Chapitre A

Les fonctions polynomiales

Sommaire

I) Vocabulaire

fonction polynomiale:

Une **fonction polynomiale** ou **polynôme** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ où $a_0, a_1, \ldots a_n$ sont des nombres réels avec $a_n \neq 0$, et où $n \in \mathbb{N}$.

Dégré, Coefficients...:

Avec les notations de la définition précédente,

- n est le degré du polynôme noté $\deg(\mathrm{P})$
- a_n est le coefficient dominant
- a_0 est le terme constant.

Exemple:

$\mathrm{P}(x) = 3x^7 - 9x + 4$ *est un polynôme de degré 7. Le coefficient dominant est 3 et le terme constant 4.*

Racine:

On dit qu'un nombre a est racine d'un polynôme P lorsque $\mathrm{P}(a) = 0$.

Exercice A1 *Dire si chacune des fonctions suivantes est un polynôme. Si oui, précisez si -1 et 4 sont racines de celui-ci.*

1. $\mathrm{P}_1(x) = x + 1$
2. $\mathrm{P}_2(x) = \sqrt{x} - x + 2$
3. $\mathrm{P}_3(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{3}$
4. $\mathrm{P}_4(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$

II) Polynôme de degré inférieur à 1 : Les fonctions affines

1) Représentation graphique

Fonctions affines:

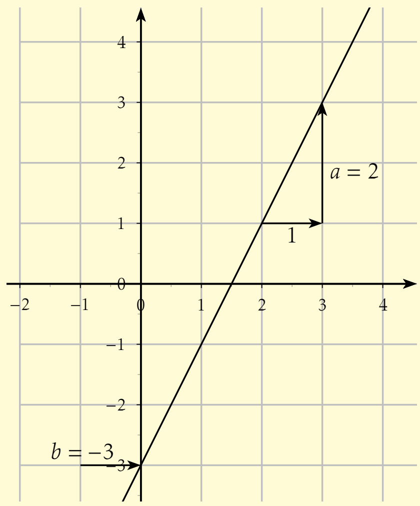
Une fonction affine f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1, elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.

Propriété A1:

La courbe représentant une fonction affine $f(x) = ax + b$ est une droite d'équation $y = ax + b$.

- *a s'appelle le coefficient directeur de la droite. (« Quand on avance de 1, on monte de a »)*
- *b s'appelle l'ordonnée à l'origine. (Ordonnée du point d'intersection de l'axe des ordonnées avec la droite)*

Par exemple, on a représenté ci-contre la fonction affine $f : x \mapsto 2x - 3$.



Exercice A2 *Représenter graphiquement les droites représentant les fonction affines :*

- ➔ $g_1 : x \mapsto 2x + 1$
- ➔ $g_2 : x \mapsto -1$
- ➔ $g_3 : x \mapsto -x - 2$
- ➔ $g_4 : x \mapsto \dfrac{x}{2}$

2) Variations d'une fonction affine

Dans cette partie, on considère une fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$. On suppose que a n'est pas nul, sinon la fonction est constante.

Propriété A2:
Variations d'une fonction affine.

Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

3) Signe d'une fonction affine

Propriété A3:
Signe d'une fonction affine

Si $a<0$:			
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$+$	0	$-$

Si $a>0$:			
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$

Exercice A3 *Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes*

1. $4x-11=0$
2. $2x-3=-2(x-1)$
3. $2x+6>0$
4. $-2x+7<0$
5. $4x+2(x-2)>5$
6. $x-4=1-3x$

4) Signe de produits ou quotient de fonctions affines

Lorsque l'on se retrouve avec un produit de polynômes du premier degré, on peut facilement trouver son signe, grâce à la règle des signes d'un produit : $\oplus\times\oplus=\oplus$, $\oplus\times\ominus=\ominus$, $\ominus\times\oplus=\ominus$ et $\ominus\times\ominus=\oplus$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x-6$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-1)(-2x-6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour les divisions, c'est le même principe, il faut juste penser en plus que l'on ne peut pas diviser par 0 !

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x+3}{-x+2}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Exercice A4 *Dresser un tableau de signe des expressions suivantes :*

1. $(x+3)(-x+2)$
2. $\dfrac{3-x}{12+3x}$
3. x^2-9

III) Les polynôme de degré 2

Dans cette partie, on s'intéresse à une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x)=ax^2+bx+c$ où a, b et c sont trois nombres réels avec $a\neq 0$.

1) Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$

Méthode pratique :

Pour résoudre une équation du type $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$), on calcule $\Delta = b^2-4ac$.

- *Si $\Delta < 0$, l'équation n'a aucune solution parmi les nombres réels.*
- *Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$*
- *Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$*

Exercice A5 *Trouver les racines des polynômes suivants :*

1. $P_1(X) = X^2 - X - 12$
2. $P_2(X) = 2X^2 - 4X + 4$
3. $P_3(X) = X^2 - 6X - 6$
4. $P_4(X) = X^2 - X + 1$
5. $P_5(X) = X^2 + 8X + 16$
6. $P_6(X) = X^4 - 5X^2 + 6$

2) Factorisation de ax^2+bx+c

Méthode pratique :

Pour factoriser une expression du type $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$), on calcule $\Delta = b^2-4ac$.

- *Si $\Delta < 0$, l'expression ne se factorise pas avec des termes de degré 1.*
- *Si $\Delta = 0$, l'expression se factorise en $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$ où x_0 est l'unique racine de ax^2+bx+c définie précédemment.*
- *Si $\Delta > 0$, l'expression se factorise en $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les deux racines du polynôme ax^2+bx+c.*

Exercice A6 *Factoriser lorsque c'est possible les expressions suivantes :*

1. $-6x^2+x+1$
2. $5x^2+6x+2$
3. $2x^2+5x+\dfrac{25}{8}$
4. $3x^3+3x^2-6x$

3) Signe de ax^2+bx+c

Méthode pratique :

Pour connaitre le signe d'une expression du type $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$), on calcule $\Delta = b^2-4ac$.

- *Si $\Delta < 0$, l'expression est toujours du même signe que a.*
- *Si $\Delta = 0$, l'expression est toujours du même signe que a et vaut 0 en sa racine.*
- *Si $\Delta > 0$, l'expression est du signe de a sauf entre ses deux racines.*

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		$-$	0	$+$	0	$-$	

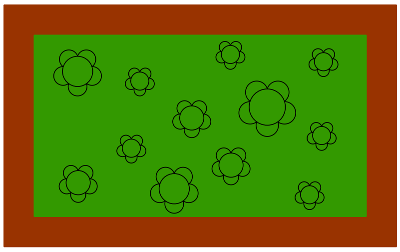
Si $a > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice A7 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :*

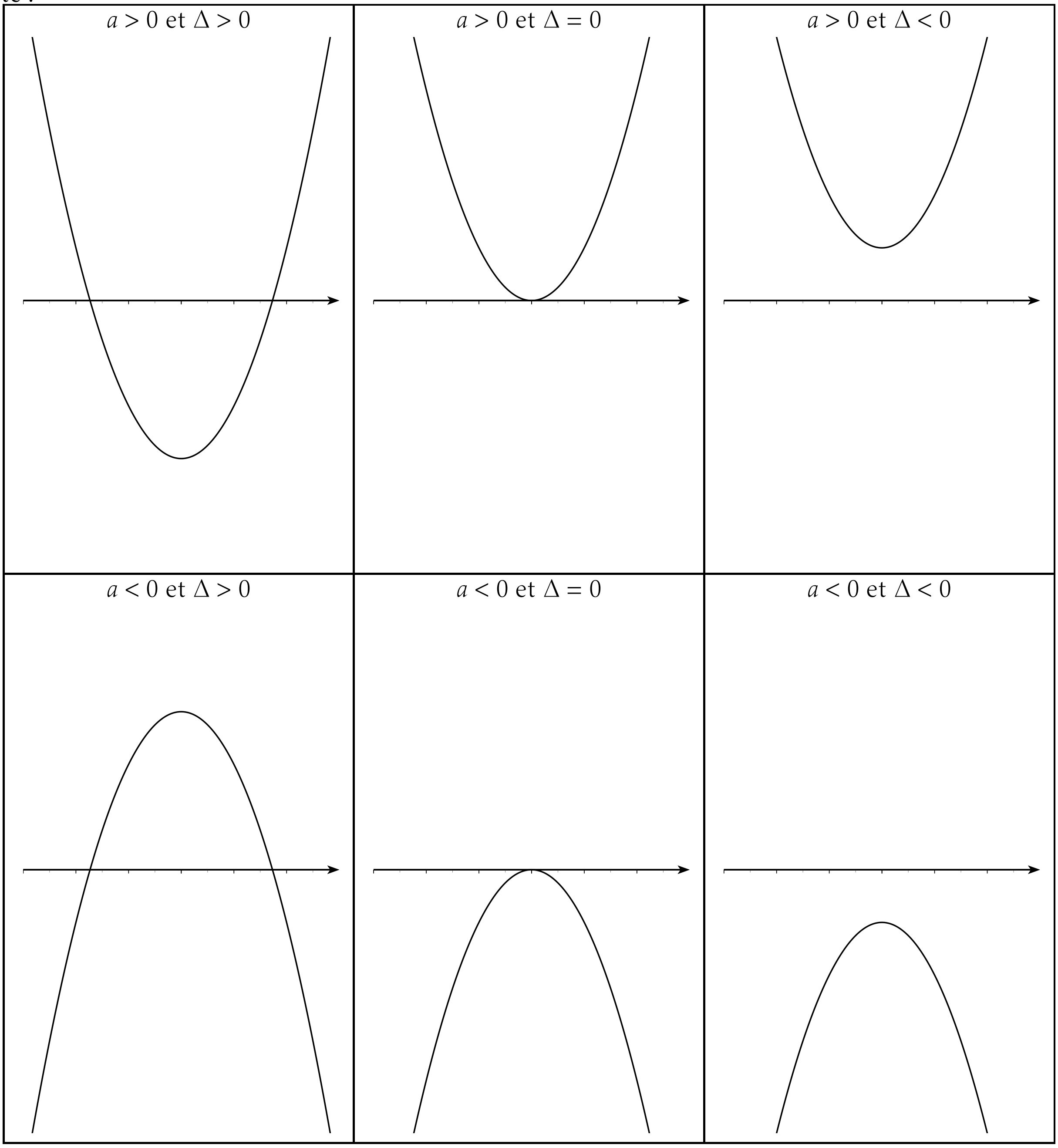
1. $-6x^2 + x + 1 > 0$
2. $5x^2 + 6x + 2 \geqslant 0$
3. $2x^2 + 5x + \dfrac{25}{8} \leqslant 0.$
4. $x^3 + 3x^2 > 10x.$

Exercice A8 ★ *Un massif fleuri, rectangulaire, a une superficie de* $612m^2$. *On trace tout autour (à l'extérieur) une allée de* $1{,}50$ *mètres de large. L'aire de cette allée est alors de* $165m^2$. *Quelles sont les dimensions du massif ?*



4) Représentation graphique

La représentation de la fonction est une parabole. Selon les valeurs de a et de Δ, son allure est un peu différente :

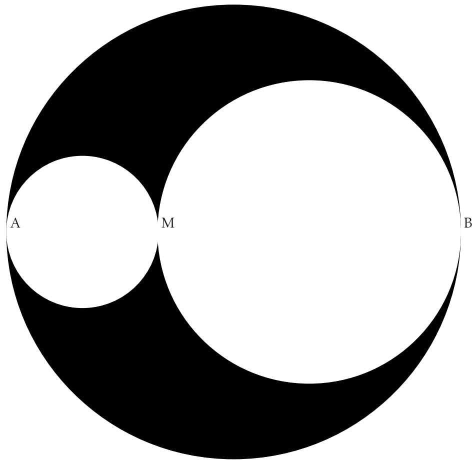


Propriété A4:

Soit f, une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2+bx+c (a \neq 0)$, le sommet de la parabole représentant la fonction f se situe au point d'abscisse $x = -\dfrac{b}{2a}$

Exercice A9 *On considère un point* M *sur le diamètre* [AB] *d'un cercle. Il détermine deux cercles de diamètre* [AM] *et* [MB]*. On pose* AB = 4 *et* AM = x.

1. *Montrer que l'aire* $\mathscr{A}(x)$ *de la surface colorée est définie par :* $\mathscr{A}(x) = \frac{\pi}{2}\left(-x^2 + 4x\right)$.
2. *Déterminer la position de* M *pour laquelle* $\mathscr{A}(x)$ *est maximale.*
3. *Existe-t-il une position de* M *pour laquelle* $\mathscr{A}(x)$ *soit strictement supérieure à la somme des aires des deux disques de diamètre* [AM] *et* [BM] *?*
4. *Déterminer les positions de* M *pour lesquelles* $\mathscr{A}(x)$ *soit inférieure à la moitié de l'aire des deux disques de diamètre* [AM] *et* [BM].



Exercice A10 ***Intersection d'une parabole et d'une droite variable.***
Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x^2 - 4x + 1$

1. *Etudier le signe de ce trinôme.*
2. *Dresser le tableau de variation de la fonction* f *et tracer sa représentation graphique (notée* P*).*
   Pour tout nombre m *réel, on considère la droite d'équation* $y = -2x + m$ *(notée* D_m *).*
3. *Tracer* D_0*, puis* D_{-3} *et* D_2 *.Discuter graphiquement le nombre de point d'intersection de* D_m *et de* P *suivant les valeurs de* m.
4. *Par le calcul donner les intersection de* P *avec* D_{-3}, D_0 *et* D_2.
5. ★ *Discuter, maintenant par le calcul, du nombre de points d'intersection de* D_m *et de* P.
6. ★ *Donner les coordonnées du point d'intersection dans le cas où il est unique.*
7. ★★*Lorsque* D_m *coupe* P *en deux points distincts* A_m *et* B_m*, on appelle* I_m *le milieu de* $[A_mB_m]$*. Quel est l'ensemble des point* I_m *quand* m *parcourt* $\mathbb{R}$ *tout entier ?*

Exercice A11 ★ *Deux terrains d'aviation, Sharjah et Dubaï sont distant de 35 km. Le vent souffle de Sharjah vers Dubaï avec une vitesse de 36km.h*$^{-1}$*. Un engin volant fait l'aller et retour à pleine puissance en 1 heure et demi. Quelle aurait été la vitesse de l'engin en l'absence de vent ?*

IV) Polynômes de degré supérieurs

Pour les polynômes de degrés supérieurs, on peut réussir parfois à les factoriser en utilisant la propriété suivante :

Propriété A5:
Soit P *un polynôme, si* a *est racine de ce polynôme, alors* P(x) *peut se factoriser par* $(x - a)$

Exemple:
On considère le polynôme f *défini par :* $f(x) = 3x^4 - x^3 + x^2 + 11x + 6$
Une solution évidente est $x_0 = -1$
donc, il existe un polynôme g *de degré* $4 - 1 = 3$ *tel que pour tout réel* x *:*

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & (x+1)g(x) \\ & = & (x+1)(ax^3+bx^2+cx+d) \\ & = & ax^4+bx^3+cx^2+dx+ax^3+bx^2+cx+d \\ & = & ax^4+(b+a)x^3+(c+b)x^2+(d+c)x+d \end{array}$$

Les polynômes $3x^4-x^3+x^2+11x+6$ *et* $ax^4+(b+a)x^3+(c+b)x^2+(d+c)x+d$ *sont égaux, leurs coefficients le sont aussi :*

$$\begin{cases} a = 3 \\ b+a = -1 \\ c+b = 1 \\ d+c = 11 \\ d = 6 \end{cases}, \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \\ c = 5 \\ d = 6 \end{cases}$$

Finalement, $f(x) = (x+1)(3x^3-4x^2+5x+6)$.

Exercice A12 *Factoriser et donner le signe de* x^3-2x^2-5x+6*, en remarquant une solution entière simple.*

Chapitre B

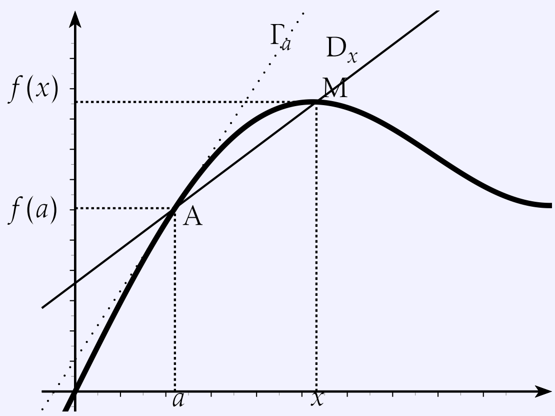
Fonction dérivée

Sommaire

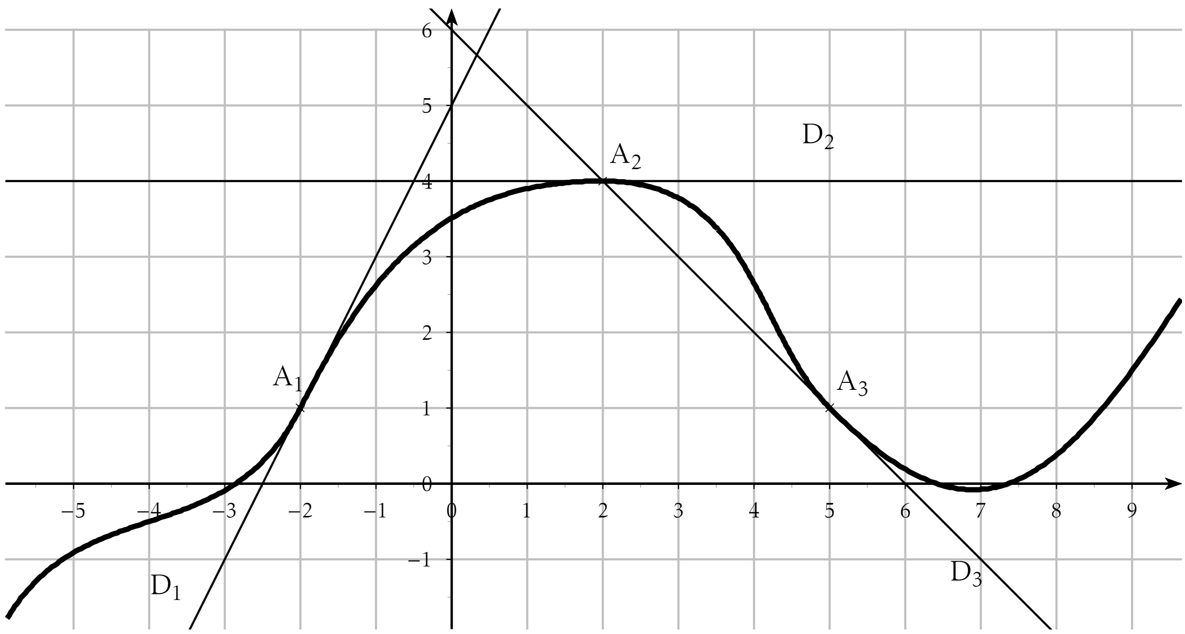
I) Définition

Nombre dérivé:

- On appelle **nombre dérivé** d'une fonction f en a, le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a lorsque celle-ci existe.
- La tangente à une courbe en un point A est obtenue comme position limite des sécantes à la courbe passant par A.
- On note $f'(a)$ le coefficient de la tangente au point A d'abscisse a.



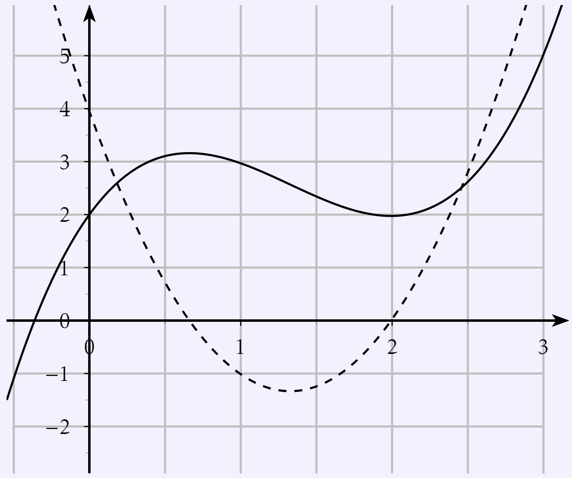
Exercice B1 *Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative d'une certaine fonction f.*
Lire les nombres dérivés : $f'(-2)$, $f'(2)$ et $f'(5)$.



Fonction dérivée:

On appelle alors la fonction dérivée la fonction qui à un nombre x de l'ensemble de définition fait correspondre le nombre dérivé en x : $f'(x)$. En économie, on parlera de **fonction marginale**, et elle représentera la variation qu'engendre pour f le passage de x à $x+1$.

Sur le graphique ci-contre, on a représenté une fonction f (en traits pleins) et sa fonction dérivée f' en pointillés. A priori ces deux courbes n'ont rien à voir... Quoi que....



II) Calcul d'une dérivée

Lorsque l'on connait l'expression de f, il devient alors facile de calculer sa dérivée grâce aux formules suivantes qui indiquent les dérivées des fonctions usuelles :

Propriété B1:

- *Si $f(x) =$Constante, alors $f'(x) = 0$.*
- *Si $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1$.*
- *Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.*
- *Si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$.*
- *Si $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = n \times x^{n-1}$.*
- *Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, alors $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.*
- *Si $f(x) = \sqrt{x}$, alors $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.*

Une fois que l'on sait dériver ces fonctions, on doit alors s'interroger sur la manières dont on peut les composer avec les opérations de base :

Propriété B2:
Si U est V, sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors :

- $(\mathrm{U}+\mathrm{V})' = \mathrm{U}'+\mathrm{V}'$.
- $(\alpha \mathrm{U})' = \alpha \mathrm{U}'$.
- $\left(\dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}}\right)' = \dfrac{\mathrm{U}'\times \mathrm{V} - \mathrm{U}\times \mathrm{V}'}{\mathrm{V}^2}$.
- $(\mathrm{U}-\mathrm{V})' = \mathrm{U}'-\mathrm{V}'$.
- $(\mathrm{U}\times \mathrm{V})' = \mathrm{U}'\times \mathrm{V} + \mathrm{U}\times \mathrm{V}'$.
- $\left(\dfrac{1}{\mathrm{U}}\right)' = -\dfrac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}^2}$.
- *Si $\sqrt{\mathrm{U}}$, alors $\left(\sqrt{\mathrm{U}}\right)' = \dfrac{\mathrm{U}'}{2\sqrt{\mathrm{U}}}$.*

Exercice B2 ★ *Calculer les fonctions dérivées (marginales) des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = x^4 - 3x + 1$
2. $f(x) = -2(x^2 - 9)$
3. $f(x) = (3x+2)^2$:
4. $f(x) = (2x-4)(-x+2)$:
5. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^3+1}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{2x-4}$

Propriété B3:
Soit u, une fonction définie, dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction définie par $f(x) = u^n(x)$ peut être dérivée, et sa dérivée vaut sur I : $f'(x) = u'nu^{n-1}(x)$. On note :

$$(u^n)' = u'nu^{n-1}$$

Exercice B3 *Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = (x-1)^3$
2. $f(x) = (2x+3)^4$
3. $f(x) = (x^2+x-1)^2$
4. $f(x) = (3x-1)^{12}$

III) Variations et dérivée

Comme on l'a vu précédemment le nombre dérivé représente le coefficient directeur de la tangente - qui est la droite qui ressemble le plus à la courbe autour de ce point de tangence. Localement, on peut ainsi déduire les variations de la fonction. Plus précisément :

Propriété B4:
Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I,

- *Si $f'(x) \geqslant 0$ sur I alors f est croissante sur I.*
- *Si $f'(x) = 0$ sur I alors f est constante sur I.*
- *Si $f'(x) \leqslant 0$ sur I alors f est décroissante sur I.*

L'étude du **signe de** f' renseigne sur les **variations de** f.

Exemple:
On veut étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 6x + 2$.
On dérive la fonction f : $f'(x) = 2x - 6$ et on cherche le signe de $f'(x)$:
$f'(x) > 0 \iff 2x - 6 > 0 \iff 2x > 6 \iff x > 3$. Ainsi, sur $]-\infty;3[$, $f'(x) < 0$, donc f est décroissante et sur $]3;+\infty[$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante. On résume ces résultats dans un tableau de variation, en ajoutant une ligne pour le signe de f'.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Var f		$\searrow$	-7	$\nearrow$	

Exercice B4 ★ *Étudier les variations des fonctions suivantes :*

1. $f_1(x) = -2x^2 + 4x + 1$ *sur* $\mathbb{R}$
2. $f_2(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ *sur* $\mathbb{R}$
3. $f_3(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$ *sur* $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$
4. $f_4(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 1}$ *sur* $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

Exercice B5 *On considère la fonction* f *définie sur* $]0;+\infty[$ *par* $f(x) = 2x^2 + \dfrac{4}{x}$

1. *Calculer la dérivée de* f
2. *Vérifier que* $f'(x) = \dfrac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$
3. *Etudier le signe de* $f'(x)$ *et déduire le tableau de variations de variations de* f.

IV) Équation de la tangente à une courbe

On a vu que le nombre dérivé en un nombre x_0 représentait le coefficient directeur de la tangent à la courbe au point d'abscisse x_0. Plus précisément, on a la formule suivante :

Propriété B5:

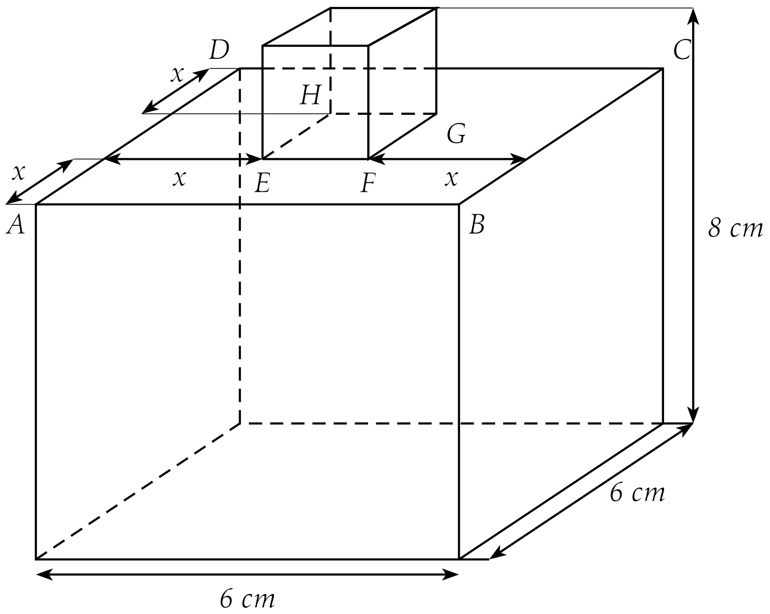
Soit f *une fonction définie et dérivable sur un intervalle* I *est* x_0 *u point de* I, *alors la tangente* Γ *à la courbe représentant* f *au point d'abscisse* x_0 *est donnée par :*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Exercice B6 ★ *Soit* f, *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x^2 - 3x - 1$.

1. *Calculer la fonction dérivée* f' *de la fonction* f.
2. *Étudier les variations de la fonction* f
3. *Tracer la courbe* $\mathscr{C}_f$ *sur* $[-5,5]$.
4. *Calculer les équations et tracer :*
   (a) Γ_0, *tangente à* $\mathscr{C}_f$ *en* $x = -3$
   (b) Γ_1, *tangente à* $\mathscr{C}_f$ *en* $x = 0$
   (c) Γ_2, *tangente à* $\mathscr{C}_f$ *en* $x = 1{,}5$
   (d) Γ_3, *tangente à* $\mathscr{C}_f$ *en* $x = 1$

Exercice B7 *Un graphiste designer a conçu un flacon pour un parfum. il s'agit d'un parallélépipède rectangle de base carrée surmonté d'un cube, comme le montre la figure ci-dessous :*



Le cube de base EFGH est placé au centre du carré supérieur ABCD. La variable x désigne la distance entre les côtés du carré de base EFGH du cube et les côtés du carré ABCD. Le flacon a une hauteur totale de 8 cm et les côtés du carré ABCL) mesurent 6 cm. On admettra que l'on a : $0 \leqslant x \leqslant 3$.

Partie A.

1. *Démontrer que le volume du petit cube est* $\mathrm{U}(x) = -8x^3 + 72x^2 - 216x + 216$.
2. *En déduire que le volume total du flacon est* $\mathrm{V}(x) = -8x^3 + 72x^2 - 144x + 288$.

Partie B.

1. *Soit* f *la fonction définie sur [0 ; 3] par* $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 36$.
   Soit $\mathscr{C}_f$ *la courbe représentant la fonction* f *dans le plan muni d'un repère orthogonal* $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$.
   (unités graphiques : 5 cm en abscisses et 0,5 cm en ordonnées).
   (a) f' *désignant la dérivée de la fonction* f*, calculer* $f'(x)$.
   (b) *Résoudre l'équation* $f'(x) = 0$ *dans l'intervalle [0 ; 3]. On appelle* α *la valeur exacte de son unique solution. Déterminer* α *puis sa valeur arrondie au dixième.*
   (c) *Étudier le signe de* $f'(x)$ *sur [0 ; 3] et dresser le tableau de variations de* f *sur [0 ; 3].*
   (d) *Pour quelle valeur de x cette fonction admet-elle un minimum ?*
2. *Déterminer une équation de la tangente T à* $\mathscr{C}_f$ *en son point d'abscisse 1.*
3. (a) *Recopier puis compléter le tableau de valeurs suivant en arrondissant les valeurs calculées au centième.*

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$							

   (b) *Construire la tangente T et la courbe* $\mathscr{C}_f$ *sur la feuille de papier millimétré.*

Partie C.

1. *Vérifier que le volume du flacon vérifie* $\mathrm{V}(x) = 8f(x)$.
2. *À l'aide de la partie B de ce problème, déterminer la valeur en* cm^3*, arrondie à l'unité, du volume minimal* V_m.

V) D'autres exercices

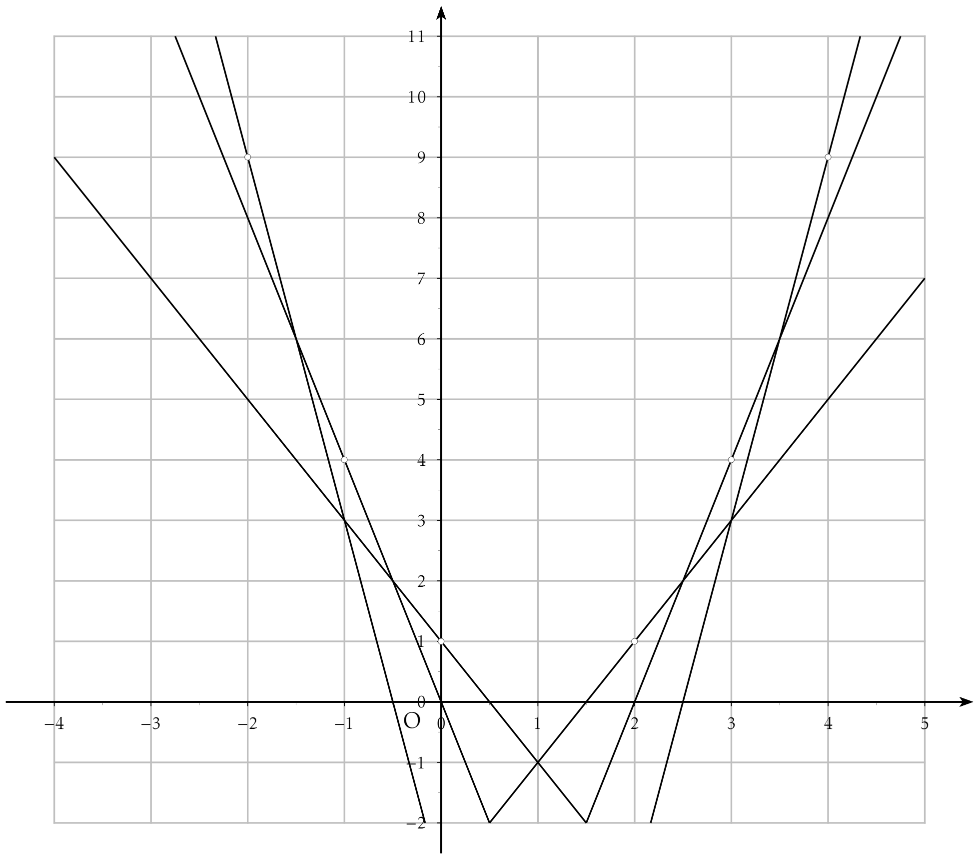
Exercice B8 *On munit le plan d'un repère* $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$*. Soient* f *une fonction polynomiale du second degré définie sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathscr{C}_f$ *et sa courbe représentative dans* $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$*. On sait que :*

- *L'image de 2 par* f *est 13.*
- *La tangente à* $\mathscr{C}_f$ *au point d'abscisse 1 admet pour coefficient directeur 7.*
- -1 *est un antécédent de* -2 *par* f*.*

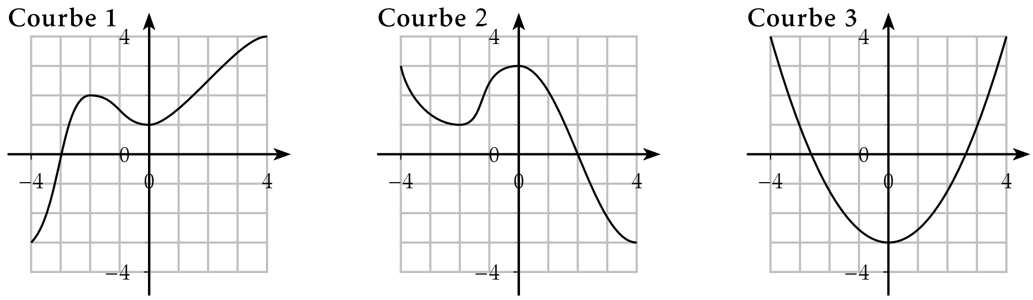
1. *Déterminer explicitement* $f(x)$ *pour* x *réel.*
2. *Dresser le tableau de variations de* f*.*
3. *Déterminer le minimum de* f *sur* $\mathbb{R}$*.*

Exercice B9 ★ *Sur le graphique ci-contre, il y avait la courbe représentative d'une fonction* f*. Il ne reste que quelques-uns de ses points et les tangentes à la courbe passant par ces points.*

1. *Tracer une ébauche de la courbe disparue.*
2. *Déterminer* $f'(-2)$*,* $f'(0)$ *et* $f'(3)$*.*



Exercice B10 *On donne ci-dessous trois courbes. Retrouver dans chacun des cas suivants, si une courbe correspond à la courbe représentative de la fonction f.*



a) $f(1) > 0$ *et* $f'(1) < 0$

b) $f(1) < 0$ *et* $f'(1) < 0$

c) $f(1) < 0$ *et* $f'(1) > 0$

d) $f(1) > 0$ *et* $f'(1) > 0$

e) $f'(2) = 0$

f) *Le maximum de* f *sur* $[-4;4]$ *est* 4, $f'(0) = 0$ *et* $f(0) \geqslant 0$.

g) *Le minimum de* f *sur* $[-4;4]$ *est* -3, $f(4) = 4$ *et* $f(-2) > 0$.

h) *L'équation* $f(x) = 0$ *admet une unique solution et* $f'(2) > 0$.

i) f *est définie sur* $[-4;4]$ *par* $f(x) = x\left(\dfrac{x^2}{4} - 3\right)$.

Exercice B11 ★ *Soit f la fonction définie sur $]-\infty;2[$ par :* $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x-2}$. *On note $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal.*

1. *Déterminez a, b, c pour que $(\mathscr{C}_f)$ ait les propriétés suivantes :*
   - $(\mathscr{C}_f)$ *passe par le point* $\mathrm{A}(0;5)$
   - *La tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point* A *est parallèle à l'axe des abscisses*
   - *La tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point* B *d'abscisse* 1 *a pour coefficient directeur* -3.
2. *Étudier les variations de la fonction f ainsi obtenue.*
3. *Tracer $(\mathscr{C}_f)$.*

Exercice B12 *Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par* $h(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{x^2}$, Γ *sa courbe représentative et* Δ *la droite d'équation* $y = \dfrac{x}{4}$.

1. *Calculer $h'(x)$ et montrer que* $h'(x) = \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{4x^3}$.
2. *Dresser son tableau de variation et préciser la tangente à Γ au point d'abscisse* 2.
3. *Représenter Γ et Δ sur un même graphique (unité 2 cm).*

Chapitre C

La fonction ln

Sommaire

I) Une nouvelle fonction

1) Présentation

John Neper est un mathématicien écossais du XVI$^{\text{ème}}$ siècle (1550-1617). A la fin de sa vie, préoccupé par l'idée que des calculs longs et fastidieux freinent les progrès de la science, il concentre ses recherches sur différents moyens de faciliter les calculs. En particulier, il étudie les liens en termes d'une suite géométrique et termes d'une suite arithmétiques. Il recherche donc une fonction vérifiant :

$$f(a \times b) = f(a) + f(b)$$

Il est alors amené à découvrir une nouvelle fonction : le logarithme népérien.

logarithme népérien:

La fonction logarithme népérien est la fonction notée ln, définie sur $]0;+\infty[$ et telle que :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \text{ pour } x > 0 \text{ et } \ln 1 = 0$$

2) Variations

- Sachant que la dérivée de la fonction logarithme est $\frac{1}{x}$ et qu'elle est définie sur $]0;+\infty[$, la dérivée est positive, et la fonction est donc croissante sur cet intervalle.
- D'autre part, on voit d'après le tableau de variation qu'il existe une unique valeur ayant pour image 1. On la note e : $\ln(e) = 1$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$			$+$			
$f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	

Exercice C1 ★ *A l'aide de la fonction TABLE de la calculatrice, donner une valeur approchée du nombre e à 0,001 près.*

Exercice C2 ★ *Étudier les variations des fonctions suivantes sur leurs ensembles de définition.*

1. ★ $f_1(x) = \ln x + x + 3$
2. $f_2(x) = x^2 - 2\ln x + 2$
3. $f_3(x) = x\ln x - 2x$
4. $f_4(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

II) Les fonctions du type $\ln u$.

Propriété C1:

- *Soit* u, *une fonction définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$, *alors la fonction* f *définie par* $f(x) = \ln(u(x))$ *est définie sur* I *si et seulement si* $u(x) > 0$ *sur* I.
- *Soit* u, *une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$, *alors la fonction* f *définie par* $f(x) = \ln(u(x))$ *peut être dérivée, et sa dérivée vaut sur* I : $f'(x) = \dfrac{u'}{u}$. *On note :*

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Exemple:

- *Par exemple, l'ensemble de définition de la fonction* f *définie par* $f(x) = \ln(2x+4)$ *est* $\mathscr{D}_f =]-2\,;+\infty[$. *Car* $2x+4 > 0 \Longleftrightarrow 2x > -4 \Longleftrightarrow x > -2$.
- *Sur cet intervalle,* $f'(x) = \dfrac{2}{2x+4} = \dfrac{\cancel{2} \times 1}{\cancel{2} \times (x+2)} = \dfrac{1}{x+2}$

Méthode pratique :

Dans le cas plus général d'une fonction f *définie par* $f(x) = \ln[u(x)]$, *nous avons vu que la dérivée était* $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. *Or on sait déjà que* $u(x) > 0$ *(sinon, la fonction n'existerait pas !). Ainsi le signe de la dérivée est simplement le même que celui de* $u'(x)$.

Exemple:

Étudier les variations de la fonction f *définie sur* $]-\infty;+\infty[$ *par* $f(x) = \ln(x^2+2x+2)$.

- f *est bien définie sur* $]-\infty;+\infty[$ *car* x^2+2x+2 *est toujours strictement positif* $(\Delta = -4)$
- f *est de la forme* $\ln u$, *donc* $f' = \dfrac{u'}{u}$ *avec* $u(x) = x^2+2x+2$ *et* $u'(x) = 2x+2$. *Ainsi :* $f'(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$.
- $x^2+2x+2 > 0$, *donc* $f'(x)$ *est du même signe que* $2x+2$. *Or* $2x+2 > 0 \Longleftrightarrow x > -1$. *On a donc le tableau de variation suivant :*

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice C3 ★ *Trouver les ensembles de définition des fonctions suivantes et étudier leurs variations après avoir calculé leurs dérivées.*

1. $f_1(x) = \ln(x+3)$
2. ★ $f_2(x) = \ln(x^2-1)$
3. $f_3(x) = \ln(4-x^2)$
4. $f_4(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{1-x}\right)$
5. $f_5(x) = x\ln(x^2+1)$

III) Calculs avec la fonction ln

1) Propriétés fondamentales de la fonction ln

Propriété C2:
Soient a et b deux réels strictement positifs, on a la relation fondamentale suivante :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b).$$

Propriété C3:
Soient a et b deux réels strictement positifs et n est un entier naturel, alors :

- ♦ $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- ♦ $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- ♦ $\ln(a^n) = n\ln(a)$.
- ♦ $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.

En résumé, le logarithme népérien a la particularité de transformer les produits en sommes, les quotients en différences et les puissances en multiplications.

Exemple:
Transformations d'expressions numériques (sur les intervalles où elles sont définies) :

- $\ln(24) = \ln(2^3 \times 3) = \ln(2^3) + \ln(3) = 3\ln(2) + \ln(3)$.
- $\ln\left(\dfrac{192}{108}\right) = \ln\left(\dfrac{16}{9}\right) = \ln(16) - \ln(9) = \ln(2^4) - \ln(3^2) = 4\ln(2) - 2\ln(3)$.
- $\ln(\sqrt{96}) = \dfrac{1}{2}\ln(96) = \dfrac{1}{2}\ln(2^5 \times 3) = \dfrac{1}{2}[5\ln(2) + \ln(3)]$.
- $\ln(x+3) + \ln(2x+1) = \ln[(x+3)(2x+1)] = \ln(2x^2+7x+3)$.
- $\ln(3x) - \ln(3) + \ln(x^2) = \ln\left(\dfrac{3x \times x^2}{3}\right) = \ln(x^3) = 3\ln(x)$.
- $\ln(\sqrt{x-1}) = \dfrac{1}{2}\ln(x-1)$.

|

Exercice C4 ★ *Simplifier au maximum*

1. $\ln 2 - \ln 4 + \ln 8 - \ln 16$
2. $3\ln 3 + 2\ln 6 - \ln 4\sqrt{3}$
3. $\ln \frac{5}{4} + 2\ln 2$
4. $\frac{3}{4}\ln x^2 + \ln \frac{1}{x^2}$ *si* $x > 0$.

2) Nombre e

D'après le tableau de variation de la fonction ln, on a vu que l'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$. Ce réel est noté e et vaut environ 2,718. On a donc deux valeurs importantes à connaitre pour le logarithme :

Propriété C4:

$\ln(1) = 0$ *et* $\ln(e) = 1$

Exercice C5 ★ *Simplifier les expressions suivantes :*

1. $\ln(e^2)$.
2. $\ln(e^4)$.
3. $\ln(e^{-1})$.
4. $\ln(e^{-5})$.

Propriété C5:

On remarque que pour tout entier n, $\ln(e^n) = n$.

3) Résolution d'équations et d'inéquations

Propriété C6:

Si $u > 0$, $v > 0$, *alors on a les résultats suivants :*

- *L'équation* $\ln(u) = \ln(v)$ *équivaut à* $u = v$.
- *L'équation* $\ln(u) < \ln(v)$ *équivaut à* $u < v$.
- *L'équation* $\ln(u) > \ln(v)$ *équivaut à* $u > v$.

Remarque:

En particulier $\ln(u) < 0$ *équivaut à* $0 < u < 1$ *et* $\ln(u) > 0$ *équivaut à* $u > 1$.

Exercice C6 ★ *Résoudre dans* $\mathbb{R}$

1. $\ln(x) = 4$
2. $2\ln(x) - \ln(x^3) = -5$
3. $\ln(-x^2 + 9) = 0$
4. $\ln(x^2 - 4) < \ln(3x)$

Exercice C7 ★ *Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par :*

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. *Déterminer la dérivée f' de f et montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1-x}{(1+x)^2}$.*
2. (a) *Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.*
   (b) *Calculer la valeur exacte de $f(1)$.*
   (c) *Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.*
3. *Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.*
4. (a) ★ *Justifier que l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution α dans l'intervalle $[1\,;\,5]$.*
   Démontrer que $\ln(1+\alpha) = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha}$.
   (b) ★ *Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.*
   (c) ★ *Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[\,\mathrm{O}\,;\,\alpha\,]$.*
5. *Tracer, dans le repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$, la tangente $\mathscr{T}$, la droite $\mathscr{D}$ puis la courbe $\mathscr{C}$.*

Chapitre D

La fonction Exponentielle

Sommaire

I) Étude de la fonction

1) Définition

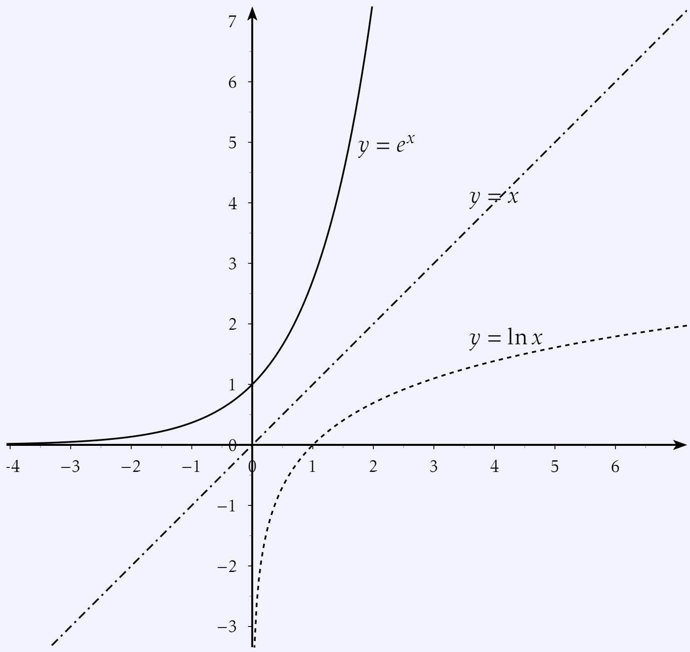
Fonction exponentielle:

Comme on l'a vu dans le cours précédent :
Si $x > 0$ et $y \in \mathbb{N}$:

$$\ln x = y \iff x = e^y.$$

Autrement dit, tout nombre entier y a un unique antécédent pour la fonction ln : le nombre e^y. On étend donc cette définition à $\mathbb{R}$ tout entier :
Nous allons étudier cette fonction :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0;+\infty[\\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$



On a donc par exemple $e^0 = 1$ (Puisque $\ln 1 = 0$)

Propriété D1:

- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x.$
- $\forall x > 0, e^{\ln x} = x$

2) Dérivée et variations

Propriété D2:
Comme on l'a dit précédemment :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$$

Propriété D3:

- *La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ est dérivable et :*

$$f'(x) = e^x$$

C'est à dire que la dérivée de la fonction exponentielle est elle-même.

- *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction e^u est dérivable aussi sur I et :*

$$(e^u)' = u' \times e^u$$

Exercice D1 ★ *Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:*

1. $f_1 : x \mapsto e^{x^2+1}$
2. $f_2 : x \mapsto e^{-x^2+2x+3}$
3. $f_3 : x \mapsto xe^x$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{x}{e^x}$

Propriété D4:

De l'expression de la dérivée, on déduit que la fonction $x \mapsto e^x$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En résumé :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x) = e^x$			+				
$f(x) = e^x$	0^+	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice D2 ★ *Étudier les variations des 4 fonctions f_1, f_2 ★, f_3, f_4 de l'exercice précédent.*

II) Calculs avec la fonction exponentielle

1) Propriétés fondamentales de la fonction exponentielle

Propriété D5:
Pour tous $x,y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$.
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
- $(e^x)^n = e^{nx}$.

Exemple:

Par exemple, pour tout réels x, $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x+2}} = e^{(2x+1)-(x+2)} = e^{2x+1-x-2} = e^{x-1}$

Exercice D3 ★ *Simplifier les expressions suivantes sur les intervalles où elles sont définies :*

1. $e^{x+1} \times e^{3x+1}$
2. $\left(e^{x+1}\right)^2$
3. $e \times e^{-x+2}$
4. $\dfrac{e^{4x-5}}{e^{x+2}}$
5. $e^{2\ln 3}$
6. $\dfrac{e^{-x} \times e^{x+3}}{e \times e^2}$

2) Résolution d'équations

Propriété D6:

Si x, y et $\lambda > 0$ sont 3 réels, on a les résultats suivants :

- *L'équation $e^x = e^y$ équivaut à $x = y$.*
- *L'équation* $e^x = \lambda \begin{cases} \text{n'a pas de solution si } \lambda \leqslant 0 \\ \text{équivaut à } x = \ln \lambda \text{ si } \lambda > 0 \end{cases}$

Exemple:

Résolution de $e^{x+1} = e^{3x-1}$:

$e^{x+1} = e^{3x-1} \iff x + 1 = 3x - 1 \iff -2x = -2 \iff x = 1$

Exercice D4 ★ *Résoudre les équations suivantes :*

1. $e^{4x+1} = e^{-x+3}$
2. $e^{x+3} = 1$
3. $e^{x^2+1} = e^{2x}$
4. $e^x + 1 = 0$
5. $\dfrac{e^x}{e^{2x+1}} = 1$
6. $e^{x^2+x} = e^6$

3) Résolution d'inéquations

Propriété D7:

Pour tout réels x et y, on a les résultats suivants :

- *$e^x < 1$ équivaut à $x < 0$.*
- *$e^x > 1$ équivaut à $x > 0$.*

Plus généralement :

$e^x < e^y$ équivaut à $x < y$.

Exemple:

Résolution de $e^{2x+1} > e^{x-1}$: $e^{2x+1} > e^{x-1} \iff 2x + 1 > x - 1 \iff x > -2$

Exercice D5 ★ *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :*

1. $e^{2x+2} \leqslant e^{3x+1}$
2. $\dfrac{e^{x+1}}{e^{2x+5}} > 1$
3. $e^{x^2+1} \geqslant 1$
4. $\dfrac{e^{x^2+3x}}{e^4} > 1$
5. $e^{x+1} + 1 < 0$
6. $e^{4x-3} > 2e^x$

Chapitre E

Calcul Matriciel

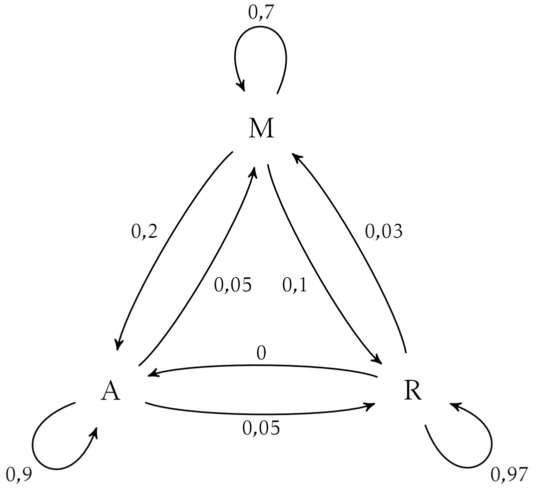
Sommaire

Évolution d'une population

Une région se divise en trois zones : une zone M à proximité de la mer et une zone A à proximité d'une grande agglomération et une zone R rurale. Ainsi, chaque année :

- 20% des habitants de la zone M partent chaque année habiter dans la zone A et 10% en zone R.
- 5% des habitants de la zone A partent habiter dans la zone M et 5% en zone R.
- 3% des habitants de la zone R partent habiter en zone B et aucun en zone M.

On sait de plus qu'en 2009, le quart de la population se trouvait en zone M et un tiers en zone R.



La population dans les 3 zones M, A et R va-t-elle se stabiliser ?

I) Généralités

1) Définition

Exemple:

Voici des tarifs postaux, en euros, valable en 2009 :

Poids/Recommandé	*Sans*	*R1*	*R2*	*R3*
Jusqu'à 20g	*0,56€*	*3,36€*	*3,96€*	*4,86€*
Jusqu'à 50g	*0,90€*	*3,70€*	*4,30€*	*5,20€*
Jusqu'à 100g	*1,35€*	*4,15€*	*4,75€*	*5,65€*
Jusqu'à 250g	*2,22€*	*5,02€*	*5,62€*	*6,52€*
Jusqu'à 500g	*3,02€*	*5,82€*	*6,42€*	*7,52€*
Jusqu'à 1kg	*3,92€*	*6,72€*	*7,32€*	*8,22€*
Jusqu'à 2kg	*5,16€*	*7,96€*	*8,56€*	*9,46€*
Jusqu'à 3kg	*6,04€*	*8,84€*	*9,33€*	*10,23€*

Les informations peuvent être présentées de façon plus synthétique à l'aide du tableau suivant :

$$\begin{pmatrix} 0{,}56 & 3{,}36 & 3{,}96 & 4{,}86 \\ 0{,}90 & 3{,}70 & 4{,}30 & 5{,}20 \\ 1{,}35 & 4{,}15 & 4{,}75 & 5{,}65 \\ 2{,}22 & 5{,}02 & 5{,}62 & 6{,}52 \\ 3{,}02 & 5{,}82 & 6{,}42 & 7{,}52 \\ 3{,}92 & 6{,}72 & 7{,}32 & 8{,}22 \\ 5{,}16 & 7{,}96 & 8{,}56 & 9{,}46 \\ 6{,}04 & 8{,}84 & 9{,}33 & 10{,}23 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice à 8 lignes et 4 colonnes.

Matrice:

Une **matrice** est un tableau de nombres.
Les nombres sont appelés les **coefficients**, les **termes** ou les **éléments** de la matrice.
Si on a n lignes et p colonnes, on dit qu'on a une matrice de **dimension** $n \times p$.
Si M est une matrice $n \times p$, le terme situé à la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne est noté $m_{i,j}$ (avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$).

Exemple:

La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ *est de dimension* 4×3.

Le terme a_{11} *est* 1*, le terme* a_{23} *est* 6*, le terme* a_{42} *est* 11.

2) Égalité de deux matrices

Propriété E1:
Deux matrices M et M' sont égales si et seulement si elles sont de même dimension et que chaque élément de l'une est égal à l'élément correspondant de l'autre, c'est dire si, pour tout i et tout j, on a $M_{i,j} = M'_{i,j}$.

Exemple:
On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & y & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Les matrices A *et* B *ne peuvent pas être égales puisqu'elles n'ont pas la même dimension. Les matrices* A *et* C *seront égales si et seulement si* $x = 1$ *et* $y = 8$.

II) Opérations sur les matrices

Exemple:
Soit A *la matrice donnant les tarifs postaux. Supposons que ces tarifs subissent une augmentation.*
Soit B *la matrice donnant les augmentations envisagés pour chacun des tarifs :*

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}04 & 0{,}09 & 0{,}18 \\ 0{,}03 & 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}20 \\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}75 & 0{,}65 \\ 0{,}22 & 0{,}02 & 0{,}62 & 0{,}52 \\ 0{,}32 & 0{,}82 & 0{,}42 & 0{,}52 \\ 0{,}42 & 0{,}72 & 0{,}32 & 0{,}22 \\ 0{,}50 & 0{,}96 & 0{,}56 & 0{,}46 \\ 0{,}50 & 0{,}84 & 0{,}33 & 0{,}23 \end{pmatrix}$$

soit C *La matrice donnant les nouveaux tarifs. Comme le nouveau tarif est obtenu en faisant l'addition de l'ancien tarif et de son augmentation, chaque coefficient de la matrice* C *est la somme du coefficient de la matrice* A *et du coefficient de la matrice* B *correspondant. On note* $C = A + B$.

1) Addition

Addition de matrices:

Pour **additionner** deux matrices de même dimension, il suffit d'ajouter chaque terme de la première matrice au terme situé à la même position sur la deuxième matrice.

Autrement dit, la somme de la matrice $A = (a_{ij})$ (n lignes, p colonnes) et de la matrice $B = (b_{ij})$ (n lignes, p colonnes) est la matrice $C = A + B$ (n lignes, p colonnes) telle que pour tout $i \in [1,n]$, pour tout $j \in [1,q]$, $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 4 \\ 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

Remarque:

On ne peut pas additionner des matrices qui n'ont pas les mêmes dimensions (c'est à dire des matrices telles que le nombre de ligne ou le nombre de colonne ne soit pas le même).

Propriété E2:

A, B et C étant des matrices de mêmes dimensions, k et k′ deux nombres. On démontre et nous admettrons que :

- $A + B = B + A$ *(commutativité);*
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(associativité);*
- $A + 0 = A$ *(où 0 est la matrice dont tous les coefficients sont nuls).*

2) Produit d'un nombre réel par une matrice

Exemple:

Supposons, toujours dans le cas des tarifs postaux, que les tarifs soient augmentés uniformément de 10%. Chaque coefficient de la matrice A est donc multiplié par 1,1. La matrice D des nouveaux tarifs est notée $D = 1{,}1A$.

Multiplication d'un réel et d'une matrice:

Si k est un nombre réel, et M une matrice, la matrice $k \times \mathrm{M}$ est obtenue en multipliant chaque terme de M par k.

Exemple:

$$10\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \\ 70 & 80 & 90 \end{pmatrix}$$

Propriété E3:

A étant une matrice, k et k' étant des nombres, on a :

- $1\mathrm{A} = \mathrm{A}$;
- $-\mathrm{A} = (-1)\mathrm{A}$;
- $k(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = k\mathrm{A} + k\mathrm{B}$ *(distributivité pour les matrices)* ;
- $(k+k')\mathrm{A} = k\mathrm{A} + k'\mathrm{A}$ *(distributivité pour les réels)* ;
- $k(k'\mathrm{A}) = (kk')\mathrm{A}$ *(associativité).*

Exemple:

Soient les matrices A et B :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ \mathrm{A}-\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ 3\mathrm{A}+2\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 11 \end{pmatrix},\ 2\mathrm{A}-3\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -7 & -7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) Produit de deux matrices

Exemple:

Dans une entreprise de vente de pièces détachées, deux services parallèle s'occupent du courrier. Notons S_1 *le service "traitement des commandes" et* S_2 *le service "échange-réclamation".*
Pour une semaine donnée, le volume du courrier traité est donné par le tableau suivant :

Service/jusqu'à	*20g*	*50g*	*100g*	*250g*	*500g*	*1kg*	*2kg*	*3 kg*
S_1	*50*	*35*	*15*	*10*	*0*	*0*	*0*	*0*
S_2	*7*	*3*	*4*	*10*	*0*	*0*	*0*	*1*

On souhaite calculer le coût d'envoi par service et suivant le type d'affranchissement du courrier. On dispose les calculs de la façon suivante :

$$\begin{array}{cccc} \textit{sans} & \textit{R1} & \textit{R2} & \textit{R3} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0,56 & 3,36 & 3,96 & 4,86 \\ 0,90 & 3,70 & 4,30 & 5,20 \\ 1,35 & 4,15 & 4,75 & 5,65 \\ 2,22 & 5,02 & 5,62 & 6,52 \\ 3,02 & 5,82 & 6,42 & 7,52 \\ 3,92 & 6,72 & 7,32 & 8,22 \\ 5,16 & 7,96 & 8,56 & 9,46 \\ 6,04 & 8,84 & 9,33 & 10,23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} S1 \\ S2 \end{array} \begin{pmatrix} 50 & 35 & 15 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & . & a_{13} & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Le nombre a_{13} *représente de l'ensemble des colis affranchis au type* R2 *pour le service* S1*.*

On obtient :

Services	*sans*	*R1*	*R2*	*R3*
S_1	*101.95*	.	.	.
S_2	.	.	.	.

Multiplication de matrices:

On ne peut multiplier deux matrices qui si le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la deuxième matrice.
Pour avoir le terme situé à la ligne i et la colonne j, il faut multiplier chaque terme de la ligne i de la première matrice par ceux de la colonne j de la deuxième matrice et faire la somme de tous ces produits.
Autrement dit, le produit de A (n lignes, p colonnes) par B (p lignes, q colonnes) est la matrice C = AB (n, lignes q colonnes) telle que $i \in [1,n]$, pour tout $j \in [1,q]$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$

Exemple:

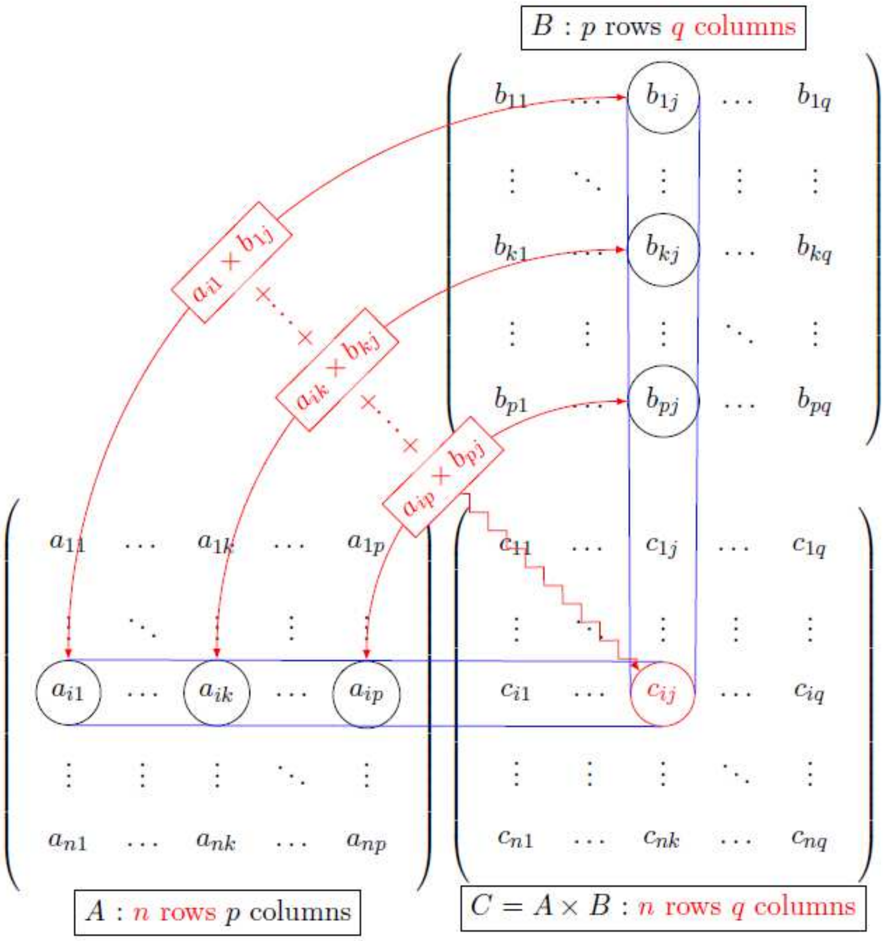
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 26 & 29 \\ 35 & 62 & 68 \\ 50 & 98 & 107 \end{pmatrix}.$

c_{11} *vient de* $1 \times (-4) + 2 \times 3 + 3 \times 6$.

c_{32} *vient de* $7 \times 5 + 8 \times 0 + 8 \times 7$.

Remarque:

Disposition des calculs : On multiplie les lignes de A *par les colonnes de* B *suivant le schéma ci-dessous :*



Propriété E4:

A, B *et* C *sont trois matrices telles que les opérations suivantes existent :*

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ *(associativité) ;*
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ *(distributivité à gauche) ;*
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ *(distributivité à droite) ;*

Attention ! en général $A \times B \neq B \times A$ *(il n'a pas commutativité).*

Exercice E1 ★ *Écrire les matrices de dimensions* 3×3 *dans les cas suivants :*

1. $\begin{cases} a_{ij} = i + j \text{ si } i \neq j; \\ a_{ij} = 0 \text{ si } i = j. \end{cases}$

2. $\begin{cases} a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j; \\ a_{ij} = (-1)^{i+j} \text{ si } i = j. \end{cases}$

3. $\begin{cases} a_{ij} = 0 \text{ si } i < j; \\ a_{ij} = i.j \text{ si } i \geq j. \end{cases}$

4. $\begin{cases} a_{ij} = 0 \text{ si } i + j \text{ pair}; \\ a_{ij} = i^j \text{ sinon }. \end{cases}$

Exercice E2 ★ *Soient les matrices* A, B *et* C :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer AB, AC, $B + C$, $AB + AC$, $A(B + C)$. *Que remarque-t-on ?*

Exercice E3 ★ *On donne les matrices :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* $A \times B$, *puis* $(A \times B) \times C$).
2. *Calculer* $B \times C$ *puis* $A \times (B \times C)$.
3. *Pouvait-on prévoir ce résultat ?*

Exercice E4 ★ *Calculer le produit* $M_1 \times M_2$ *pour chacun des cas suivants :*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & -7 \\ 2 & 0 & 4 \\ -5 & 2 & -8 \\ -1 & 5 & -1 \\ -7 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 9 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_2 = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 1 & 8 & -6 \\ -10 & 0 & 10 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice E5 ★ *On considère les matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Déterminer la matrice* $B = A - I$ *puis calculer les matrices* B^2 *et* B^3.
2. *En déduire la matrice* B^n *pour tout entier* n, $n \geq 3$.
3. *La formule du binôme, appliquée au développement de* $(B + I)^n$ *permet d'écrire pour tout entier* n, $n \geq 3$:

$$A^n = (I + B)^n = I + C_n^1.B + C_n^2.B^2 + C_n^3.B^3 + ... + C_n^k.B^k + +... + C_n^{n-1}.B_{n-1} + B^n$$

où :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(a) *Vérifier que, pour* $n \geq 3$: $A^n = I + C_n^1.B + C_n^2.B^2$

(b) *Montrer, à l'aide des résultats du 1) :*

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ n & 1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour tout entier } n, n \geq 3$$

Chapitre F

Inversion de matrice & Résolution de systèmes

Sommaire

I) Matrice inverse - Déterminants

Matrice inverse:

Soit M une matrice carrée de dimension $n\times n$. On appelle **matrice inverse** la matrice B telle que $A\times B = B\times A = I_n$ où I_n est la matrice identité de dimension $n\times n$.
Cette matrice est notée A^{-1}.

Exemple:

On considère $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$.
comme $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *les deux matrices* A *et* B *sont donc inverses l'une de l'autre.*

Propriété F1:

- *Si* A^{-1} *existe, elle est unique.*
- *Si* A *est inversible, alors* A^{-1} *aussi, et* $(A^{-1})^{-1} = A$.
- *La matrice nulle n'est pas inversible (car* $0\times B = B\times 0 = 0$ *pour toute matrice* B*).*
- *La matrice identité* I_n *est inversible et* $I_n^{-1} = I_n$ *car* $I_n \times I_n = I_n$.
- *Si les matrices* A *et* B *sont inversibles, alors* AB *aussi, et* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dans la pratique, pour montrer qu'une matrice est inversible, il suffit de montrer qu'elle est inversible à gauche ou qu'elle est inversible à droite grâce à la propriété suivante :

Propriété F2:

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- A *est inversible.*
- *Il existe* $B \in \mathscr{M}_n(K)$ *telle que* $A\times B = I_n$.
- *Il existe* $B \in \mathscr{M}_n(K)$ *telle que* $B\times A = I_n$.

Exemple:

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
Calculer A^2 *et montrer que* $A^2 = 2I - A$, *en déduire que* A *est inversible et calculer* A^{-1}.

Exercice F1 ★ *On donne les matrices :*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrices AB. *Que remarque-t-on ?*

Propriété F3:

Soit A *une matrice carrée, alors* A *est inversible* $\Longleftrightarrow$ *Det*(A) $\neq 0$.

Déterminant de taille 2:

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de la matrice A noté Det(A) ou $|A|$ la quantité :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Pour une matrice 3×3, on peut aussi calculer le determinant de la matrice, grâce à la règle de Sarrus (Professeur de mathématiques à l'université de Strasbourg (1826-1856) et membre de l'académie des sciences à Paris :

Déterminant de taille 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Comptés positivement : $\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$ Comptés négativement : $\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$

Bien évidemment on peut calculer le déterminant d'une matrice de taille quelconque... via par exemple votre calculatrice...

Exemple:

Calculer les déterminants suivants : $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

II) Systèmes linéaires

1) Principe du pivot de Gauss

Nous noterons toujours L_i la $i^{\text{ème}}$ ligne.

Propriété F4:

3 trois opérations élémentaires.
Partant d'un système linéaire quelconque (Σ), on obtient un système linéaire équivalent en lui appliquant l'une des opérations suivantes :

- *Permutation de deux lignes L_i et L_j . Opération notée $L_i \leftrightarrow L_j$*
- *Multiplication d'une ligne L_i par un scalaire α non nul. Opération notée $L_i \leftarrow \alpha L_i$*
- *Addition à une ligne L_i d'un multiple αL_j d'une autre ligne ($j \neq i$). Opération notée $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$*

Le principe du pivot de Gauss est le suivant : par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes, on ramène la résolution du système initial à celle d'un système triangulaire ou diagonal.

2) Application au calcul de l'inverse d'une matrice

Si A est une matrice inversible, alors :

$$AX = B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B$$

On peut donc calculer l'inverse d'une matrice en « résolvant »le système associé. Voici comment l'on présente en pratique : Calcul de l'inverse d'une matrice :

Exemple:

Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

On triangularise le système

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|cccl} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 0 & 1 & \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|cccl} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array}\right.$$

Puis on le diagonalise

$$\left.\begin{array}{ccc|cccl} 2 & 4 & 0 & -1 & 4 & 2 & \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & \leftarrow L_2 + L_3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|cccl} 2 & 0 & 0 & 3 & -8 & -2 & \leftarrow L_1 - 4L_2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|cccl} 1 & 0 & 0 & 3/2 & -4 & -1 & \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & \leftarrow -L_3 \end{array}\right.$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice F2 ★ *On considère la matrice carrée d'ordre 3 :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. *Déterminer l'inverse* A^{-1} *de la matrice* A.

3) Résolution d'un système

Un système linéaire de n équations à n inconnues est un système qui peut se mettre sous la forme $A \times X = B$, où A est une matrice $n \times n$, X est une matrice colonne $n \times 1$ contenant les inconnues et B est une matrice colonne $n \times 1$.

Exemple:

Le système $\begin{cases} 5x - y = 7 \\ -9x + 2y = 8 \end{cases}$ *peut me mettre sous la forme :* $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

Pour résoudre le système $A \times X = B$, si A est inversible, on peut multiplier les deux membres à gauche par A^{-1} (attention au sens, la multiplication des matrices n'étant pas commutative).
$A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B$, et donc ($A^{-1} \times A$ tant la matrice identité), on a

$$X = A^{-1} \times B$$

Exemple:

Dans l'exemple ci-dessus, on aurait
$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 103 \end{pmatrix}$

Exemple:

Résoudre le système $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ x - 3z = 1 \end{cases}$

Exercice F3 ★ *Une usine fabrique trois produits* P_1,P_2 *et* P_3. *Ces produits passent dans trois ateliers différents* A,B *et* C, *avec des temps de passage suivants :*

- P_1 *passe 2h dans l'atelier* A, *1h dans l'atelier* B *et 1h dans l'atelier* C.
- P_2 *passe 5h dans l'atelier* A, *3h dans l'atelier* B *et 2h dans l'atelier* C.
- P_3 *passe 3h dans l'atelier* A, *2h dans l'atelier* B *et 2h dans l'atelier* C.

1. *Quels seront les temps d'utilisation des différents ateliers lorsqu'on fabriquera 8 unités de* P_1, *10 unités de* P_2 *et 5 de* P_3 *?*
2. *Lors d'un programme de fabrication, la charge horaire des différents ateliers a été de 104h pour* A, *64h pour* B *et 55h pour* C. *Quelles sont les quantités de* P_1,P_2 *et* P_3 *fabriqués ?*

Chapitre G

Suites Numériques

Sommaire

I) Généralités

1) Définir une suite

Activité 1 :
Le taux de croissance de la population mondiale est actuellement de 1.14% par an.
En 2013, la population mondiale était de 7.091 milliards de personnes.
Si le taux de croissance reste le même, déterminer la population mondiale en 2014, 2015, 2016 et 2050.

Activité 2 :
Une unité de production fabrique des poupées et vend toute sa production. Le coût total de fabrication, en euros, de n poupées est donné par $C_n = 0.002n^2 + 2n + 4000$. Chaque poupées est vendue 11 euros.

1. Déterminer le bénéfice réalisé par l'entreprise pour la fabrication de 800 poupées.
2. Déterminer la plage de production qui dégage un bénéfice.
3. Quel est le bénéfice maximum et le nombre de poupées fabriquées et vendues correspondant ?

Activité 3 :
Poursuivez la suite de nombres suivante : 1 − 1 − 2 − 3 − 5 − 8 − ....

Suite:

Soit n_0 un entier naturel.
Une suite numérique u est une fonction associant à tout entier naturel $n \geqslant n_0$ un réel $u(n)$ noté u_n.
Le réel $u(n)$ est appelé terme d'indice n de la suite.
Notation : La suite u est souvent notée (u_n) ou $(u_n)_{n \geqslant n_0}$.

Remarques:

- *Si la suite (u_n) est définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.*
  Son premier terme est u_0.
  Son second terme est u_1.
  Son troisième terme est u_2.
  ...
- *Si on considère une suite numérique (u_n), alors u_n est le terme d'indice n.*
  Le terme précédent u_n est le terme u_{n-1}.
  Le terme suivant u_n est le terme u_{n+1}.

Les 3 manières de définir une suite:

Soient n_0 un entier naturel et $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite numérique.

- **Définition explicite :**

(u_n) est <u>définie de manière explicite</u> s'il existe une fonction f définie sur $[n_0;+\infty[$ telle que :

$$\forall n \geqslant n_0 \text{ , } u_n = f(n)$$

- **<u>Définition par récurrence :</u>**

(u_n) est <u>définie par récurrence</u> si on connait le premier terme u_{n_0} et s'il existe une fonction f telle que :

$$\forall n \geqslant n_0 \text{ , } u_{n+1} = f(u_n)$$

- **<u>Définition à l'aide d'un algorithme :</u>**

(u_n) est <u>définie à l'aide d'un algorithme</u> s'il existe un algorithme renvoyant un nombre réel à partir de la saisie d'un entier naturel.

Exercice G1 *On considère la fonction* $f : x \mapsto 3x^2 - 5$. *Donner les* 4 *premiers termes des suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

1. $u_n = f(n)$.
2. $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice G2 *On considère* (u_n) *une suite numérique définie sur* $\mathbb{N}$ *par l'algorithme suivant :*
Prendre n un entier naturel quelconque.

- *Si n est pair, alors* u_n *est le reste de la division euclidienne de* $n/2$ *par* 3.
- *Sinon* u_n *est égal à* $\dfrac{n+5}{2}$.

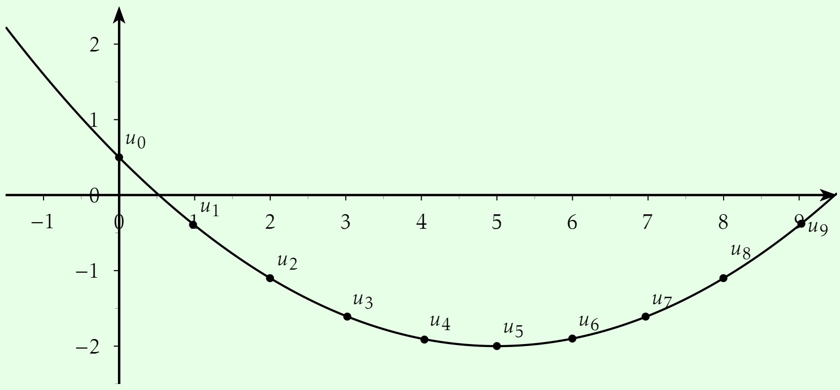
Déterminer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4.

2) Représentation graphique d'une suite

Méthode pratique :

Suite définie de manière explicite :

Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite numérique définie explicitement à partir d'une fonction f définie sur $[n_0;+\infty[$, alors la représentation graphique de (u_n) est l'ensemble des points de coordonnées $(n;u_n)$ où $n \geqslant n_0$ et où $u_n = f(n)$.



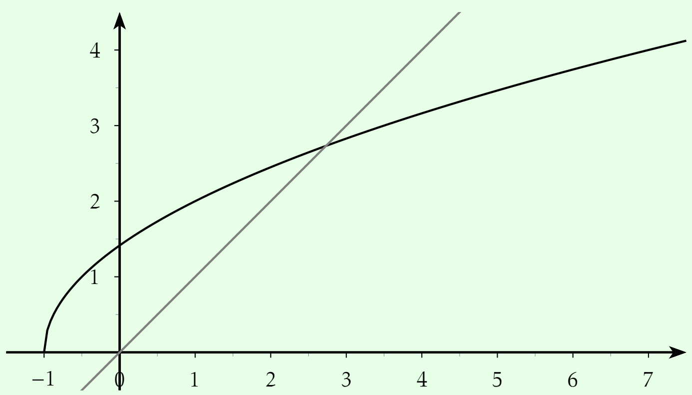
La représentation graphique de (u_n) est l'ensemble des points de $\mathscr{C}_f$ (la courbe de f) d'abscisse entière.

Exercice G3 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 3 + \dfrac{1}{1+n}$.*
Représenter graphiquement (u_n).

Méthode pratique :

Suite définie par récurrence :

On considère $\mathscr{C}_f$ la courbe d'une fonction f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ (u_0 étant donné). Représenter graphiquement la suite (u_n) consiste à placer les points de coordonnées $(u_n\ ;\ 0)$ de la manière suivante.



3) Sens de variations d'une suite

Suite croissante, suite décroissante:

Soient n_0 un entier naturel et $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite numérique.

- **suite croissante :**

  La suite (u_n) est croissante si $\forall n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

- **suite décroissante :**

  La suite (u_n) est décroissante si $\forall n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Suite constante :**

  La suite (u_n) est constante si $\forall n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n$.

Remarques:

- *Pour démontrer qu'une suite est croissante, décroissante ou constante, on peut calculer $u_{n+1} - u_n$ et en déterminer le signe.*
  - *Si $u_{n+1} - u_n$ est positive, alors (u_n) est croissante.*
  - *Si $u_{n+1} - u_n$ est négative, alors (u_n) est décroissante.*
  - *Si $u_{n+1} - u_n$ est nulle, alors (u_n) est constante.*
- *Pour démontrer qu'une suite de termes positifs est croissante, décroissante ou constante, on peut calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.*
  - *Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors (u_n) est croissante.*
  - *Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors (u_n) est décroissante.*
  - *Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors (u_n) est constante.*
- ***Attention :*** *Une suite peut être ni croissante, ni décroissante, ni constante (Par exemple : $u_n = (-1)^n$).*

Exercice G4 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = {u_n}^2 + 3u_n + 5$ avec $u_0 = 0$.*
Étudier la monotonie de la suite (u_n).

Exercice G5 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 5 \times 3^n$.*
Étudier la monotonie de la suite (u_n).

II) Suites arithmétiques et géométriques

1) Suites arithmétiques

Suite arithmétique:

Une suite (u_n) est arithmétique si pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + r$ ($r \in \mathbb{R}$).
r est la raison de la suite.

Propriété G1:

On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r.
On a les égalités suivantes :

- *Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.*
- *Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.*
- *Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.*

Propriété G2:

On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r.
On a les égalités suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n.r$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 + (n-1).r$

Plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant p$, $u_n = u_p + (n-p).r$

Propriété G3:

On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r.
On a les égalités suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$.

Remarque:

Plus généralement, on a la formule suivante :

$$u_k + u_{k+1} + \ldots + u_l = (\textit{nombre de termes}) \times \frac{\textit{premier terme} + \textit{dernier terme}}{2}$$

Exercice G6 *La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r.*

1. *On donne : $u_5 = 7$, $r = 2$.*
   Calculer u_1, u_{25} et u_{100}.
2. *On donne : $u_3 = 12$, $u_8 = 0$.*
   Calculer r, u_0 et u_{18}.
3. *On donne : $u_7 = \dfrac{7}{2}$, $u_{13} = \dfrac{13}{2}$.*
   Calculer u_0.

Exercice G7 *(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_2 + u_3 + u_4 = 15$ et $u_6 = 20$. Calculer son premier terme u_0 et sa raison r.*

Exercice G8 *Lors d'une épidémie, le nombre de patients d'un cabinet médical augmente chaque jour de 6. Le premier jour, il a reçu 34 patients. On note (p_n) le nombre de patients le n^e jour.*

1. *Quelle est la nature de la suite (p_n) ?*
2. *Déterminer p_n en fonction de n (pour $n \geqslant 1$).*
3. *Combien de patients sont-ils venus dans le cabinet pendant les 10 premiers jours ?*

2) Suites géométriques

Suite géométrique:

Une suite (u_n) est géométrique si pour tout entier n : $u_{n+1} = q \times u_n$ ($q \in \mathbb{R}$).
q est la raison de la suite.

Propriété G4:

On considère une suite géométrique (u_n) de raison q.
On a les égalités suivantes :

- *Si $q > 1$,*
  - *Si $u_0 > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.*
  - *Si $u_0 < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.*

  .
- *Si $0 < q < 1$, alors*
  - *Si $u_0 > 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.*
  - *Si $u_0 < 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.*

  .
- *Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.*

Propriété G5:

On considère une suite géométrique (u_n) de raison q.

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant p$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Propriété G6:

On considère une suite géométrique (u_n) de raison q.
On a les égalités suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 \times \frac{1 - q^{n}}{1 - q}.$

Remarque:

Plus généralement, on a la formule suivante :

$$u_k + u_{k+1} + \ldots + u_l = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Exercice G9 *La suite (u_n) est une suite géométrique de raison q.*

1. *On donne : $u_1 = 3$, $q = -2$.*
   Calculer u_4, u_8 et u_{11}.
2. *On donne : $u_3 = 2$, $u_7 = 18$, et de raison positive.*
   Calculer u_0, u_{15} et u_{20}.

Exercice G10 *On souhaite isoler phoniquement une pièce en y tapissant les murs de plaques isolantes d'épaisseur 0.5 cm d'indice d'affaiblissement acoustique de 70%. Afin d'obtenir un affaiblissement acoustique suffisant, on décide de superposer plusieurs plaques.*
On note (a_n) l'indice d'affaiblissement acoustique pour n plaques superposées.
On note (e_n) l'épaisseur pour n plaques superposées.

1. *Quelle est la nature de la suite (a_n) ?*
2. *Quelle est la nature de la suite (e_n) ?*
3. *Combien de plaques doit-on superposer pour obtenir un indice d'affaiblissement acoustique de 90% Quelle sera alors l'épaisseur totale ?*

Propriété G7:
On considère une suite géométrique (u_n) de raison q.

- *Si $q > 1$, alors*
  - *Si $u_0 > 0$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*
  - *Si $u_0 < 0$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*
- *Si $q = 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = u_0$.*
- *Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*
- *Si $q < -1$, alors (u_n) n'a pas de limite.*

Exercice G11 *Soit (u_n) la suite géométrique de terme initial $u_0 = 100$ et de raison $q = 1{,}1$.*

1. *Exprimer u_n en fonction de n.*
2. *Déterminer le sens de variation et la limite de (u_n).*
3. *Déterminer un rang p à partir duquel $u_n > 500$.*

Exercice G12 *L'accès internet chez les particuliers se fait majoritairement aujourd'hui en ADSL. Cette liaison utilise les câbles téléphoniques pour relier le particulier au DSLAM (répartiteur du fournisseur d'accès choisi). La puissance du signal disponible chez le particulier dépend de l'atténuation engendrée par les longueurs de câbles entre le particulier et le DSLAM. En parcourant le câble téléphonique, la puissance du signal diminue de 29.2% par tronçon de 100 mètres de câble.*

1. *On appelle p_0 la puissance disponible au répartiteur (DSLAM).*
   (a) *Exprimer la puissance p_1 disponible après un tronçon de 100 m de câble en fonction de p_0.*
   (b) *Vérifier que la proportion de puissance disponible après 2 tronçons de câble de 100 m est égale à 50.1% (valeur arrondie à 0.1 près).*
   (c) *Déterminer la valeur arrondie à 0.1 près de la proportion de puissance disponible après 5 tronçons de câble de 100 m.*
2. *On note p_n la puissance à la sortie de n tronçons de câble de 100 m, n étant un entier naturel.*
   (a) *Quelle est la nature de la suite (p_n) ? Justifier.*
   (b) *Pour tout entier naturel n, exprimer p_n en fonction de n et de p_0.*
   (c) *En déduire la proportion de puissance disponible après 15 tronçons de câble de 100 m.*
3. *La limite de l'ADSL*
   (a) *Quelle est la limite d'une suite géométrique de raison 0.708 ? Justifier.*
   (b) *Déterminer le plus grand entier naturel n tel que $0.708^n \geqslant 10^{-7}$.*
   (c) *La limite d'éligibilité au service ADSL est telle que $\dfrac{p_s}{p_e} \geq 10^{-7}$, où p_s désigne la puissance du signal chez le particulier et p_e la puissance fournie par le DSLAM.*
   Déterminer la distance théorique maximale de câblage entre le particulier et le DSLAM qui permette le fonctionnement de l'ADSL chez le particulier. (On donnera la valeur arrondie au mètre près.)