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + b_n\overrightarrow{v_n}$$

Elles sont différentes, donc il existe un indice p tel que $a_p \neq b_p$. En soustrayant ces deux combinaisons linéaires :

$$\overrightarrow{0} = (a_1 - b_1)\overrightarrow{v_1} + (a_2 - b_2)\overrightarrow{v_2} + \ldots + \underbrace{(a_p - b_p)}_{\neq 0}\overrightarrow{v_p} + \ldots + (a_n - b_n)\overrightarrow{v_n}$$

Ce qui entraîne que la famille $\mathcal{V}$ est liée ($\lambda_p \neq 0$).

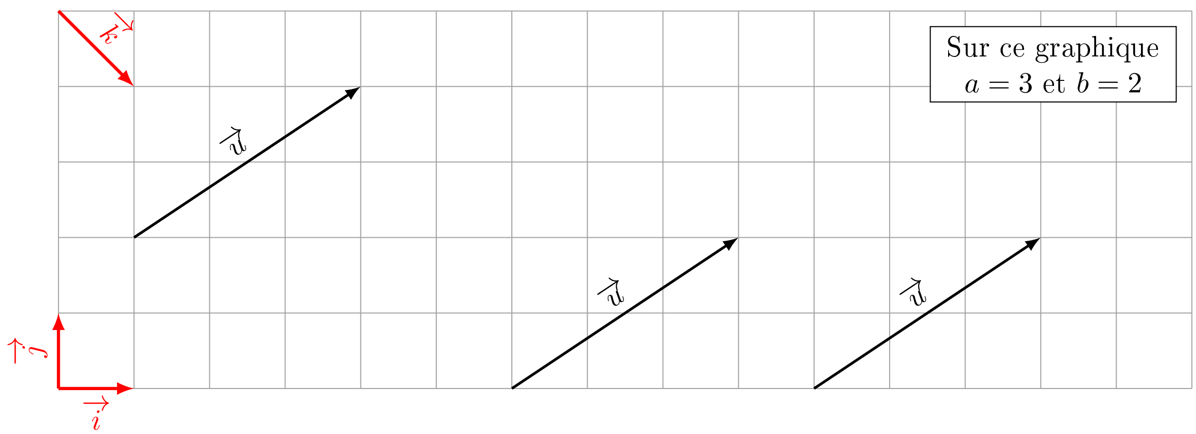
3. Familles génératrices et bases.

Définition:

Etant donnée une famille $\mathcal{V} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k})$ de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, et un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$. La famille $\mathcal{V}$ est .... du sous-espace vectoriel E si

$$E = \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k})$$

Exemple : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ on considère les trois vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, et $\overrightarrow{k}$ suivants :



$\boxed{1}$ On voit qu'un vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose horizontalement, en un multiple du vecteur $\overrightarrow{i}$: ..... , et verticalement, en un multiple du vecteur $\overrightarrow{j}$: ..... . On a $\overrightarrow{u}$ = ...

Donc, la famille $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est génératrice : $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$\boxed{2}$ En remarquant que $\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} = \ldots$, comme $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$, on en déduit en remplaçant $\overrightarrow{i}$ par $\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ que $\overrightarrow{u}$ = ... Donc, la famille $(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est génératrice : $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

$\boxed{3}$ En remarquant que $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$, on en déduit que $\overrightarrow{u}$ = ... Donc, la famille $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$ est génératrice : $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$.

$\boxed{4}$ Il s'en suit que la famille $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est génératrice : $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Définition:

Une famille de vecteurs génératrice d'un sous-espace vectoriel E et libre est appelée une ..... .

Exemple : Dans l'exemple précédent,

- Les familles $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}\right)$, et $\left(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}\right)$ sont libres et génératrices de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, donc chacune est une base de $\mathbb{R}^2$.

- Par contre, la famille $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ qui est génératrice de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, n'est pas libre puisque $\overrightarrow{i} =$ .... , donc elle ne forme pas une base de $\mathbb{R}^2$.

Théorème

Tout espace vectoriel ayant une base a toutes ses bases ayant le même nombre de vecteurs.

Définition:

Un espace vectoriel E ayant une base de n vecteurs est dit de dimension n. On note ....

Un espace vectoriel n'ayant aucune base est dit de dimension ....

Exemple : D'après l'étude précédente, $\dim\left(\mathbb{R}^2\right) = \ldots$

Propriété

Si $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}\right)$ est une base d'un espace vectoriel E, alors chaque vecteur $\overrightarrow{u}$ de E se décompose de manière unique en une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$\overrightarrow{u} = x_1\overrightarrow{b_1} + x_2\overrightarrow{b_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{b_n} \text{ où les nombres réels } x_i \text{ sont uniques.}$$

On dit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour .... $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

4. Représentation graphique de sous-espaces vectoriels.

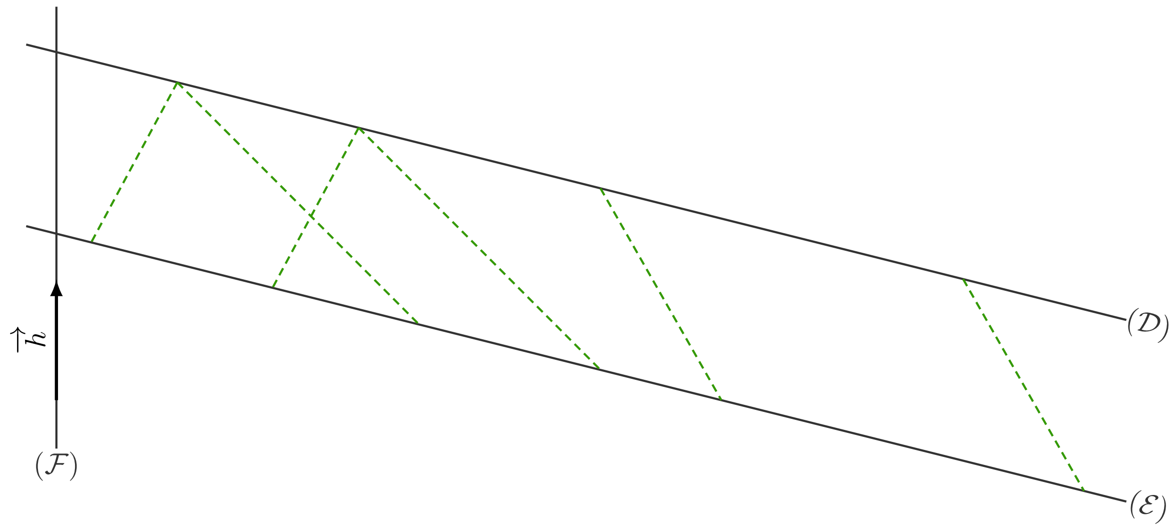
La représentation graphique des vecteurs est une interprétation sensible d'un objet abstrait. Elle est trompeuse dans la mesure où elle peut vous pousser à l'erreur. Il est difficile de s'imaginer un vecteur puisqu'il n'est pas fixe. Il semble être à un endroit alors qu'il est aussi à un autre. Mais la représentation ne se limite pas à ses caractéristiques trompeuses. Elle est nécessaire pour s'en approprier certains aspects.

A. Les droites vectorielles.

Définition:

Une .... est l'espace vectoriel engendré par un vecteur non nul. Autrement dit, si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ alors $\text{Vect}\left(\overrightarrow{u}\right)$ est la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{u}$.

Exemple : Considérons les trois droites $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{E})$, et $(\mathcal{F})$ où $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{E})$ sont parallèles.



$\text{Vect}(\overrightarrow{u})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires du vecteur $\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{u}$: $\text{Vect}(\overrightarrow{u}) = \left\{a\overrightarrow{u} \text{ où } a \in \mathbb{R}\right\}$ que l'on note aussi ....

Autrement dit, $\text{Vect}(\overrightarrow{u}) = \ldots$ qui est l'ensemble tous les vecteurs "contenus" dans la droite $\mathcal{D}$, c'est la droite ....

Remarque :

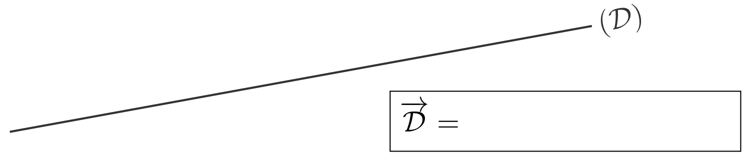
- La droite vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ est égale à la droite vectorielle ....
- Les droites vectorielles $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{F}} =$ ..... ne sont pas ....

Définition:
On dit que deux droites sont .... si, et seulement si, elles engendrent la même droite vectorielle.

Exercice n° 3: Si $\overrightarrow{w} \in \text{Vect}(\overrightarrow{u})$ alors que peut-on dire de la droite vectorielle $\text{Vect}(\overrightarrow{w})$?

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w} \in \text{Vect}(\overrightarrow{u}) &\iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

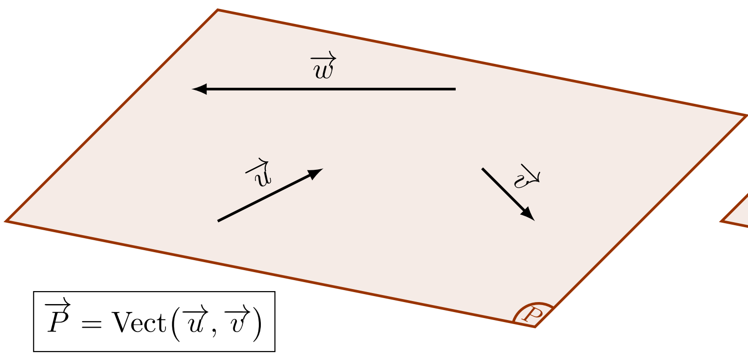
Propriété
$\text{Vect}(\overrightarrow{u}) = \text{Vect}(\overrightarrow{v}) \iff$ les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont ....
Conséquences : $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ est engendrée par n'importe quel vecteur non nul "contenu" dans la droite $(\mathcal{D})$.

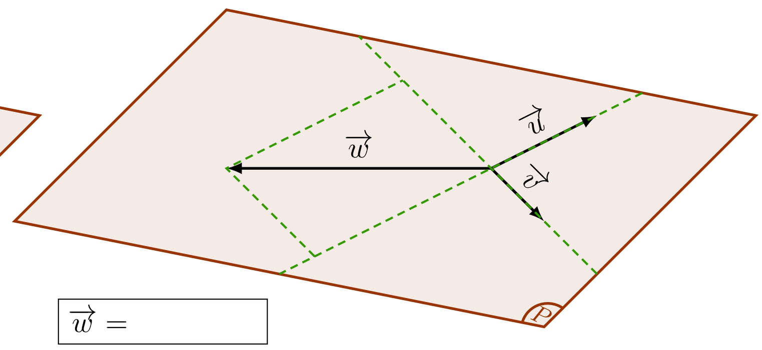


B. Les plans vectoriels.

Définition:
Un .... est un espace vectoriel engendré par deux vecteurs ....

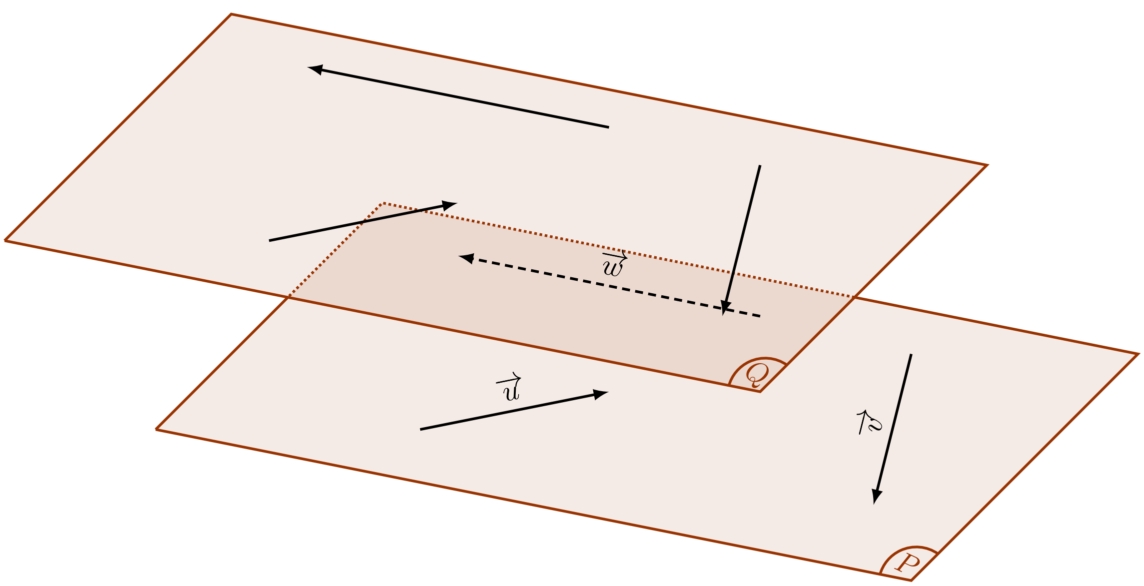
Exemple : Considérons $\overrightarrow{P} = \text{Vect}\big(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\big)$ et $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{P}$





Propriété
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires d'un plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ alors $\overrightarrow{P} = \text{Vect}\big(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\big)$

Exemple : Considérons les deux plans parallèles (P) et (Q) suivants :



On constate que tous les vecteurs du plan (P) sont dans le plan (Q) et vice versa : .....

Théorème

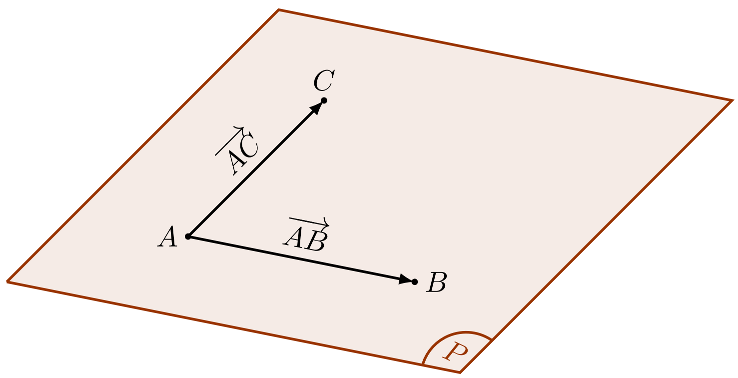
Deux plans de l'espace sont .... si et seulement si leurs plans vectoriels sont égaux.

Définition:

- Des vecteurs de l'espace sont .... s'ils appartiennent à un même plan vectoriel.
- Des points de l'espace sont .... s'ils engendrent une famille de vecteurs coplanaires.

Remarque :

- Si trois vecteurs de l'espace sont coplanaires, alors l'un deux est une ....
- Deux vecteurs sont toujours coplanaires.
- Une famille d'un, deux, ou trois trois points est toujours coplanaire.

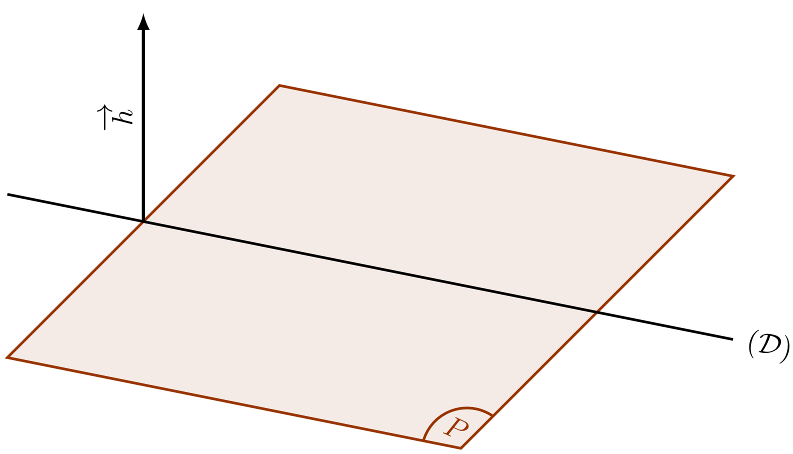


$\overrightarrow{BC} =$ ....

Trois points non lignés n'engendrent que deux vecteurs libres.

C. Sous-espaces vectoriels.

Exemple : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on a :



On voit que : $\overrightarrow{\mathcal{D}} = \text{Vect}(\ldots)$, $\overrightarrow{P} = \text{Vect}(\ldots\ldots\ldots)$ et enfin que $h \ldots \overrightarrow{P}$, donc $\text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{h}) = \ldots$.

- L'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ est .... dans $\overrightarrow{P}$ donc $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ est un .... de $\overrightarrow{P}$.
- L'espace vectoriel $\overrightarrow{P}$ est .... dans $\mathbb{R}^3$ donc $\overrightarrow{P}$ est un .... de $\mathbb{R}^3$.

Mathématiques pour le technicien 5

TD d'algèbre n° 4 - Semestre 5
Equations cartésiennes - Vecteur normaux - Hyperplans tangents.