Chapitre A

Proportion et taux d'évolution

Sommaire

I) Tests de compétences sur les proportions et les taux 2
II) Les proportions en pourcentage 2
1) Le format pourcentage 2
2) Les proportions de proportions 3
III) Taux d'évolution en pourcentage 3
IV) Calcul de taux d'évolution global et moyen 4
1) Calcul d'un taux global 4
2) Calcul d'un taux moyen 4
V) Exercices Divers 4

I) Tests de compétences sur les proportions et les taux

L'utilisation de proportion et de taux d'évolution, exprimés avec le format pourcentage, est fréquente en économie, en gestion, en finance, ou dans la communication de résultats commerciaux.
Il est donc important de bien maîtriser ce type de calculs, en particulier quand on travaille avec un tableur. Avant d'étudier les pages qui suivent procédons à un petit test...

1. Parmi les 2980 participants à un rassemblement festif, 1937 sont des jeunes de 25 ans ou moins. Quelle est en pourcentage la proportion des jeunes de 25 ans ou moins à ce rassemblement ? Écrire la formule qui permet de la calculer.
   Sachant de plus que la proportion des filles parmi les jeunes de 25 ans ou moins est de 54%, déterminer la proportion des filles de 25 ans ou moins dans ce rassemblement.
2. L'effectif des usagers d'un parc de loisirs est passé de 2480 à 2825 du mois de juin au mois de juillet. Quel est en pourcentage le taux d'évolution entre juin et juillet ?
   Écrire la formule qui permet de le calculer.
3. Le prix de vente TTC d'un article est de 382,72€ . Quel est son montant HT, sachant que le taux de la TVA appliquée sur cet article est de 19,6% ?
4. Le chiffre d'affaires d'une entreprise était de 680000€ en 2010. Sur les années suivantes, il a subi les évolutions successives suivantes :
   +5% ; +7% ; -3% ; +2% .
   Sans calcul des chiffres d'affaires intermédiaires, quel a été le taux d'évolution global entre 2010 et 2014 ?
5. Les données sont celles du test 4. Quel est le taux d'évolution moyen entre 2010 et 2014 ?

II) Les proportions en pourcentage

1) Le format pourcentage

Avec les données du **test1**, la proportion des jeunes de 25 ans ou moins parmi les participants est :
$p = \dfrac{1937}{2980} = 0{,}65 = \dfrac{65}{100} = 65\%$ et on notera que :

- 0,65 est le format décimal
- $\dfrac{65}{100}$ est le format fraction
- 65% est le format pourcentage

Proportion en pourcentage:

Si E désigne un ensemble de référence, d'effectif total N, et A désigne une partie de E, d'effectif n. La proportion de A dans E est $p = \dfrac{n}{N}$.

Remarque:

- ***Attention !!!*** *La formule n'est pas :* $p = \dfrac{n}{N} \times 100$. *Cette remarque est très importante lorsque l'on travaille sur tableur. En effet le tableur considère la notation % comme un format de nombre.*
- *La formule* $p = \dfrac{n}{N}$ *s'écrit aussi de deux manières équivalentes :* $N = \dfrac{n}{p}$ *et* $n = p.N$.

2) Les proportions de proportions

Les données sont toujours celles du **test1**.
N=2980 est l'effectif total de l'ensemble E des participants à la fête. La proportion des jeunes de 25 ans ou moins est $p_1 = 65\%$ et la proportion des filles parmi les moins de 25 ans est $p_2 = 54\%$.
La proportion de filles et de moins de 25 ans parmi tous les participants à la fête est de : $p = p_1 \times p_2$
soit $p = 0{,}65 \times 0{,}54 = 0{,}351 = 35{,}10\%$.

Proportion de proportion:

Pour faire des proportions de proportion, on en fait le produit.

III) Taux d'évolution en pourcentage

Taux d'évolution en pourcentage:

Pour faire un taux d'évolution en pourcentage on procédera au calcul suivant : $\dfrac{V_{\text{Finale}} - V_{\text{Initiale}}}{V_{\text{Initiale}}}$

Remarque:

Sur tableur la formule suivante sera privilégiée : Taux d'évolution$=\dfrac{V_{\text{Finale}}}{V_{\text{Initiale}}} - 1$

Exemple:

- *Avec les données du* ***test2****, le taux d'évolution entre juin et juillet est de :* $\dfrac{2825 - 2480}{2480} = 0{,}1391 = 13{,}91\%$.
- *La question du* ***test3*** *revient à calculer une valeur initiale (montant HT) connaissant la valeur finale 382,72 (montant TTC) après augmentation de 19,6%.*
  Soit $0{,}196 = \dfrac{382{,}72}{V_{\text{Initiale}}} - 1 \iff V_{\text{Initiale}} = \dfrac{382{,}72}{1{,}196} = 320$

CM=Coefficient Multiplicateur:

Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'évolution est donné par la formule suivante :

$$\text{CM} = \frac{V_{\text{Finale}}}{V_{\text{Initiale}}} = 1 + \text{Taux d'évolution}$$

IV) Calcul de taux d'évolution global et moyen

Il arrive souvent qu'on cherche à suivre l'évolution d'une valeur numérique de mois en mois, de trimestre, d'année en année : chiffre d'affaires, quantité, tarif, dépense, etc.
Dans ce cas, on pourra chercher à résumer l'évolution de cette valeur numérique par un taux global, et par un taux moyen.

1) Calcul d'un taux global

Évolution successives:

Lorsqu'une grandeur subit plusieurs évolutions successives de taux $t_1,t_2,\dots,t_n$ le taux d'évolution global est calculé à partir du coefficient multiplicateur global, qui est le produit des coefficients multiplicateurs : $CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2 \times \cdots \times CM_n$ et bien sûr $\text{t}_{\text{global}} = CM_{\text{global}} - 1$.

Exemple:

*Pour le **test4**, le coefficient multiplicateur global est :* $1{,}05 \times 1{,}07 \times 0{,}97 \times 1{,}02 \sim 1{,}1116$. *D'où le taux global=1,1116-1=0,1116, ce qui correspond à un taux global de 11,16%.*

2) Calcul d'un taux moyen

Taux moyen:

Le taux moyen est le taux constant qui donnerait la même évolution globale sur les périodes consécutives, que sur la succession des taux observés sur chaque période.

$$CM_{\text{moyen}} = (CM_1 \times CM_2 \times \cdots \times CM_n)^{1/n} = (CM_{\text{global}})^{1/n} \text{ et } \ \text{t}_{\text{moyen}} = CM_{\text{moyen}} - 1$$

Remarque:

De même que le taux global n'est pas la somme des taux : le taux moyen n'est pas la moyenne arithmétique des taux.

Exemple:

*Pour le **test5**, le coefficient multiplicateur moyen est de :* $1.1116^{1/4} = 1{,}0268$, *soit un taux moyen de* $2{,}68\%$.

V) Exercices Divers

Exercice A1 ***Les soldes***

En fin de période de soldes, un commerçant espère vendre la fin d'un stock en proposant une remise supplémentaire sur un article déjà soldé 20%. Quelle remise supplémentaire doit-il afficher pour que la baisse totale sur le prix de cet article soit de 40% (par rapport au prix avant solde) ?

Exercice A2 ***Montants HT et TTC***

1. *Déterminer le montant hors taxes d'un article vendu 134,16 € sachant que le taux de TVA appliquée est de 20% ?*
2. *Quel sera le prix de cet article après une hausse de 10% de son montant HT, et une remise de 15% proposée par le revendeur sur le prix TTC ? Quel est le taux d'évolution du prix final par rapport au prix initial de 134,16 € ?*

Exercice A3 ***Évolution d'une quantité*** *Une société a suivi l'évolution des ventes d'une marchandise au cours des 4 premiers mois de l'année 2014. Le tableau ci-dessous donne, en pourcentage, le taux d'évolution de la quantité vendue, pour chaque mois par rapport au mois précédent, ainsi que la quantité vendue en Avril.*

Mois	*Janvier*	*Février*	*Mars*	*Avril*	*Quantité vendue en Avril*
Quantité	*+2%*	*+8%*	*+6%*	*-2,5%*	*8540*

1. *Quel a été le pourcentage d'évolution de la quantité vendue entre décembre 2013 et avril 2014 ?*
2. *Quel a été le pourcentage d'évolution moyen de la quantité vendue entre décembre 2013 et avril 2014 ?*
3. *Quelle était, à l'unité près, la quantité vendue en décembre 2013 ?*
4. *Sachant que la quantité vendue en décembre 2013 représentait 8,8% du total des ventes au cours de l'année 2013, quelle était, à l'unité, la quantité vendue au cours de l'année 2013 ?*

Exercice A4 ***Le coût du carburant***

1. *Le prix du litre de carburant dans une station service a augmenté de 1,02€ à 1,08€ . Quel est en pourcentage le taux d'évolution de ce prix ?*
2. *Quel est en pourcentage le taux de variation de la quantité de carburant achetée pour un montant total de 40 € ?*
3. *Écrire la formule de calcul donnant le taux d'évolution T de la quantité de carburant achetée pour un montant de A euros, lorsque le prix du litre subit une évolution d'un taux t (Indication : travailler sur les coefficients multiplicateurs).*

Exercice A5 ***Le prix du café***

1. *Le prix d'un paquet de café de 150 g de la marque BONGRAIN est passé le premier juin à 3,12 € , à la suite d'une augmentation de 4%. Quel était le prix de ce paquet la veille (31 mai) ?*
2. *Une opération de promotion est lancée le premier juillet avec la mise en vente de paquets contenant 20% de café gratuit en plus, toujours à 3,12 € . Pour un paquet acheté le premier juillet, quelle est en pourcentage, la variation du prix au kilogramme à la suite de cette offre promotionnelle ?*
3. *Quelle est en pourcentage la variation du prix du kilogramme de café de cette marque entre un paquet acheté le 31 mai, et un paquet acheté en promotion le* 1^{er} *juillet ?*

Exercice A6 ***Le chiffre d'affaires de TREMPLIN*** *La société TREMPLIN a donné l'évolution de son chiffre d'affaires pour chaque année par rapport à l'année précédente, de 2017 à 2020 :*

Année	*2017*	*2018*	*2019*	*2020*
Chiffre d'affaires	*+8%*	*-3%*	*+12%*	*+16%*

Au cours d'un repas au restaurant d'entreprise, un cadre de la société a griffonné les 3 calculs suivants sur un coin de la nappe en papier :

Premier calcul : $200 \times 1{,}12 \times 1{,}16 = 259{,}84$

Deuxième calcul : $8 - 3 + 12 + 16 = 33\%$

Troisième calcul : $33\%/4 = 8{,}25\%$

Pour chacun des trois calculs :

1. *préciser quelle était l'intention de ce cadre lorsqu'il a effectué ce calcul (NB : pour le premier calcul, préciser aussi ce que peut représenter la valeur 200)*
2. *préciser si sa méthode est correcte ; et sinon , quel était le bon calcul à effectuer ?*
3. *donner une conclusion.*

Chapitre B

Placement à taux d'intérêts simples ou composés

Sommaire

I) Les intérêts simples 7
II) Escompter une traite 7
1) L'escompte des effets de commerce 7
2) Les agios 8
3) Pratique de l'escompte 9
III) Les intérêts composés 10
1) Exemple de placement à intérêts composés 10
2) Formule de la valeur acquise, à intérêts composés 11
3) Utilisation du solveur financier des calculatrices 12
IV) Utilisation de la formule de la valeur acquise : 3 exemples 13
1) Calcul de V_0 connaissant r, n, et V_n 13
2) Calcul du taux r connaissant V_0, n et V_n 13
3) Calcul de la durée n en connaissant r,V_0, et V_n 13
V) Exercices Divers 14

I) Les intérêts simples

Les intérêts simples sont utilisés dans des opérations financières à court terme, en particulier lorsque la durée est inférieure à un an. Ils sont proportionnels à la durée totale du prêt ou du placement, et sont versés en une seule fois, au début ou à la fin de l'opération.
Une année comporte 12 mois. Selon la durée de l'opération financière, les calculs sont effectués de date à date avec une année de 365 jours .

Exemple:

Une somme de 5000€ est placée à intérêts simples au taux annuel de 6% . Quel est le montant des intérêts simples au bout de 4 mois ?

Intérêts annuels$=5\,000\times 6\% = 300$
Intérêts sur 4 mois $=300\times\frac{4}{12}=100$€
Valeur acquise à la fin des 4 mois$=5\,000+100=5100$ € .

Exemple:

Une somme de 8 000€ est placée à intérêts simples au taux mensuel de 0,8% , le 27 avril 2021. Quel sera le montant des intérêts le 15 septembre 2021, s'il est convenu que les jours sont comptés de date à date, mais que l'année est de 365 jours ?

Intérêts mensuels$=8\,000\times 0{,}8\%=64$
Nombre de jours$=3+31+30+31+31+15=141$
Montant des intérêts au 15 septembre$=(64\times 12)\times\frac{141}{365}=296{,}68$€
Valeur acquise au 15 septembre$=8\,000+296{,}68=8\,296{,}68$€

II) Escompter une traite

1) L'escompte des effets de commerce

Lorsqu'une vente s'effectue à crédit, le vendeur doit attendre l'échéance pour être payé. Or , il est possible qu'il ait entre temps des problèmes de trésorerie. Pour les prévenir, il peut utiliser des lettres de change ou traites.

Mots clefs:

- La **lettre de change ou traite** est un écrit par lequel le créancier donne l'ordre à son débiteur de payer à une date fixée, une somme déterminée à une personne désignée. En pratique , le créancier se désigne lui-même comme bénéficiaire. Ce document représente donc une sorte de droit de propriété sur une créance payable à une date déterminée.
- A tout moment, le créancier peut demander à son débiteur **l'acceptation** de l'effet. En acceptant un effet, le tiré s'oblige à en payer le montant à l'échéance ; cette acceptation est constatée par par la signature du tiré précédée du mot « accepté(e) ». L'acceptation a des effets très importants : le tiré s'engage irrévocablement à payer à échéance.

(suite):

- Le vendeur muni d'une traite a la possibilité :

  - d'attendre l'échéance pour se faire payer,

  - plus fréquemment de "vendre" sa traite à un banquier, ce qui lui permet de disposer des fonds avant l'échéance. C'est ce qu'on appelle **l'escompte**.L'escompte , qui permet aux entreprises de disposer de liquidités avant l'échéance de leur créances , est un instrument de **mobilisation de créances commerciales**.

- Lors de la remise à l'escompte, la banque achète l'effet et se substitue au créancier dans les droits qui s'y attachent, c'est à dire que c'est elle qui le présentera au débiteur à échéance. Elle verse immédiatement les fonds au créantier. Elle prélève cependant sa rémunération : les **agios**.
  Les agios comprennent **l'escompte commercial**, intérêt de l'argent avancé et une **commission bancaire** soumise à la TVA qui rémunère le service rendu. La différence entre la valeur nominale de l'effet et les agios est appelé **valeur nette**. C'est la somme que la banque porte sur le compte.

2) Les agios

Les agios d'escompte comportent l'escompte à proprement dit et des commissions.

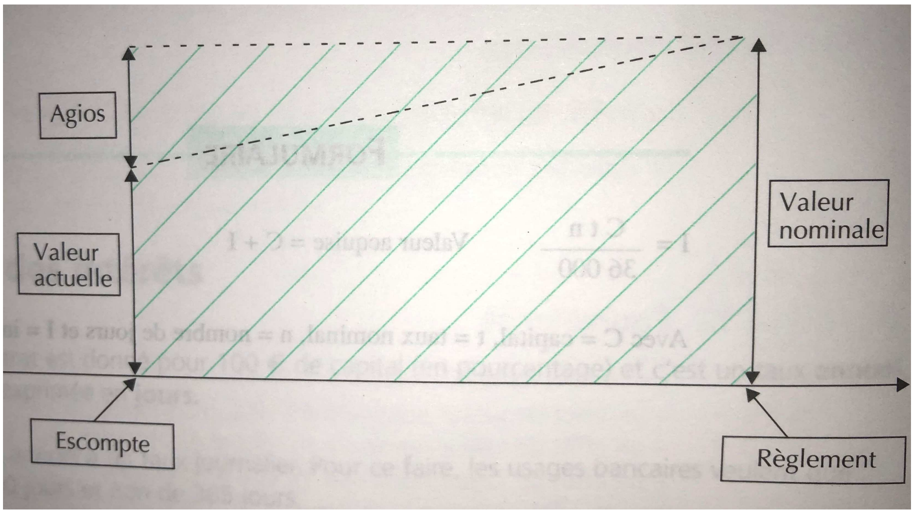
Propriété B1:

L'escompte L'escompte se déduit du montant de l'effet (valeur nominale). On obtient la ***valeur actuelle*** *de l'effet.*

- N = *valeur nominale ou effet*
- t = *taux d'escompte*
- n = *nombre de jours entre la date d'acquisition et le terme de la créance.*

$$\textbf{Escompte} = \frac{Ntn}{365} \text{ ou } \textbf{Escompte} = \frac{Ntn}{366} \text{ les années bissextiles.}$$

Valeur actuelle=Valeur Nominal-Escompte



Exemple:

Soit un effet de 7800€ arrivant à échéance dans 60 jours en 2022. Calculez sa valeur actuelle en cas d'escompte à un taux de 12%.

Le montant de l'escompte sera de :

$E = \frac{Ntn}{365} = \dfrac{7800 \times 12 \times 60}{365} = 153{,}86€$

La valeur actuelle sera de :

$VA = ValeurNominal - Escompte = 7800 - 153{,}86 = 7646{,}14€$. *C'est le montant versé par la banque.*

Remarque:

On s'aperçoit qu'à l'inverse des intérêts simples, l'escompte se calcule sur la valeur remboursée (nominale) et non sur la valeur prêtée (actuelle). Cet usage augmente la marge du banquier.

3) Pratique de l'escompte

Méthode pratique :

- ***Le taux d'escompte***

  Le taux d'escompte appliqué par une banque à ses clients, est nécessairement plus élevé que le taux du marché monétaire, sinon la banque qui « mobilise »son portefeuille n'aurait aucun bénéfice. Le taux d'escompte est donc calculé à partir du taux de base bancaire majoré d'un certain nombre de points suivant le risque.

- ***Les durées***

  Les délais de traitement des opérations bancaires ont généralisé l'utilisation de jours de valeurs qui viennent majorer la durée d'un jour selon un système comparable au chèque (le dépot d'un chèque au guichet n'est porté au compte du client que plusieurs jours plus tard. Inversement, un retrait d'espèces au guichet ou dans un distributeur de billets est débité du compte la veille ou l'avant-veille de l'opération).

- ***Les commissions***

  Généralement fixes, elles rémunèrent les services de la banque. Elles sont soumises à la TVA.

Exemple:

Calcul du net sur une remise à l'escompte. *Banque Verzy*

Bordereau de remise à l'escompte

Sté Fabrice Compte N-42 253 J

Date :26/03/2022

Effet	Tiré	Echéance	Montant
021	Reboc	30/04/2022	4200
022	Nic	05/05/2022	3100

Conditions à appliquer :

Taux d'escompte : 10%

Un jour de date de valeur

Commission de service : 4€ HT par effet

1. ***Calcul du nombre de jours***

   Effet 021 : $30/04/2022 - 26/03/2022 + 1 = 35 + 1 = 36 jours$

   Effet 022 : $0505/2022 - 26/03/2022 + 1 = 40 + 1 = 41 jours$

2. ***Calcul des intérêts***

   Effet 021 : $\dfrac{4200 \times 10\% \times 36}{365} = 41{,}42$€

   Effet 022 : $\dfrac{3100 \times 10\% \times 41}{365} = 34{,}82$€

   *Total :*76,24€

3. ***Commission :*** $2 \times 4 = 8$€

4. ***TVA sur commission :*** $8 \times 20\% = 1{,}60$€

5. ***Net sur remise à l'escompte :***

Nominal de la remise	7300,00
Intérêts	−77,31
Commission (dont TVA=1,60€)	−9,57
Net sur remise à l'escompte	7213,12

Méthode pratique :

Escompte=$\dfrac{N \times t \times n}{365(ou 366)}$

Agios=Escompte+Commissions TTC

Net=Nominal-Agios

III) Les intérêts composés

1) Exemple de placement à intérêts composés

$V_0 = 8000$€ désigne un capital placé le 20/04/2016 sur un compte rémunéré au taux annuel $r = 3{,}5\%$, à intérêts composés. On suppose que :

- Le taux d'intérêt en changera pas au cours des années à venir.
- Aucun autre versement n'est effectué après le versement initial.

Le 20/04/2026, après 10 années complètes de placement, quel sera le capital disponible appelé aussi valeur acquise ?

On note V_n, la valeur acquise à la date 20/04/(2016+n), après n années de placement.

Au 20/04/2017, après n=1 année de placement, on a :

$$V_1 = 8000 + \frac{3{,}5}{100} \times 8000 = 8000 \times 1{,}035 = 8280\text{€}\,.$$

Le montant des intérêts est donc de 280€ la première année.

Dire que les intérêts sont composés revient à dire que le capital placé au cours de la $2^{ème}$ est 8280€ : Les intérêts ne sont pas retirés pour être utilisés, mais "ajoutés" ou "composés" au capital de départ.

Au 20/04/2018, la valeur acquise est donc :

$$V_2 = 8280 + \frac{3{,}5}{100} \times 8280 = 8280 \times 1{,}035 = 8569{,}80€ .$$

Le montant des intérêts est alors : 8569,80-8280=289,80 , supérieur aux intérêts de la première année puisque le capital initial est supérieur.

On pourrait continuer à calculer la valeur acquise successivement pour chaque valeur de l'année n (et c'est d'ailleurs très facile à obtenir sur un tableur) ; on va plutôt modéliser la situation de la manière suivante :
Pour tout $n \geq 0$, on a : $V_{n+1} = V_n + \dfrac{3{,}5}{100} \times V_n$
donc : $V_{n+1} = V_n \times 1{,}035$
et on reconnait la formule de récurrence caractéristique d'une suite géométrique de raison $q = 1{,}035$ et de 1^{er} terme $V_0 = 8000$. Il en résulte que V_n peut être calculé directement en fonction de n :

$$V_n = V_0 \times 1{,}035^n = 8000 \times 1{,}035^n$$

On notera même que sans connaissance approfondies sur les suites géométriques, la formule qui vient d'être utilisée résulte de manière intuitive du schéma ci-dessous ;

$$V_0 \underset{\times 1{,}035}{\longrightarrow} V_1 \underset{\times 1{,}035}{\longrightarrow} V_2 \underset{\times 1{,}035}{\longrightarrow} V_3 \underset{\times 1{,}035}{\longrightarrow} V_4 \underset{etc}{\longrightarrow} \dots$$

En particulier, la valeur acquise le 20/04/2026, après 10 années de placements, sera :

$$V_{10} = V_0 \times 1{,}035^{10} = 8000 \times 1{,}035^{10} = 11284{,}79€$$

Ce qui permet de calculer le montant total des intérêts depuis le 20/04/2016 :
$11284{,}79 - 8000 = 3284{,}79$.
Ce montant des intérêts est nettement supérieur aux intérêts simples qui auraient été : $280 \times 10 = 2800$ sur 10 ans.

2) Formule de la valeur acquise, à intérêts composés

L'exemple qui vient d'être étudié a permis de mettre en évidence la première des quelques formules fondamentales des mathématiques financières :

Valeur acquise d'un capital initial:

La valeur acquise d'un capital initial V_0 placé pendant n périodes au taux d'intérêt composé r (taux pour la période considérée) est : $V_n = V_0(1+r)^n$ (1)

On a déjà appliqué cette formule dans le cas d'un taux annuel, avec 10 années (périodes) de placement. Elle s'appliquera de la même façon si r est un taux mensuel, n indiquant alors un nombre de mois : après 8 mois de placements, un montant de 1000€ placé à intérêts composés au taux mensuel de 0,1% est :
$V_8 = 1000 \times 1{,}001^8 \approx 1008{,}03$, soit 8,03€ d'intérêts.

3) Utilisation du solveur financier des calculatrices

La formule de la valeur acquise est facile à retenir et à mettre en oeuvre ; le solveur financier est un outils qui est indispensable dans plusieurs situations ; à ce stade, il permet de contrôler les calculs de valeurs acquises.

N=
I%=
ValAct=
PMT=
ValAcq=
Ech/An=1
Pér/An=1
PMT :**FIN** DEBUT

Le menu **finance** est accessible sur les calculatrices **TI**, soit par une touche directement (éventuellement avec **2nde**, soit par la touche **Apps**.

Le choix **TVM Solveur** donne ensuite accès à la fenêtre ci-contre.
N désigne le nombre de périodes (n dans la formule) I% désigne le taux.

N= 10
I%=3.5
ValAct=-8000
PMT=0
ValAcq=**0**
Ech/An=1
Pér/An=1
PMT :**FIN** DEBUT

Remarque:

En réalité c'est la valeur $100 \times r$ que l'on va indiquer. Par exemple I%=3.5 pour un taux de 3,5%.

- ValAct est l'abréviation de valeur actuelle : c'est le capital placé V_0, valeur à la date de départ 0.
- PMT=0 sera une valeur utilisée ultérieurement (voir le chapitre sur les annuités).
- La valeur à calculer est la valeur acquise, notée ValAcq.
- Les autres réglages ne doivent pas être modifiés ; en particulier il faudra toujours vérifier le réglage **FIN** sur la dernière ligne (on cherche un résultat en fin de période).

Pour obtenir ValAct on déplace le curseur sur ValAcq et on valide par **Entrer**.
On retrouve bien le résultat $V_{10} = 11284{,}79$€ , mais il figure avec un signe "-".

En effet la calculatrice tient compte du flux financier : il ne revient pas au même de faire un placement et de récupérer la valeur acquise de ce placement.

N= 10
I%=3.5
ValAct=-8000
PMT=0
ValAcq=**11284.79008**
Ech/An=1
Pér/An=1
PMT :**FIN** DEBUT

Si on place 8000€ sur 10 ans, ces 8000 € ne sont plus disponibles : il faut donc prendre l'habitude d'indiquer un placement avec le signe -.
La valeur acquise sera alors positive (c'est une rentrée sur le compte de la personne qui a fait le placement). Ci contre l'exemple d'un placement sur 8 mois à taux mensuel 0,1%, en ayant pris soins d'indiquer le placement de 1000€ afecté d'un signe - (bien utiliser la touche **(-)** et pas l'opération $-$).

N= 8
I%=0.1
ValAct=-1000
PMT=0
ValAcq=**1008.028056**
Ech/An=1
Pér/An=1
PMT :**FIN** DEBUT

IV) Utilisation de la formule de la valeur acquise : 3 exemples

1) Calcul de V_0 connaissant r, n, et V_n

Le taux pour une période étant $r = 9{,}5\%$, quelle est al valeur actuelle (capital placé) à la date 0, sachant que la valeur acquise après 10 périodes est $V_{10} = 49564{,}55$?

N= 10
I%=9.5
ValAct=**0**
PMT=0
ValAcq=49564.55
Ech/An=1
Pér/An=1
PMT :**FIN** DEBUT

On écrit alors la formule de la valeur acquise :

$$V_{10} = V_0 \times 1{,}095^{10} = 49564.55$$

donc :

$$V_0 = \frac{49564{,}55}{1{,}095^{10}} = 19999{,}999 = 20000$$

Le vérification avec le solveur financier se fait comme précédemment :

- Commencer par saisir les données connues
- Placer le curseur sur la valeur à calculer
- **Entrer** pour lancer le calcul

N= 10
I%=9.5
ValAct=**-19999.99908**
PMT=0
ValAcq=49564.55
Ech/An=1
Pér/An=1
PMT :**FIN** DEBUT

2) Calcul du taux r connaissant V_0, n et V_n

Quel est le taux r pour une période, sachant qu'un capital de 8000€ placé au taux d'intérêt composé r a pour valeur acquise 10 705,80 après 5 périodes ?

On écrit d'abord la formule de la valeur acquise :

$$V_5 = V_0(1+r)^5 = 8000 \times (1+r)^5 = 10705{,}80$$

donc : $(1+R)^5 = \dfrac{10705{,}80}{8000}$.

Ce type d'équation a déjà été rencontré lors du calcul d'un taux moyen ; la fonction racine $5^{ème}$ permet d'obtenir :

$$1 + r = \sqrt[5]{\frac{10705{,}80}{8000}} = \left(\frac{10705{,}80}{8000}\right)^{1/5} = 1{,}0599999$$

d'où $r = 6\%$

N= 5
I%=**5.99999085**
ValAct=-8000
PMT=0
ValAcq=10705.80
Ech/An=1
Pér/An=1
PMT :**FIN** DEBUT

3) Calcul de la durée n en connaissant r,V_0, et V_n

Quelle est la durée n d'un placement, sachant qu'un capital de 10000€ placé au taux d'intérêt composé 7% a pour valeur acquise 15007,30 après n périodes ?

Le point de départ est encore la formule de la valeur acquise :

$$V_n = 10000 \times 1{,}07^n = 15007{,}30$$

donc : $1{,}07^n = 1{,}50073$.

Puisque l'inconnue est un exposant, cette équation peut être résolue à l'aide de la fonction logarithme :
$\ln(1{,}07^n) = \ln 1.50073 \iff n \ln 1{,}07 = \ln 1{,}50073 \iff n = \dfrac{\ln 1{,}50073}{\ln 1{,}07} \approx$ $5{,}99999 \approx 6$, résultat qu'on peut évidemment vérifier avec le solveur.

N= **5.999996535**
I%= 7
ValAct=-10000
PMT=0
ValAcq=15007.3
Ech/An=1
Pér/An=1
PMT :**FIN** DEBUT

Cet exemple abouti à une valeur entière de n. Le chapitre suivant permettra d'étudier les situations dans les quelles le placement n'est pas tout à fait sur un nombre entier de périodes.

V) Exercices Divers

Exercice B1 ***Calculs d'intérêts simples***

1. *Une personne place 4500€ pour trois mois, au taux annuel de 10%, à intérêts simples. Quel sera le montant des intérêts dans 3 mois (année de 12 mois) ?*
2. *Une personne place 7500€ du 15 mai au 18 septembre sur un compte rémunéré au taux de 9,5% annuel, à intérêts simples. Quel sera le montant des intérêts le 18 septembre, en considérant une année de 365 jours ?*

Exercice B2 ***Calcul du capital acquis à intérêts simples***

1. *Une personne place 6400€ au taux annuel de 9%, à intérêts simples. Quel sera le montant des intérêts dans cinq mois ? Quel sera le capital acquis ?*
2. *Quel est le capital acquis d'un placement de 4000€ pendant 7 mois, au taux d'intérêts mensuel simple de 0,6% ?*

Exercice B3 ***Escompte - Calcul de net*** *Le 23 décembre 2021, vous remettez à l'escompte un effet de commerce de valeur nominale* 15652€ *à échéance du 31 janvier de l'année suivante. Le taux d'escompte est de 9,87%. Votre agence compte un jour supplémentaire de banque. La commission est de 4€ par effet. La TVA sur les commissions est au taux normal. Calculez le montant net versé par la banque.*

Exercice B4 ***Escompte - Calcul de dates d'échéance*** *Le 12 novembre 2021, vous remettez à l'escompte deux effets de commerce. Leur valeur nominale respective est de* 23700€ *et de* 8240€ *et leur date d'échéance est la même. Le taux d'escompte est de 9%. Votre agence compte un jour supplémentaire de banque. La commission est de* 4€ *par effet. La TVA sur les commissions est au taux normal. Le montant versé par la banque est de* 31211,78€ *. Déterminez la date d'échéance des deux effets.*

Exercice B5 ***Escompte - Calcul de taux*** *Le 14 juin 2022, vous remettez à l'escompte deux effets de commerce :*

Un effet à valeur nominale 14 000€ à l'échéance du 30 juin ;

Un effet de valeur nominale 22 000€ à l'échéance du 15 juillet.
Votre agence compte un jour supplémentaire de banque. La commission est de 4€ par efet. La TVA sur les commissions est au taux normal.
Le montant versé par la banque est de 35 708,63 € .
Déterminez le taux d'escompte pratiqué par la banque.

Exercice B6 ***Escompte - Bordereau d'escompte*** *Vous remettez 4 effets à l'escompte le 30 septembre 2022 :*
- un effet de valeur nominale 14 600 € à l'échéance du 31 octobre 2022 ;
- un effet de valeur nominale 14 780 € à l'échéance du 30 novembre 2022 ;
- un effet de valeur nominale 8 540 € à l'échéance du 15 décembre 2022 ;
- un effet de valeur nominale 12 400 € à l'échéance du 31 décembre 2022 ;

Le taux d'escompte est de 9,87%.
Votre agence compte un minimum de 10 jours pour une remise à l'escompte et un jour de valeur supplémentaire si le minimum de dix jours est égalé ou dépassé. La commission est de 4 € par effet. La TVA sur les commissions est au prix normal.
Calculez le net versé par la banque sur la remise à l'escompte.

Exercice B7 *Escompte - Équivalence Le 15 novembre 2022 on remplace trois effets :*
- un effet de valeur nominale 8 750 € à l'échéance du 30 novembre 2022 ;
- un effet de valeur nominale 11 352 € à l'échéance du 15 décembre 2022 ;
- un effet de valeur nominale 12 400 € à l'échéance du 20 décembre 2022 ;
par un unique effet à échéance du 31 décembre équivalent au taux de 9%.
Calculez le nominal du nouvel effet.

Exercice B8 ***Calcul du capital acquis à intérêts composés***

1. *Une somme de 11 000€ est placée pendant 8 ans au taux annuel d'intérêts composés de 4,5% . Quel est le capital acquis à la fin des 8 années de placement ?*
2. *Une somme de 5000€ est placée sur un livret au taux annuel de 1,25%. Quelle sera sa valeur acquise après 4 années de placement, et quel sera alors le montant des intérêts ?*
3. *Une somme de 7000€ est placée au taux trimestriel de 0,8% . Quel sera sa valeur acquise à la fin de 5 années de placement ? Á la fin de 22 trimestres ?*
4. *Une somme de 5000€ est placée à intérêts composés pendant 3 années au taux de 4,25% ; pendant les deux années suivantes, le taux est réduit à 2,75%. Quelle est la valeur acquise à la fin des 5 années ?*

Exercice B9 ***calcul de valeurs actuelles***

1. *Quelle est la valeur actuelle d'un capital dont la valeur acquise sera 200000€ dans cinq ans, sachant que le taux d'intérêt est de 10%, et que le placement est à intérêts composés ?*
2. *Quel est le capital qui placé au taux trimestriel de 3% (capitalisation trimestrielle) est devenu 90 305,56€ au bout de cinq ans.*

Exercice B10 ***Calcul de durée et de taux***
Un investisseur place une somme de 100 000€ à intérêts composés au taux de 8%.

1. *Quelle sera la valeur acquise au bout de 6 ans ?*
2. *Au bout de combien d'années la valeur acquise aura dépassé le double du placement initial ?*
3. *Quel devrait être le taux d'intérêt pour que la valeur acquise ait dépassé le double de sa valeur initiale au bout de 12 ans ?*

Exercice B11 ***Calcul d'une durée***
Un capital de 5 000€ a été placé sur un livret au taux de 3,5% ; en supposant que le taux ne change pas, quelle doit être la durée du placement pour que la valeur acquise soit de 6584€ ?

Exercice B12 ***Calcul d'une durée***
Un capital est placé au taux annuel de 7,5 % à intérêts composés ; quelle soit être la durée de ce placement (en années) pour que :

1. *La valeur acquise dépasse une fois et demi le capital initial placé*
2. *La valeur acquise dépasse le double du capital placé*
3. *La valeur acquise dépasse le triple du capital placé*

Exercice B13 ***Calcul de taux***
Un investisseur effectue un versement initial de 80 000€ et peut choisir entre deux types de contrats, avec le choix suivant :

- *percevoir 112204€ dans 5 ans*
- *percevoir 132724€ dans 7 ans*

Quel est le meilleur placement ?

Chapitre C

Taux proportionnels et taux équivalent

Sommaire

I) Le taux proportionnel 17
II) Le taux équivalent 17
III) Calcul de valeurs acquises au taux équivalent 18
IV) Exercices divers 19

On a étudié au chapitre précédent le calcul d'une valeur acquise à la fin d'un nombre entier de périodes, connaissant le taux par période. L'objectif est maintenant d'étudier comment procéder quand la durée n'est pas un nombre entier de périodes, comme par exemple dans la situation suivante :

Exemple:

Une somme $V_0 = 1000€$ est placée le 01/01/2016 à intérêts composés avec un taux annuel de 6%. Quelle est la valeur acquise le 01/02/2016 (après un mois) ou le 01/06/2016 (après 5 mois) ?

La réponse à ces questions nécessitent d'utiliser un taux mensuel. On va voir qu'il existe deux manières de définir un taux mensuel connaissant un taux annuel, chacune étant utilisée dans des contextes bien précis.

I) Le taux proportionnel

Puisqu'un mois représente un douzième d'année (il y a 12 mois dans l'année), il semble assez naturel dans un premier temps de choisir comme taux mensuel le taux : $\dfrac{6\%}{12} = 0{,}5\%$ appelé taux mensuel proportionnel au taux annuel.

Taux proportionnel:

Si le taux pour une période est r, et si la période est divisée en k sous périodes, le taux proportionnel r_p pour une sous-période est défini par : $r_p = \dfrac{r}{k}$.

Réciproquement, si le taux pour une période est r_p, le taux pour la période divisée en k sous-période est $r = k \times r_p$.

Exemple:

Le taux trimestriel proportionnel à un taux annuel de 8% *est* $8\%/4 = 2\%$
Le taux annuel proportionnel à un taux mensuel de 1% *est* $1\% \times 12 = 12\%$

Le taux proportionnel est utilisé dans les calculs à taux d'intérêts simples, et c'est aussi le taux utilisé par les banques et les prêts dont les remboursements se font mensuellement (voir chapitre G).

Ce calcul ne convient pas par contre pour les calculs à intérêts composés. En effet, pour l'exemple indiqué en introduction, la valeur acquise au bout de 12 mois serait : $V_{12} = 1000 \times 1{,}005^{12} \approx 1064{,}68$, alors que la valeur acquise après ne année de placement à 6% annuel est : $1000 \times 1{,}06 = 1060$.
Autrement dit, la valeur acquise après 12 mois à intérêts composés au taux proportionnel n'est pas la même que la valeur acquise après un an au taux proportionnel. On comprend bien que le taux mensuel proportionnel ne permet pas de faire les calculs d'intérêts composés cohérents sur des durées exprimées en mois.

II) Le taux équivalent

La remarque précédente permet de donner une première définition d'un taux équivalent :

Taux mensuel équivalent:

Le taux mensuel r_{12} équivalent à un taux annuel r est le taux pour lequel la valeur acquise par un capital V_0 au taux r_{12}, à l fin des 12 mois, est la même que la valeur acquise au taux annuel r à la fin d'une année.

Dans cette définition, on peut évidemment remplacer les 12 mois par 4 trimestres, ou par 24 quinzaines, qui sont d'autres sous-périodicités fréquemment utilisés.

Avec un taux annuel de 6%, le taux équivalent mensuel est donc défini par :
$V_0 \times (1 + r_{12})^{12} = V_0 \times 1{,}06 \iff (1 + r_{12})^{12} = 1{,}06 \iff \sqrt[12]{1{,}06} = 1{,}06^{1/12} \approx 1{,}004867$.
Ainsi on trouve $r_{12} = 0{,}4867\% \approx 0{,}487\%$.

Taux équivalent:

Si un taux pour une période est r et si la période est divisée en k sous-périodes, le taux équivalente r_k pour une sous-période est défini par : $r_k = (1+r)^{1/k} - 1$.

Réciproquement, si le taux pour une sous-période est r_k, le taux pour la période divisée en k sous-périodes est défini par : $r = (1+r_k)^k - 1$.

Exemple:

Le taux trimestriel équivalent à un taux annuel de 6% *est* $1{,}06^{1/4} - 1 \approx 1{,}467\%$
Le taux annuel équivalent à un taux mensuel de 1% *est* $1{,}01^{12} - 1 \approx 12{,}68\%$

La première définition ci-dessus donne une procédure simple pour obtenir le taux équivalent à l'aide du solveur :
On choisit par exemple $V_0 = 1000$ et on calcule d'abord la valeur acquise au taux r annuel pour 1 an.
On remplace ensuite la durée 1 par 12, et , sans changer la valeur actuelle et la valeur acquise, le taux calculé est le taux mensuel équivalent :

N= 1	N= 12
I%= 6	I%= **.4867880865**
ValAct=-1000	ValAct=-1000
PMT=0	PMT=0
ValAcq=**1060**	ValAcq=1060
Ech/An=1	Ech/An=1
Pér/An=1	Pér/An=1
PMT :**FIN** DEBUT	PMT :**FIN** DEBUT

Cet exemple permet de vérifier, que pour un même taux annuel : **le taux équivalent mensuel est inférieur au taux proportionnel mensuel**.

III) Calcul de valeurs acquises au taux équivalent

On va traiter maintenant l'exemple de l'introduction :

- après 1 mois de placement : $V_1 \approx 1000 \times 1{,}00487 \approx 1004{,}87$
- après 5 mois de placement : $V_5 \approx 1000 \times 1{,}00487^5 \approx 1024{,}59$

et de même on aura :

- après 12 mois de placement : $V_{12} \approx 1000 \times 1{,}00487^{12} \approx 1060{,}03$

soit 3 centimes de plus que ce qui est attendu : en effet on a arrondi le taux mensuel en % à 3 décimales, en prenant la valeur la plus proche, légèrement supérieure à la valeur calculée. On peut considérer cet écart de 3 centimes négligeable, mais avec $V_0 = 1000000$ sur une durée de 5 ans (60 mois), on aurait :

- Pour 5 ans à 6% : $V = 1000000 \times 1{,}06^5 \approx 1338225{,}58$
- Pour 60 mois à 0,487% : $V = 1000000 \times 1{,}00487^{60} \approx 1338421{,}31$

soit un écart de 195,73€ ce qui n'est plus négligeable !

L'utilisation du solveur avec le taux équivalent calculé par le solveur donne d'ailleurs des valeurs légèrement inférieures à V_1 et V_5, calculées ci-dessus :

N= 1	N= 5
I%= .4867880865	I%= .4867880865
ValAct=-1000	ValAct=-1000
PMT=0	PMT=0
ValAcq=**1004.86751**	ValAcq=**1024.575839**
Ech/An=1	Ech/An=1
Pér/An=1	Pér/An=1
PMT :**FIN** DEBUT	PMT :**FIN** DEBUT

Pour éviter les écarts résultant de l'arrondi du taux équivalent, il est donc conseillé de donner une valeur approchée de ce taux équivalent en pourcentage, avec 2 ou 3 décimales), mais d'effectuer ensuite les calculs avec la valeur exacte de $1 + r_{12} = 1{,}06^{1/12}$.

On obtient alors :

- après 1 mois de placement : $V_1 \approx 1000 \times 1{,}06^{1/12} \approx 1004{,}87$
- après 5 mois de placement : $V_5 \approx 1000 \times (1{,}06^{1/12})^5 \approx 1000 \times 1{,}06^{5/12} \approx 1024{,}58$

Dans la pratique cela revient à appliquer la formule de la valeur acquise en autorisant n à prendre des valeurs fractionnaires, et pas seulement des valeurs entières :

Valeur acquise à la fin de m sous-période:

Si la période de référence, pour laquelle le taux r, est divisée en k sous-périodes, la valeur acquise V'_m à la fin de m sous-périodes, calculées au taux équivalent par sous-période, est : $V'_m = V_0(1+r)^n$ avec $n = \dfrac{m}{k}$.

C'est bien ce qui a été fait pour le calcul de V_5, avec : $k = 12; m = 5; r = 6\%$

IV) Exercices divers

Exercice C1 ***Taux équivalents***

1. *Un placement est effectué au taux annuel de 7,5% à intérêts composés. Calculer :*
   (a) *le taux mensuel équivalent.*
   (b) *le taux trimestriel équivalent.*
2. *Pour un particulier qui a effectué un placement de 10800€ à ce taux au 01/12/2010, quel sera le capital acquis au 01/04/2012 ? au 01/01/2014 ?*

Exercice C2 ***Calcul du capital initial***

Un particulier avait placé une somme C le premier août 2005, à un taux annuel de 6,5%. Le premier décembre 2005 , son capital acquis est de 40 540€ . Sachant que les intérêts mensuels ont été calculés au taux équivalent mensuel, déterminer C.

Exercice C3 ***Calcul d'un taux***

Un capital de 700 000€ rapporte des intérêts semestriels de 31500€ .

1. *Quel est son taux semestriel ?*
2. *Quel est le taux annuel équivalent à ce taux semestriel ?*

Exercice C4 ***Le livret A***

Le taux annuel du livret A est de 3,5% aux dates considérées dans cet exercice. Les intérêts du livret A sont calculés le premier et le 16 de chaque mois, chaque quinzaine. Il y a 24 quinzaines par an.

1. *Calculer le taux équivalent r pour une période de 15 jours.*
2. *Monsieur X a 5 000€ de placés sur son livret au premier janvier 2017. De quelle somme disposera-t-il le 16 avril 2019, si les calculs sont effectués avec le taux équivalent par quinzaine ?*
3. *A partir de quelle date le capital acquis dépassera-t-il le capital placé de :*
   (a) *10% ?*
   (b) *20% ?*
4. *Á partir de quelle date Monsieur X disposera-t-il d'un capital qui dépassera le double du capital placé ?*

Exercice C5 ***Placement d'un capital***

1. *Un particulier place le 01/01/2006 un capital de 4000€ sur un livret d'épargne rémunéré au taux annuel de 2,65%. Quelle sera la valeur acquise de ce capital le 01/01/2010 ?*
2. *Quel capital ce particulier doit-il placer le 01/01/2006 s'il veut disposer d'une valeur acquise de 10 000€ le 01/01/2010 ?*
3. *Les intérêts sont calculés par quinzaine au taux équivalent (le 1 et le 16 de chaque mois). Quel est le taux équivalent par quinzaine, en % avec 3 décimales ?*
4. *Retrouvez ce taux équivalent à l'aide du solveur de la calculatrice.*
5. *Ce particulier place finalement 8000€ le 01/01/2006 ; au bout de combien de quinzaines son capital dépassera-t-il 10 000€ si le taux ne change pas ? Faire la vérification avec le solveur.*
6. *A quelle date du calendrier (en précisant le 1 ou le 16 du mois) cela sera-t-il réalisé ?*
7. *Quel sera le capital acquis à cette date ? Vérifier avec le solveur.*

Chapitre D

Remboursement des emprunts indivisibles

Sommaire

I) Les 3 modalités de remboursement d'emprunt **22**
1) Remboursement "in fine" 22
2) Remboursement à amortissement constant 22
3) Remboursement à annuités constantes 22
II) Calcul de l'annuité constante ou du montant emprunté **23**
1) Formule de calcul de l'annuité constante 23
2) Utilisation du tableur 24
3) Utilisation de la calculatrice 24
4) Tableau de remboursement à l'aide de la calculatrice 24
5) Formule de calcul du montant emprunté en fonction de l'annuité 25
III) Coût total du crédit **25**
IV) Emprunts à remboursements mensuels ou trimestriels **25**
V) Impact du taux et de la durée sur l'annuité et le coût total **26**
VI) Exercices divers **27**

Un emprunt est appelé indivis lorsqu'il est contracté auprès d'un seul créancier (habituellement une banque). Ce type d'emprunt concerne aussi bien les particuliers que les entreprises.
L'étude des emprunts obligataires ne fait pas partie du programme du DUT GEA.

Trois modes de remboursement peuvent être pratiqués et vont être présentés, en terminant par le remboursement à annuités constantes, qui est le plus utilisé, à partir de l'exemple suivant :

Une entreprise emprunte 500 000€ qu'elle prévoit de rembourser sur 4 ans, au taux annuel de 4,8%.

I) Les 3 modalités de remboursement d'emprunt

1) Remboursement "in fine"

Avec ce mode de remboursement, la totalité des 500 000€ est remboursée à la fin des quatre années. A la fin des 3 premières années, l'entreprise ne verse donc que le montant des intérêts, soit 4,8% $\times$ 500000 = 24000.
Le tableau de remboursement se présente comme suit :

Année	Capital dû début période	Intérêts fin période	Amortissement fin période	Annuité fin période
1	500000	24000	0	24000
2	500000	24000	0	24000
3	500000	24000	0	24000
4	500000	24000	500000	524000
	TOTAL	96000	500000	596000

Sur tableur, ce tableau est réalisé avec des formules de calcul, sauf pour les amortissements qui sont saisis dans la colonne D :

	A	B	C	D	E
11	1	500000	=taux*B11	0	=C11+D11
12	2	=B11-D11	=taux*B12	0	=C12+D12

L'annuité versée en fin de période est la somme des intérêts de la période et de l'amortissement du capital.
Le capital en début de période est le capital en début de période précédente, diminué de l'amortissement de capital effectué en période précédente.

2) Remboursement à amortissement constant

Dans le remboursement "in fine", l'entreprise doit prévoir la trésorerie permettant de rembourser la totalité du capital emprunté à la fin ; le mode de remboursement à amortissement constant permet de manière égale sur quatre années le remboursement du capital.

Année	Capital dû début période	Intérêts fin période	Amortissement fin période	Annuité fin période
1	500000	24000	125000	149000
2	375000	18000	125000	143000
3	250000	12000	125000	137000
4	125000	6000	125000	131000
	TOTAL	60000	500000	560000

Les formules sont les mêmes que dans le cas précédent, mais cette fois l'amortissement est calculé : 500 000/4=125 000.

On observe sur ce tableau que les intérêts et les annuités diminuent chaque année de 6000, soit 1/4 des intérêts de la première année.
Ce mode de remboursement est celui pour lequel le montant des intérêts est le moins élevé ; son inconvénient est que les annuités sont plus importantes au début.

3) Remboursement à annuités constantes

Il faut commencer par calculer cette annuité constante, à partir de la formule $V_0 = A\dfrac{1-(1+r)^{-n}}{r}$, puisqu'on peut considérer que le montant de l'emprunt est équivalent à la date 0 des 4 annuités constantes A qui seront remboursées chaque année. On a donc :

$$500000 = A \times \frac{1-(1{,}048)^{-4}}{0{,}048} \text{d'où :} A = 500000 \times \frac{0{,}048}{1-(1{,}048)^{-4}} \approx 140341{,}41$$

On obtient le tableau de remboursement suivant :

Année	Capital dû début période	Intérêts fin période	Amortissement fin période	Annuité fin période
1	500000	24000	116351,41	140351,41
2	383648,59	18415,13	121936,26	140351,41
3	261712,32	12562,19	127789,22	140351,41
4	133923,10	6428,31	133923,10	140351,40
	TOTAL	61405,63	500000	561405,63

Les formules de calcul sont les mêmes que pour les tableaux précédents, à l'exception des deux colonnes de droite. Avec une annuité calculée dans une cellule à laquelle on aura donné le nom "annuité" :

	A	B	C	D	E
11	1	500000	=taux*B11	=E11-C11	=annuité
12	2	=B11-D11	=taux*B12	E12-C12	=annuité

On observera que le total des annuités obtenu sur tableur est 561 405,63 alors qu'on aurait pu s'attendre à 561 405,64 : le tableur effectue les calculs à partir d'une valeur de l'annuité calculée avec la fonction VPM présentée en 2.2), et pour laquelle le total est : $4 \times 140351{,}4080896 \approx 561405{,}6324$ arrondi au centime d'euro près.

On notera aussi une propriété tout à fait remarquable sur la dernière ligne de ce tableau. L'amortissement 133 923,10 calculé comme la différence :

$$\text{annuité} - \text{intérêts} = 133923{,}10$$

est exactement le capital restant dû au début de la $4^{ième}$ année, ce qui vérifie que l'emprunt est intégralement remboursé.

On remarquera enfin que le total des intérêts est légèrement plus élevé que dans le cas des amortissements constants (61 405,63>60 000) mais largement inférieur au total des intérêts dans le cas d'un remboursement "in fine".

II) Calcul de l'annuité constante ou du montant emprunté

1) Formule de calcul de l'annuité constante

Propriété D1:

L'annuité constante à rembourser chaque fin de période, pour un emprunt d'un montant V_0, au taux nominal par période z, avec une durée de remboursement de n périodes, est :

$$A = V_0 \times \frac{z}{1-(1+z)^{-n}}$$

Remarque:

La notation z est utilisée ici pour le taux ***nominal*** *: c'est le taux annoncé par la banque à partir duquel on calcule les remboursements. On verra que ce n'est pas le taux "réel" tenant compte des frais et cotisations diverses.*

2) Utilisation du tableur

La fonction permettant de calculer l'annuité constante est la fonction VPM (équivalent du PMT des calculatrices) que l'on utilisera de la manière suivante :

$$= VPM(taux; durée; montant; 0; 0)$$

Le $4^{ième}$ paramètre 0 est la valeur acquise en fin de contrat : elle est bien 0 puisque l'emprunteur est "quitte" avec son banquier et ne lui doit plus rien.
Le $5^{ième}$ paramètre est 0 si les annuités sont versées en fin de période (cas habituel) et 1 si les annuités sont versées en début de période.

3) Utilisation de la calculatrice

On utilise le solveur selon la procédure habituelle.

Après ce calcul, la calculatrice dispose de fonctions permettant d'obtenir les valeurs du tableau de remboursement.

N=4
I%=4.8
ValAct=500000
PMT=**-140351.4081**
ValAcq=0
Ech/An=1
Pér/An=1
PMT :**FIN** DEBUT

4) Tableau de remboursement à l'aide de la calculatrice

Les calculatrices disposent de 3 fonctions, **paSolde ;paSomPrin ;paInt** qui permettent de contrôler les valeurs obtenues dans le tableau :

Année	Capital dû début période	Intérêts fin période	Amortissement fin période	Annuité fin période
1	paSolde(0)	paInt(1,1)	paSomPrinc(1,1)	-PMT
1	paSolde(1)	paInt(2,2)	paSomPrinc(2,2)	-PMT
1	paSolde(2)	paInt(3,3)	paSomPrinc(3,3)	-PMT
1	paSolde(3)	paInt(4,4)	paSomPrinc(4,4)	-PMT
	TOTAL	paInt(1,4)	paSomPrinc(1,4)	

Par exemple la séquence **finance/A :paInt(** permet de sélectionner la fonction qui donne le montant des intérêts.

Remarque:

Les intérêts et amortissements sont affichés avec un signe − et nécessitent deux paramètres.

paSolde donne le capital restant du en début de période. Bien noter que la capital emprunté est le capital restant dû à la date 0 : **paSolde(0)**=500000.

Il est important de constater le décalage sur le paramètre utilisé pour **paSolde** par rapport au numéro de la période : **paSolde(2)** est le capital restant dû aussitôt après la $2^{ième}$ annuité, qui figure au début de la ligne de l'annuité n°3.

Les deux paramètres des fonctions **paInt** et **paSomPrinc** permettebt de calculer la somme des intérêts ou des amortissements, depuis une période de début (1^{er} paramètre) jusqu'à une période de fin ($2^{ième}$ paramètre).
Le total des intérêts est donc : **paInt(1,4)**=-61 405,63
et le total des amortissements : **paSomPrinc(1,4)**=-500 000

Remarque:

*L'utilisation des 3 fonctions **paSolde ;paSomPrin ;paInt** n'est évidemment possible qu'après avoir calculé l'annuité avec le solveur.*

5) Formule de calcul du montant emprunté en fonction de l'annuité

Propriété D2:

Le montant V_0 que l'on peut emprunter au taux nominal par période z remboursé par n annuités constantes A, est :

$$V_0 = A \times \frac{1-(1+z)^{-n}}{z}$$

III) Coût total du crédit

Le coût total du crédit (hors frais) est le montant total des intérêts. On vient de voir que la calculatrice permet facilement d'obtenir de total avec la fonction **paInt**.

Un autre moyen simple de l'obtenir est le suivant :

Propriété D3:

Coût total du crédit=Nombre d'annuités $\times$ Montant des annuités $-$ Montant emprunt

Exemple:

Coût total crédit= $4 \times 140351{,}408 - 500000 \approx 63405{,}63$
On verra au chapitre suivant qu'il y a lieu habituellement d'ajouter d'autres frais.

IV) Emprunts à remboursements mensuels ou trimestriels

Au lieu d'être annuels, les remboursements peuvent être mensuels (c'est toujours le cas pour les particuliers, et souvent pour les entreprises) ou trimestriels(pour les entreprises).
Le taux utilisé pour le calcul des remboursement par sous-période est le taux équivalent dans le cas des crédits à la consommation et immobiliers (particuliers), c'est le taux proportionnel pour les crédits d'investissement (entreprises. Ce dernier cas est donc le plus fréquent.

Les méthodes de calculs vues précédemment continuent de s'appliquer en remplaçant le taux nominal annuel par le taux pour une sous période, et en prenant comme nombre d'annuités (mensualités ou trimestrialités) le nombre de sous-périodes.

Exemple:

Une entreprise emprunte 150 000€ , au taux nominal annuel de 2,7%, sur une durée de 20 ans, avec mensualités constantes au taux proportionnel. Quel sera le montant de la mensualité et le coût total du crédit (hors frais) ?

Réponse :

Le taux mensuel est 2,7%/12=0,225% et la durée est de 20×12=240 mois.
La mensualité est donc :

$$A = 150000 \times \frac{0{,}00225}{1-(1{,}00225)^{-240}} \approx 809{,}55€$$

Et le coût total du crédit est donc : $240 \times 809{,}5502444 - 150000 \approx 44292{,}06$

Valeur que l'on peut vérifier avec ***paInt(1,240)***

N=240
I%=0.225
ValAct=150000
*PMT=**-809.5502444***
ValAcq=0
Ech/An=1
Pér/An=1
*PMT :**FIN** DEBUT*

Sur cet exemple on peut aussi comprendre l'utilité des 2 paramètres figurant en bas de l'écran du solveur. Ils permettent de faire les calculs à taux mensuel proportionnel ou équivalent, en indiquant dans I% le taux annuel :
Ech/An est le nombre de remboursements effectués pendant l'année ; ici Ech/An=12
Pér/An est fonction du taux mensuel utilisé :

- *1 pour un taux mensuel équivalent*
- *12 pour un taux mensuel proportionnel*

N=240
I%=2.7
ValAct=150000
*PMT=**-809.5502444***
ValAcq=0
Ech/An=12
Pér/An=12
*PMT :**FIN** DEBUT*

On retrouvera la même mensualité que précédemment, alors que le choix Pér/An=1 aurait conduit à une mensualité de 807,125 légèrement inférieure, puisque le taux équivalent mensuel est inférieur au taux proportionnel mensuel.

Méthode pratique :

Pour le pas risquer d'erreur dans l'utilisation de ces 2 derniers paramètres, il vaut mieu travailler avec I% égal au taux mensuel considéré, et laisser le réglage 1 par défaut pour ces deux paramètres.
C'est ce qui sera proposé jusqu'à la fin de cette partie financière.

V) Impact du taux et de la durée sur l'annuité et le coût total

On admettra ici que l'expression $\frac{z}{1-(1+z)^{-n}}$ est une fonction croissante de la variable z, et une fonction décroissante de la variable n. Il en résulte que :

- Pour un montant d'emprunt et une durée ficxée, le montant de l'annuité est une fonction croissante du taux. Il ebn est évidemment de même poru le coût total du crédit.
- Pour un montant d'emprunt et un taux fixé, le montant de l'annuité diminue quand la durée augmente.

Par contre, le coût total du crédit augmente aussi quand la durée augmente. On va vérifier l'effet de la durée sur le solveur, avec les données de l'exemple précédent.

- Si la durée est réduite à 15 ans, le montant de l'annuité devient 1014,37>809,55, mais le total des intérêts diminue nettement : 32586,13<44292,06.
- Si au contraire la durée est allongée à 25 ans, le montant de l'annuité diminue : 688,13<809,55, mais le total des intérêts augmente nettement puisque 44292,06>26739,96.

Propriété D4:
Pour minimiser le coût du crédit, et pour un taux fixé, on a donc toujours intérêt à choisir la durée la plus courte possible, ce qui revient à choisir la mensualité la plus grande possible dans la limite des capacités de remboursement.

VI) Exercices divers

Exercice D1 ***Montant des mensualités***
Un particulier souhaite emprunter 100 000€ au taux de 3,6% annuel. Sa banque lui propose des remboursements mensuels, calculés au taux proportionnel.

1. *Quel sera le montant d'un remboursement mensuel si la durée de l'emprunt est de 10 ans ?*
2. *Vérifier avec le solveur.*
3. *Quel sera ce montant pour une durée de 5 ans ?*
4. *Calculer quelle doit être la durée si ce particulier estime ne pas pouvoir rembourser plus de 800€ é par mois ?*

Exercice D2 ***Montant de l'emprunt en fonction de la capacité de remboursement***
Un particulier estime pouvoir rembourser chaque mois la somme de 500€ .Sa banque lui propose un taux de 4,5% annuel, avec des remboursements mensuels, calculés au taux proportionnel. Combien ce particulier peut-il emprunter dans les deux cas suivants :

1. *durée de l'emprunt : 5 ans*
2. *durée de l'emprunt : 3 ans*

Exercice D3 ***Remboursement annuel***
Une entreprise emprunte 120 000 € sur trois ans au taux de 8%, remboursable par annuités constantes.

1. *Calculer le montant de l'annuité constante.*
2. *Faire les 3 lignes du tableau d'amortissement de cet emprunt.*
3. *Quel est le coût total du crédit ?*
4. *L'entreprise obtient, après le paiement de la seconde annuité, un allongement d'un an de la durée de remboursement. Quelle sera la nouvelle annuité à verser pendant les 2 années suivantes ?*
5. *Faire les 4 lignes du nouveau tableau de remboursement.*
6. *Quel est le coût total du crédit avec cet allongement d'un an ?*

Exercice D4 ***Emprunt immobilier sur 20 ans à remboursement mensuel*** *Un particulier emprunte 180 000€ sur 20 ans au taux de 3,60%. Le remboursement de cet emprunt se fait par mensualités constantes, calculées au taux proportionnel.*

1. *Calculer le montant de la mensualité constante à l'aide de la formule.*
2. *Contrôler le résultat à l'aide du solveur de la calculatrice.*
3. *Faire les 3 premières lignes du tableau d'amortissement de cet emprunt.*
4. *Calculer le coût total du crédit, à partir du montant des mensualités.*
5. *Vérifier ce résultat à l'aide de la calculatrice.*

6. *Déterminer le capital restant dû aussitôt après la* $120^{ième}$ *mensualité, à l'aide de la calculatrice.*
7. *En déduire les 2 lignes du tableau de remboursement d'emprunt pour les mois 121 et 122.*
8. *En utilisant la même méthode, faire les deux dernières lignes du tableau de remboursement (mois 239 et 240).*