ESIEE AMIENS

rejoint

UniLaSalle Terre & Sciences

2023 - 2024

I4 - FISE

Statistiques et Fiabilité des Systèmes

Responsable du cours : Sonia LAHLEB

Auteur : Patrick DROUOT

Contact : *sonia.lahleb@unilasalle.fr*

ETABLISSEMENT CONSULAIRE SOUS TUTELLE DU MINISTERE DE L'INDUSTRIE
HABILITE PAR LA COMMISSION DES TITRES D'INGENIEUR
ET MEMBRE DE LA CONFERENCE DES GRANDES ECOLES

14 quai de la Somme – BP 10100
80082 AMIENS CEDEX 2
Tél. : 03.22.66.20.00 – Fax : 03.22.66.20.10
http ://www.esiee-amiens.fr

CCI AMIENS PICARDIE

AMIENS MÉTROPOLE

Région Hauts-de-France

Chapitre 1 - Statistiques descriptives.

Le besoin « statistiques » de posséder des données chiffrées est très anciens. La science statistique semble exister dès la naissance des premières structures sociales. D'ailleurs, les premiers textes écrits retrouvés étaient des recensements du bétail, des informations sur son cours et des contrats divers. On a ainsi trace de recensements en Chine au XXIIIe siècle av. J.-C. [1]

D'ailleurs, il semblerait selon l'historien Meyer que l'origine du mot « statistique » appartiendrait au langage administratif français colbertien. Il aurait été utilisé pour la première fois, par Claude Bouchu, intendant de Bourgogne, dans une « Déclaration des biens, charges, dettes et statistiques des communautés de la généralité de Bourgogne de 1666 à 1669 » [2]

Pour l'instant, les dictionnaires attribuent le mot « statistique » au latin statisticum (qui a trait à l'État), qui aurait été germanisé par Schmeitzel en 1749.

La statistique appliquée peut se diviser en deux branches :

- la statistique ..... : elle concerne les méthodes de recueil, description, visualisation et le résumé des données pouvant être présentés sous la forme de nombres ou de graphiques ;
- l' ..... statistique : la génération des modèles et de prédictions relatives aux phénomènes étudiés, tenant compte de l'aspect aléatoire et de l'incertitude des observations.

I. Quelques définitions.

1. Qu'est ce que la statistiques ?

Les statistiques sont aujourd'hui utilisées dans de nombreux domaines d'activités :

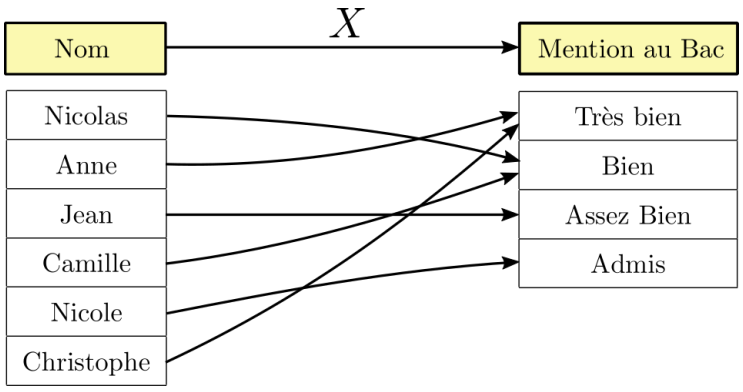
- Les médias qui nous abreuvent de résultats de sondages statistiques...
- L'économie : prospective, sondage, estimation, marketing, calcul de risque, etc.
- La santé : médecine et pharmacologie.
- L'industrie : fiabilité et contrôle de qualité.

Nous allons voir cette année, que la statistique va nous permettre de faire des propositions en quantifiant leur niveau d'incertitude.

2. Vocabulaire.

- On appelle ..... les objets ou les personnes qu'on étudie.
- Chaque objet ou personne étudié s'appelle un ..... ou une .....
- La chose étudiée est appelé le ..... .
- L'application qui à chaque individu associe sa modalité est appelée la .....
  Elle est l'expression mathématique du caractère.

1. wikipedia : Histoire des statistiques.
2. Claude Bouchu et le mot « statistique », par Dominique Pepin : https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00986920



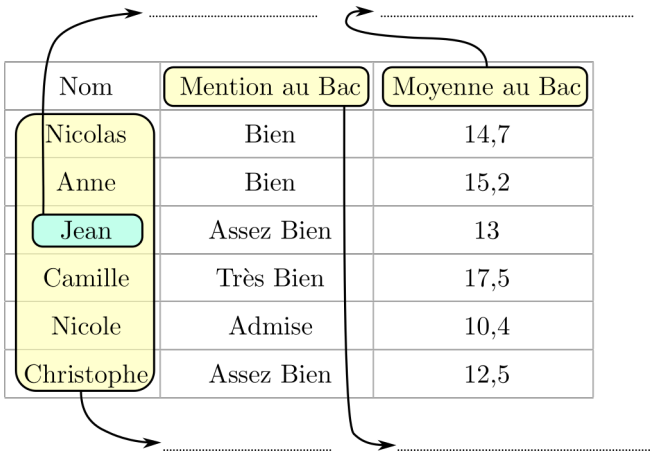
X est une variable .....

- L'ensemble des valeurs prises par le caractère s'appelle des .....
  Les modalités de la variable statistiques X sont : .....
- Les mesures effectuées sur les individus de la population s'appelle des .....
- La séries des observations s'appelle une .....

Mentions (x_i)	Admis	Assez Bien	Bien	Très bien
Effectifs (n_i)				

Une variable statistique est dite :

- ..... lorsqu'elle est mesurée par un nombre (Notes des étudiants à l'examen de statistiques, durée de vie d'un téléphone portable, etc.). La série des « mentions au bac » n'est pas quantitative car les x_i ne se sont pas des nombres.
- ..... lorsque les modalités (ou les valeurs) qu'elle prend sont désignées par des noms. Par exemples, les modalités de la variable « *genre* » sont : Masculin et Féminin ; celles de la variable « *couleur des yeux* » sont Bleu, Marron, Noir, Vert, etc.



Quel sens pourrait-on donner à « la moyenne des mentions au baccalauréat » (Caractère qualitatif) ?
Par contre, il est facile de calculer la moyenne des moyennes au baccalauréat de ce groupe de bacheliers.

> Nous n'étudierons que des caractères quantitatifs, car il est difficile de faire des mathématiques sans données numériques.

Parmi les variables quantitatives, on distingue :

- les variables quantitatives ..... : elles ne prennent que des valeurs isolées (la note à l'examen de statistique). Elle peuvent prendre une infinité de valeurs, mais toutes, isolées (le nombre d'étoiles par galaxie).
- les variables quantitatives ..... : elles peuvent prendre toutes les valeurs dans un intervalle (la circonférence d'une vis en millimètres).

II. Mesures de tendance centrale.

1. Calcule de la moyenne.

Etude n° 1 :

125	133	129	115	141	117	128	138	152	128	127	105	131	117	163
115	123	144	104	101	112	145	110	118	114	123	102	124	138	126
147	115	120	112	109	124	125	107	113	108	136	116	122	131	132

- La population étudiée est : .....
- le caractère étudié (variable aléatoire) : .....
- la variable aléatoire est-elle continue ? .....
- L'effectif total : .....

La moyenne des vitesses mesurées est : $\frac{\quad + \quad + \quad + \ldots +}{} = \frac{5565}{} \simeq$ .....

Définition:

En statistique, lorsqu'il y a beaucoup de données, on les regroupe dans des intervalles appelés .....

Classe de vitesses	[100,110[	[110,120[	[120,130[	[130,140[	[140,150[	[150,170[
Centre des classes (x_i)	105	115				
Nombre de voitures (n_i)	7		13	7	4	

Hypothèses de travail avec des données regroupées en classes.

Les données de chaque classes seront supposées différentes et réparties ..... à l'intérieur de la classe. C'est la raison pour laquelle on représente une classe par son ..... (la moyenne de ses extrémités).

La moyenne des vitesses est :

$$\frac{7 \times \quad +12 \times \quad +}{45} = \frac{\quad}{45} \simeq \quad \text{km/h}$$

L'erreur est due à l'hypothèse de travail du regroupement en .....

Construction de classes

Le nombres de classes va dépendre de :

- la taille de la population : « Trop de classes » dilue l'information et « peu de classes » la concentre trop ;
- sa répartition : souvent pour les valeurs extrêmes, la concentration diminue et l' ..... des classes augmente.

☞ L'amplitude de la dernière classe de vitesses [150,170[est : .....

☞ L'amplitude de la deuxième classe de vitesses [110,120[est : .....

2. Qu'est-ce que la moyenne ?

a. Son calcul :

Notations :

(x_i)	:	la série statistique brute : les modalités n'ont pas été regroupées.
(x_i, n_i)	:	la série statistique où l'on a regroupé les individus ayant la même modalité.
x_i	:	i$^{\text{me}}$ valeur (modalité) de la variable statistique x.
n_i	:	Effectif de la valeur x_i.
N	:	Effectif total $N = \sum_i n_i$
...	:	la moyenne de la série statistiques (x_i), $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_i x_i$
		la moyenne de la série statistiques (x_i, n_i), ...

Exemple n° 1 : Considérons les données brutes suivant :

2 - 5 - 2 - 9 - 9 - 2 - 7 - 5 - 2 - 5

Il y a deux façons de les représenter :

- La première, on parle de la série statistique $x = (x_i)$: $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 2, \ldots, x_{101} = 5$
  Les n_i sont tous égaux à 1. On écrit $x = (2, 5, 2, 9, 9, 2, 7, 5, 2, 5)$
  $\sum_{i=1}^{10} x_i =$ ..... et $\overline{x} =$ .....
- La seconde, on parle de la série statistique $y = (y_i, n_i)$:

  $(y_1, n_1) = (2, 4)$, $(y_2, n_2) = (5, 3)$, $(y_3, n_3) = (9, 2)$, et .....

  On écrit $y = \big((2, 4), (5, 3), (9, 2), (7, 1)\big)$

  $\sum_{i=1}^{4} n_i x_i =$ ..... et $\overline{x} =$ .....

Notations des séries statistiques :

$(x-b) = (x_1 - b\,,\, x_2 - b\,,\, , x_3 - b\,,\, \ldots)$ et $ay = \big((ax_1, n_1)\,,\, (ax_2, n_2)\,,\, (ax_3, n_3)\,,\, \ldots\big)$

Exemple n° 2 : $(x-3) =$ ..... et $2y =$ .....

b. Propriétés de la moyenne.

Propriété

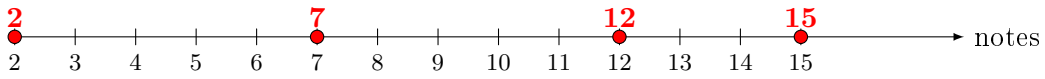
Etant donné une population $\mathcal{P}$. L'application qui a une série statistique de la population $\mathcal{P}$ associe sa moyenne est linéaire :

$$\overline{a \times x} = \ldots\ldots\ldots \quad , \quad \overline{x+y} = \ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad \overline{x+b} = \ldots\ldots\ldots$$

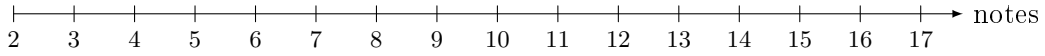
où a et b sont deux constantes réelles.

Exemple n° 3 : Considérons les quatre notes suivantes : 2, 7, 12, et 15.

- La moyenne de ces notes est égale à .....



- Translatons toutes ces notes de 2 points vers la droites :



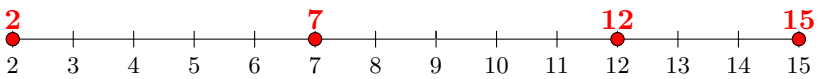
La moyenne ..... On écrit .....

Démonstration

Soient (x_i) et (y_i) deux séries statistiques issues d'une ..... d'effectif total N, et a un nombre réel.

- $\overline{ax} = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} ax_i = \dfrac{a}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i =$ .....
- $\overline{x+y} = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(x_i + y_i) = \dfrac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} y_i\right) =$ .....

Interprétation mécanique : La moyenne est le point d'équilibre des notes :



c. La moyenne définie par les écarts :

Considérons la série statistiques à k modalités : $(x_i, n_i)_{i=1,\dots,k}$ où $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$

Etant donné un nombre réel a :

- $a - x_i$ est l'écart entre la i$^{\text{me}}$ modalité du caractère et a ;
- $a - x_i < 0$ signifie que x_i est ..... à a ;
- $a - x_i > 0$ signifie que x_i est ..... à a ;
- $f(a) = \sum_{i=1}^{k} n_i(a - x_i)$ est la somme de tous ces écarts pondérés par leur effectif.

Déterminons la valeur de a pour laquelle f s'annule ?

$$\begin{aligned} f(a) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{k} n_i(a - x_i) &= 0 \\ \left(\sum_{i=1}^{k} n_i a\right) - \left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right) &= 0 \\ a\sum_{i=1}^{k} n_i &= \left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right) \\ a &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \overline{x} \end{aligned}$$

Ainsi, la moyenne peut être définie comme étant la valeur centrale qui annule les écarts :

.....

Exemple n° 4 : Considérons les quatre notes suivantes : 2, 7, 12, et 15. La moyenne de ces notes est égale à .....

Etudions les écarts à la moyenne :

Notes	2	7	12	15	Total
Ecarts à la moyenne					

Propriété

La somme des ..... à la moyenne est nulle.

III. Mesures de dispersion.

1. De la moyenne à la variance

La somme des écarts étant nuls, pour mesurer comment se dispersent les valeurs autour de la moyenne, on va les élever au carré.

Définition:

La somme des carrés des écarts à la moyenne, notée V ou ..... , est appelée la ..... :

$$V(x) = \frac{1}{N}\sum_i n_i(\overline{x} - x_i)^2$$

Définition:

La racine carrée de la variance est appelée l' ..... et est noté σ ou ..... :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i n_i(\overline{x} - x_i)^2}$$

Remarque : La variance peut aussi être notée σ^2, mais ce ne sera pas le cas dans ce cours.

2. Propriété de la variance.

Propriété

Soient a et b deux nombres réels, (x_i) une série statistique :

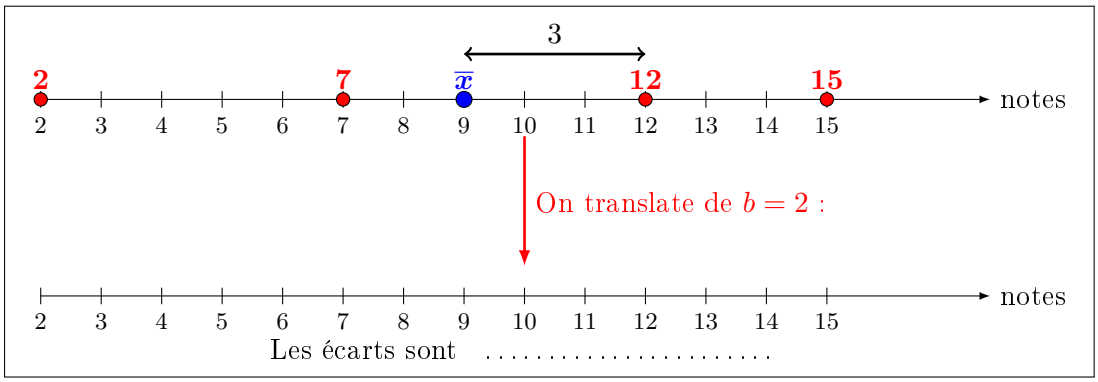
$$V(ax+b) = a^2V(x) \text{ et } \sigma_{ax+b} = |a|\sigma_x$$

Exemple n° 5 : Considérons les quatre notes suivantes : 2, 7, 12, et 15.

- $S^2 =$ ..... et donc $\sigma =$ .....
- Translatons toutes les notes de 2 points vers la droites, la moyenne est 9+2=11 et :

  $S^2 =$ .....

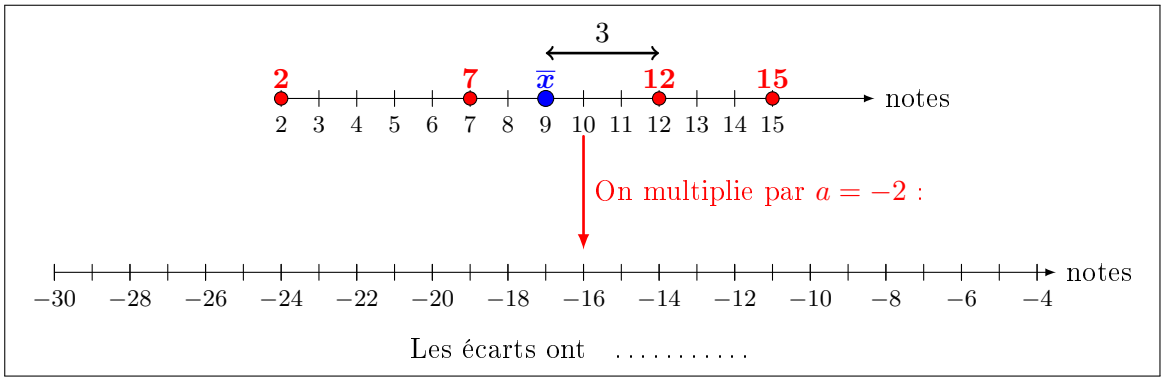
  On retrouve les mêmes écarts.



- Multiplions toutes les notes par -2, la moyenne est .....

  $S^2 =$ .....

  et donc la variance a été multipliée par .....



Théorème de König-Huygens (XVII^e)

La variance d'une série statistique (x_i, n_i) est :

$$V(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = \frac{1}{N}\sum_i n_i x_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_i n_i x_i\right)^2$$

Démonstration

$$V(x) = \frac{1}{N}\sum_i n_i(\overline{x} - x_i)^2 = \overline{(\overline{x} - x_i)^2} = \overline{\overline{x}^2 - 2\overline{x}x_i + x_i^2} = \overline{\overline{x}^2} - 2\overline{\overline{x}x_i} + \overline{x_i^2}$$

$\overline{x}$ est une constante donc :

- $\overline{\overline{x}^2} = \overline{x}^2$;
- $\overline{\overline{x}x_i} = \overline{x}\,\overline{x_i} = \overline{x}^2$
- $\overline{x_i^2}$ se note $\overline{x^2}$

Donc, $V(x) = \overline{x}^2 - 2\overline{x}^2 + \overline{x_2} = \overline{x^2} - \overline{x}^2$

Si vous avez du mal à comprendre cette démonstration, reprenez-la en remplaçant $\overline{x}$ par m.

Exemple n° 6 : Appliquons la formule de König-Huygens pour calculer la l'écart-type de la série statistique (x_i, n_i) suivante :

$$(3;\,4),\ (7;\,2),\ (-2;\,1),\ \text{et}\ (9;\,3)$$

- $\overline{x} =$ .....
- $\overline{x^2} =$ .....

Ainsi, $S^2 =$ ..... et donc $\sigma =$ .....

Définition:

Soient $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$ deux séries statistiques issues d'une même population d'effectif total N.
La ..... des séries x et y, notée ..... est

$$cov(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\overline{x} - x_i)(\overline{y} - y_i)$$

Remarque :

- $cov(x, x) = V(x)$
- Il n'y a pas de formule avec les n_i car, pour un indice i donné, les modalités x_i et les y_i n'ont pas forcément le même effectif.

Propriété

Soient $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$ deux séries statistiques issues d'une même population d'effectif total N.

- $cov(x, y) = \overline{(\overline{x} - x_i)(\overline{y} - y_i)}$
- $cov(x, y) = \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y} = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \right) - \overline{x}\,\overline{y}$

Propriété

Soient a et b deux nombres réels, (n_i, x_i) et (n_i, y_i) deux séries statistiques issues d'une même population.

$$V(x + y) = V(x) + V(y) + 2cov(x, y)$$

Exemple n° 7 : On a mesuré les longueurs en millimètres d'un échantillon de 100 tiges d'aciers à la sortie d'une machine automatique. On trouvé les résultats suivants :

Longueur des tiges (en mm)	**Nombre de tiges : n_i**	**centre des classes : x_i**	**effectifs partiels × centre : $n_i x_i$**	**effectifs partiels × centre^2 : $n_i x_i^2$**
[120 ; 130[	10	125	1250	156250
[130 ; 140[	20	135	2700	364500
[140 ; 150[	38	145	5510	798950
[150 ; 160[	25	155	3875	600625
[160 ; 170[	7	165	1155	190575
Total	**100**		**14490**	**2110900**

- La moyenne $\overline{x} =$ .....
- La moyenne des carrés : .....
- La variance : .....
- L'écart-type : .....

IV. Courbes de régression et corrélation.

Lorsque deux variables sont examinées, on cherche souvent à déterminer, s'il existe, un lien entre elles. Ce lien, s'il existe, peut être linéaire, quadratique, exponentiel, etc.

Pour cette recherche de lien, la méthode la plus utilisée est celle des moindres carrés.

Précisons cependant que les liens dont on parle sont strictement algébrique, et qu'ils ne donnent aucune information sur l'existence d'une dépendance entre les variables.

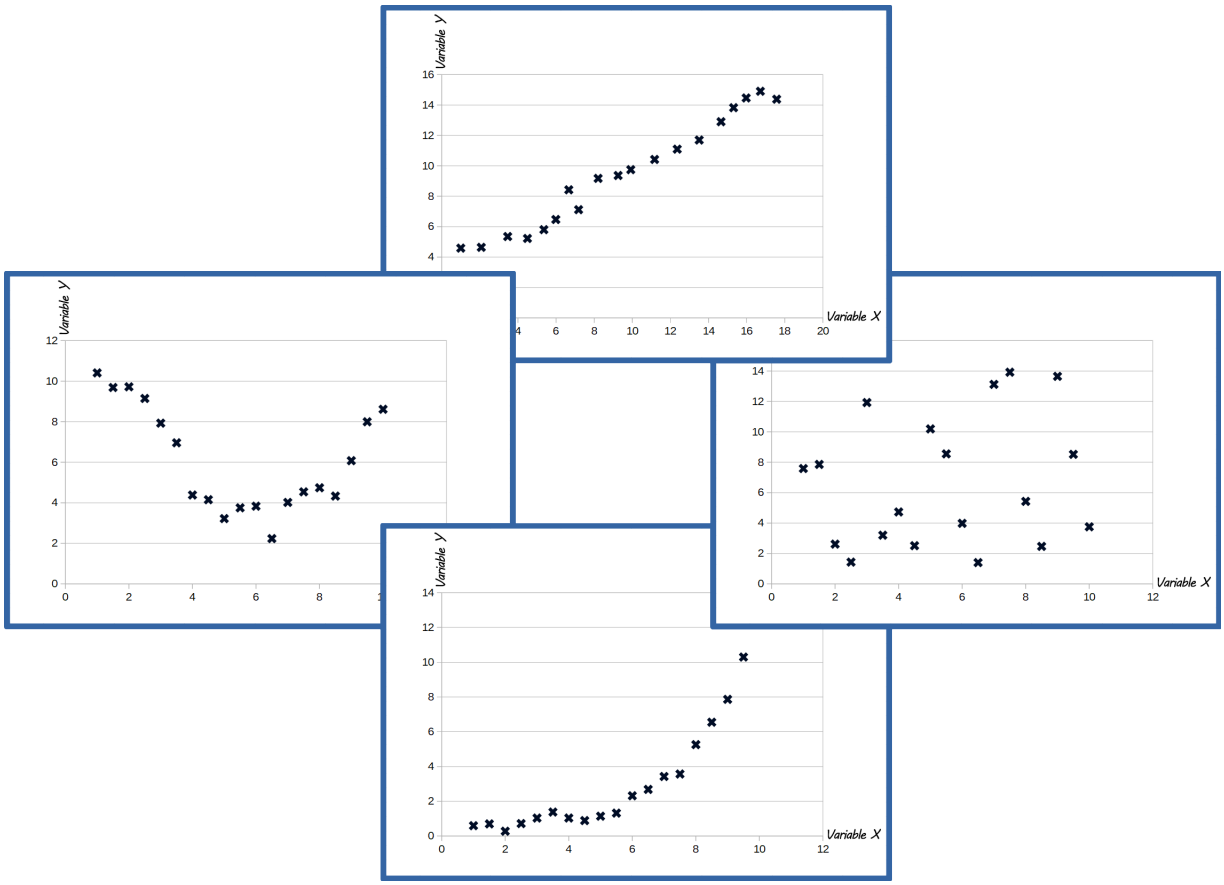
C'est la raison pour laquelle, lorsque deux variables sont indépendantes, leur corrélation est nulle, alors que la réciproque est fausse :

La corrélation nulle de deux variables n'entraîne pas leur indépendance.

1. Recherche graphique : le nuage de points

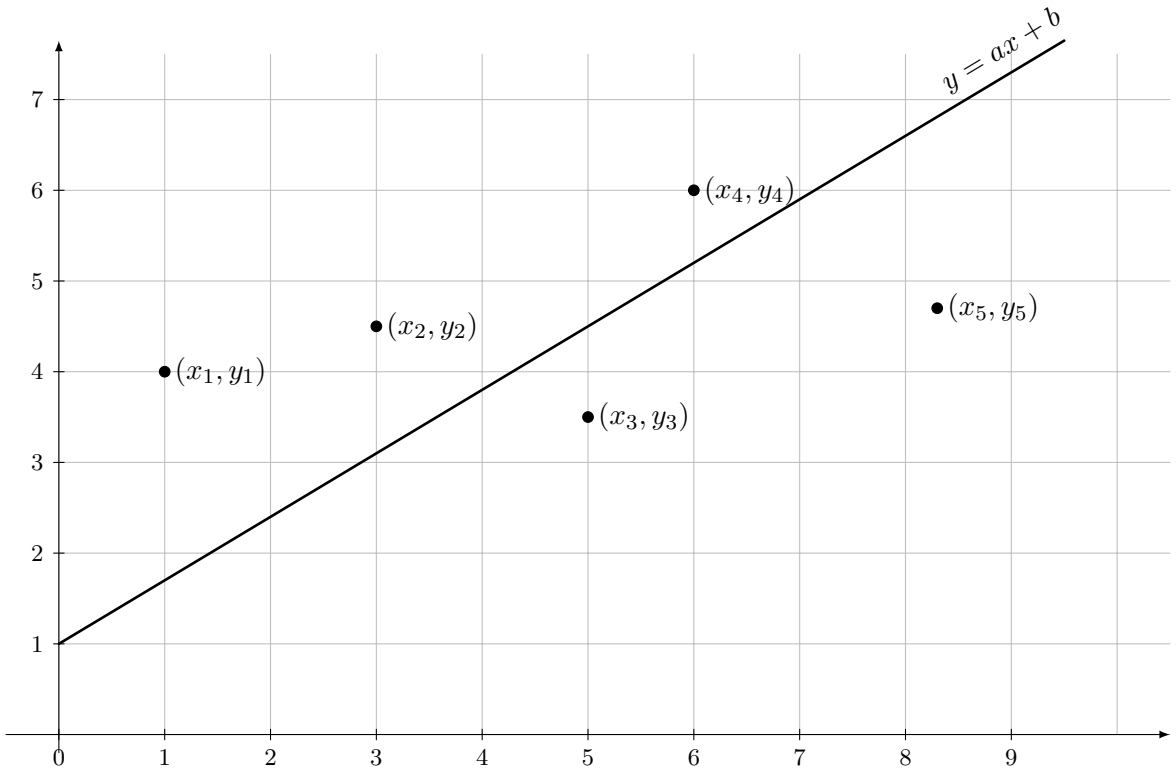
Définition:

On considère deux séries statistiques (x_i) et (y_i) définies sur une même population.
On appelle nuage de points l'ensemble des points de coordonnées $(x_i\,,\,y_i)$



2. Recherche algébrique : La méthode des moindres carrés.

a. Le cas linéaire :



On cherche la droite d'équation $Y = aX + b$ telles que $\sum_i d_i^2 = \sum_i (ax_i + b - y_i)^2$ soit minimum, d'où le nom de la méthode...

Définition:

On appelle droite de régression linéaire par la méthode des moindres carrés,
la droite d'équation : $y = ax + b$ où $a = \dfrac{cov(x,y)}{V(x)}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$

Propriété

Soit $(x_i\,,\,y_i)$ un nuage de points. Notons $y = ax + b$ l'équation réduite de la droite de régression linéaire.

- La somme $\sum_i (ax_i + b - y_i)^2$ est minimum.
- Le point de coordonnées $\left(\overline{x}\,,\,\overline{y}\right)^*$ appartient à cette droite.

* est appelé le point moyen du nuage de points.

Définition:

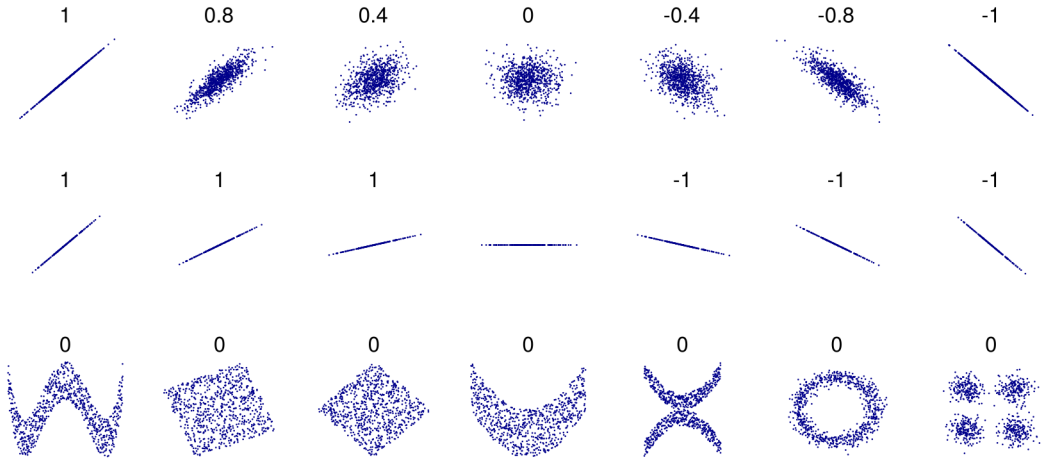
On appelle coefficient de corrélation, noté ρ, le nombre $\dfrac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$

Propriété

Soit ρ le coefficient de corrélation d'un nuage de points.

- Si $\rho = 1$ les points sont alignés suivant une droite ascendante.
- Si $\rho = -1$ les points sont alignés suivant une droite descendante.
- Plus $|\rho|$ est proche de 1, plus les points du nuages sont alignés.

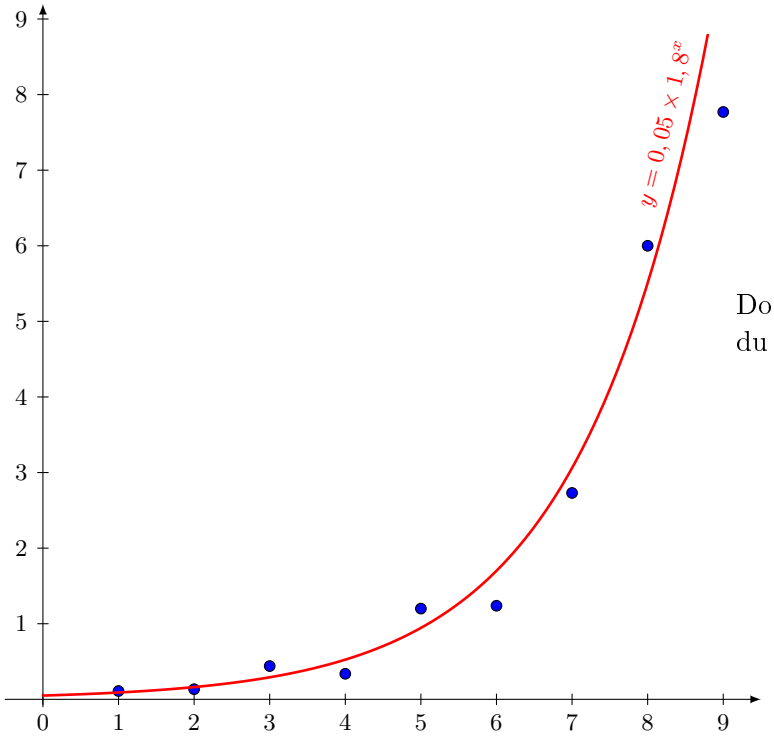
Exemple n° 8 : Coefficients de corrélations de différents nuages de points :



b. Le cas exponentiel :

On a une nuage de points dont la répartition semble suivre une courbe de la forme $y = ar^x$ où a et r sont deux constantes positives non nulles.

Exemple n° 9 :



$$y = ar^x \iff \ln(y) = \ln(a) + x\ln(r)$$

Donc, on détermine la droite de régression linéaire du nuage de points $\big(x_i\,,\,\ln(y_i)\big)$:

$$\begin{aligned} \ln(y) &= Ax + B \\ y &= \mathrm{e}^{Ax+B} \\ y &= \big(\mathrm{e}^A\big)^x \times \mathrm{e}^B \end{aligned}$$

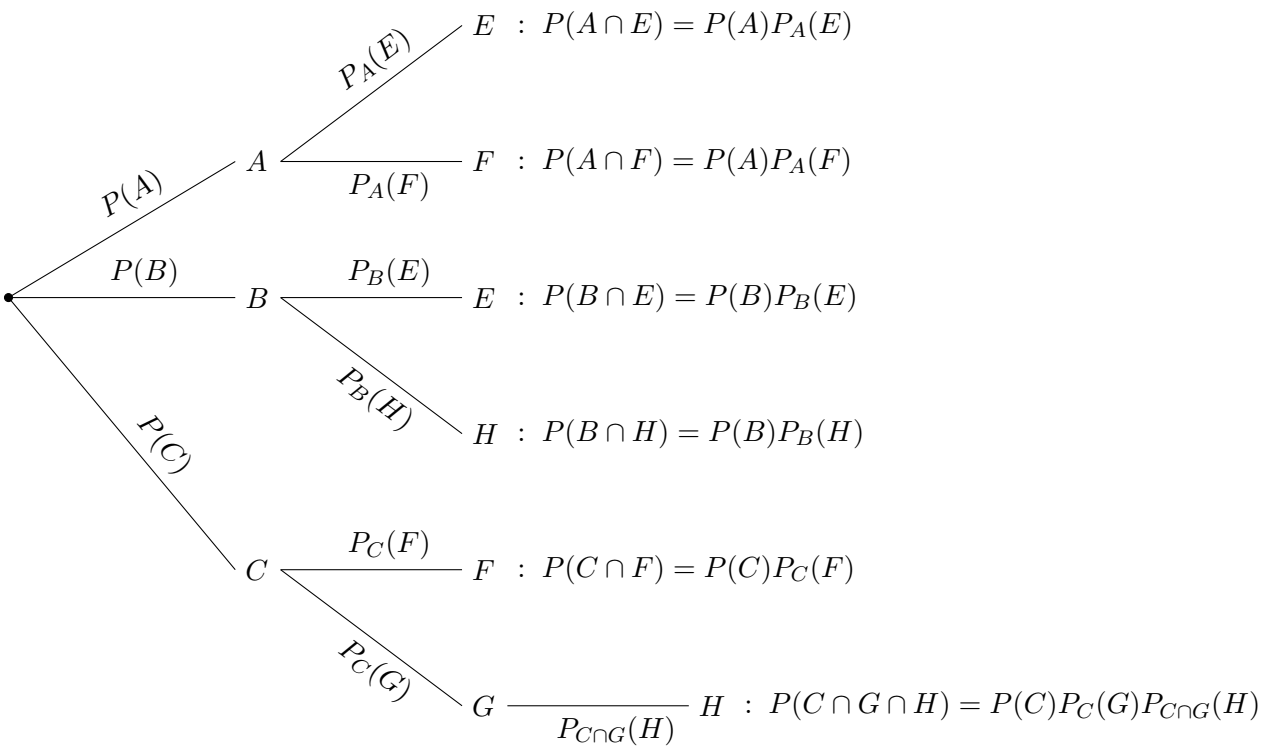
Chapitre 2 - Probabilités.

I. Rappels

Soient A, B, et C trois événements d'un univers Ω, on a les propriétés suivantes :

- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, et , $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont incompatibles.
- Si $P(B) \neq 0$ alors la probabilité de A sachant B est $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- A et B indépendants $\iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$

II. Arbres pondérés



Propriété

La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.

Exemple n° 10 :

- Au nœud racine : $P(A) + P(B) + P(C) = 1$
- Au nœud C : $P_C(F) + P_C(G) = 1$.

Propriété
La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.

Exemple n° 11 :

- Au chemin $A \cap F$: $P(A \cap F) = P(A)P_A(F)$
- Au chemin $C \cap G \cap H$: $P(C \cap G \cap H) = P(C)P_C(G)P_{C\cap G}(H)$

Formule des probabilités totales :
la probabilité d'une feuille est la somme des probabilités des chemins menant à cette feuille.

Exemple n° 12 : Il y a deux chemins menant à la feuille F : $A \cap F$ et $C \cap F$

$$P(F) = P(A \cap F) + P(C \cap F) = P(A)P_A(F) + P(C)P_C(F)$$

III. Variables aléatoires discrètes

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R, une boule verte V, et une boule bleue B. Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

2^{nd} tirage / 1^{er} tirage	R	V	B
R	(R,R)	(R,V)	(R,B)
V	(V,R)	(V,V)	(V,B)
B	(B,R)	(B,V)	(B,B)

On est en situation d'équiprobabilité donc la probabilité d'avoir au moins une boule bleue est :

.....

Complétons l'énoncé :

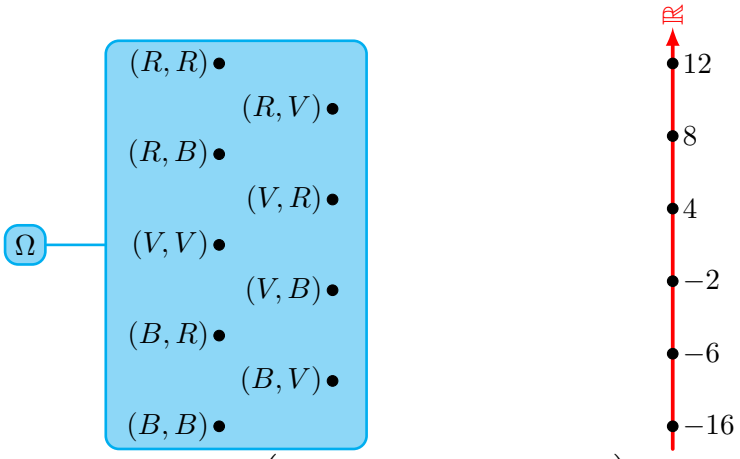
- Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 6€.
- Pour chaque boule verte tirée, on gagne 2€.
- Pour chaque boule bleue tirée, on perd 8€.

Notons G la variable aléatoire qui à un tirage de deux boules associe le gain du joueur :

$$\begin{array}{rccc} G : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (R,B) & \longmapsto & \ldots \end{array}$$

Les valeurs prises par G sont $G(\Omega) = \{$ ..... .

On a la situation suivante :



$P(G = 8) = P\Big(\{$ ..... $\}\Big) =$

L'espérance de la variable aléatoire G est :

☞ $E(G) =$ .....

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la ..... des gains est ..... . Autrement dit, ce jeu est ..... sur un « grand nombre » de parties.

$E(G^2) =$ .....

☞ $V(G) =$ ..... et $\sigma_G =$ .....

Finalement, grande différence entre les statistiques descriptives et les probabilités, c'est que dans le premier cas, l'expérience aléatoire à déjà eu lieu.

- En statistique descriptive, on prélève un échantillon de 100 parties, on mesure la moyenne des gains.
- En probabilités, on « espère » une moyenne nulle.

En mélangeant, ces deux branches des mathématiques, on va estimer la moyenne des gains sur 100 parties, on fera alors des statistiques ..... .

IV. Probabilités et statistiques.

Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers Ω tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$$

Probabilités	**Statistiques**
$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i P(X = x_i)$	$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
E est linéaire	La moyenne est linéaire
$V(X) = \sum_{i=1}^{N} \big(E(X) - x_i\big)^2 P(X = x_i)$ $= E\Big[E(X) - X\Big]$ $= E(X^2) - E(X)^2$	$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\overline{x} - x_i)^2$ $= \overline{(\overline{x} - x)^2}$ $= \overline{x^2} - \overline{x}^2$
$Cov(X,Y) = E\Big[\big(E(X) - X\big)\big(E(Y) - Y\big)\Big]$ $= E(XY) - E(X)E(Y)$	$Cov(x,y) = \overline{\big(\overline{x} - x_i\big)\big(\overline{y} - y_i\big)}$ $= \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}$
$V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\,Cov(X,Y)$	$V(ay + by) = a^2V(x) + b^2V(y) + 2ab\,Cov(x,y)$

Où $E(XY) = \sum_{i,j=1}^{N} x_i y_j P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$

Théorème

Si X et Y sont deux variables indépendantes alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y)\ ;\ Cov(X,Y) = 0\ \ ;V(X+Y) = V(X) + (Y)$$

Exemple n° 13 : Considérons le couple (X,Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

Y \ X	-1	0	1	Total
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
Total				

$P\big((X = -1) \cap (Y = 0)\big) =$

$P\big((X = 1) \cap (Y = 1)\big) =$

$P(X = 1) =$

$P(Y = 1) =$

Donc, $P\big((X = 1) \cap (Y = 1)\big) \neq P(X = 1)P(Y = 1)$
X et Y ne sont pas indépendantes.

☞ $E(X) =$ .....

☞ $E(Y) =$ .....

Ces deux espérances sont .....

☞ $E(XY) =$ .....

☞ $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

Une covariance nulle n'entraîne pas l'indépendance.

Chapitre 3 - Loi de probabilités.

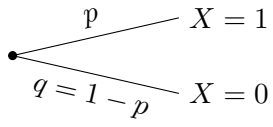
I. Les lois discrètes.

1. Loi de Bernoulli

Soit A un événement d'un univers Ω.
Soit X la variable aléatoire :

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0\,;\,1\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon } (\omega \in \overline{A}) \end{cases} \end{array}$$

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ où $p = P(A) = P(X = 1)$:



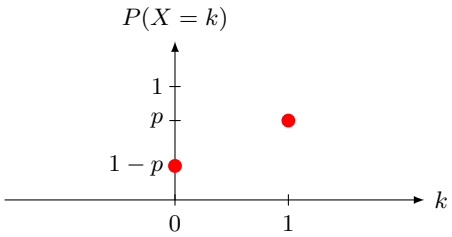
(épreuve de Bernoulli)

$E(X) =$ .....

$E(X^2) =$ .....

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$ ..... donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} =$ .....

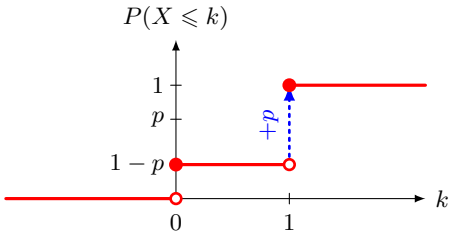
Loi de X



$P(X = -1) =$ ..... ; $P(X = 0) =$ .....

$P(X = 0,4) =$ ..... ; $P(X = 1,3) =$ .....

Fonction de répartition F_X



$F_X(-1) =$ .....

$F_X(0,3) =$ .....

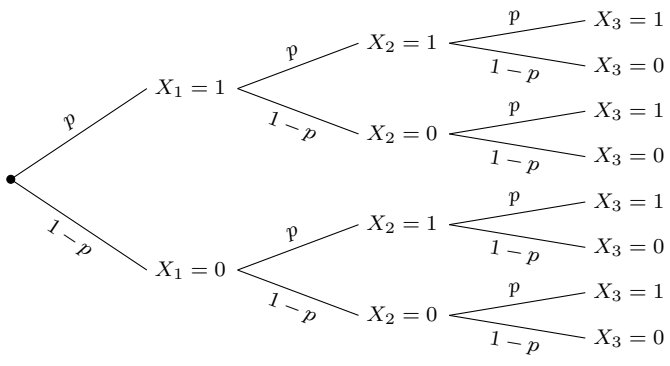
$F_X(1,3) =$ .....

$=$ .....

2. Loi binomiale

On répète successivement .... épreuves de Bernoulli ..... où l'on note à chaque fois la réalisation ou pas d'un événement A, de probabilité $p = P(A)$. A chaque épreuve de Bernoulli, on associe la variable aléatoire X_i, et on pose $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X

k	0	1	2	3
$P(X = k)$				

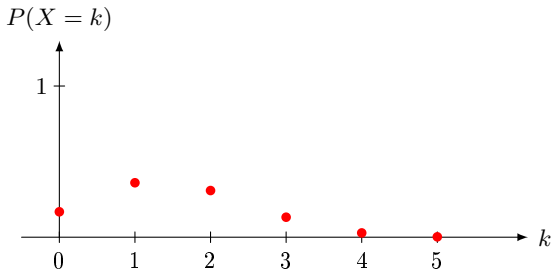
On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$P(X = k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\text{nb de façons de} \\ \text{réaliser } k \text{ évenements } A \\ \text{parmi } n \text{ épreuves.}}} \times p^k (1-p)^{n-k}$$

$E(X) =$ .....

$V(X) =$ ..... car les X_i sont ..... donc $\sigma(X) =$ .....

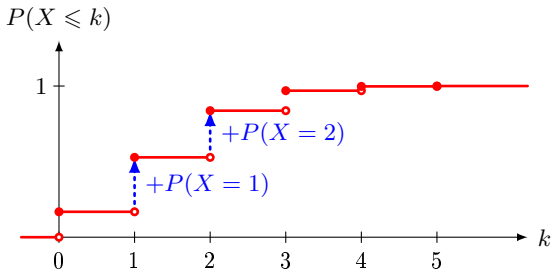
Loi de X où $X \sim \mathcal{B}(5; 0,3)$



$P(X = 2) =$ .....

$=$ .....

Fonction de répartition F_X

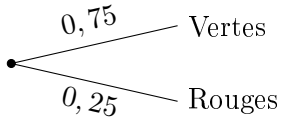


$F_X(2,7) =$ .....

$=$ .....

Exemple n° 14 : On considère une urne contenant 30 boules vertes et 10 boules rouges. On prélève 8 boules. Pour chacune d'elles, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'ôter la suivante. On dit effectuer un tirage de 8 boules ..... . On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées.

- Les tirages de chaque boules sont indépendants les uns des autres car : .....
- La variable aléatoire X suit une loi binomiale ..... car l'expérience aléatoire consiste à répéter successivement de manière ..... l'épreuve de Bernoulli suivante :



- $P(X=3) =$ .....
- $E(X) =$ ..... , $V(X) =$ ..... , et $\sigma_X =$ .....

Tirage avec remise

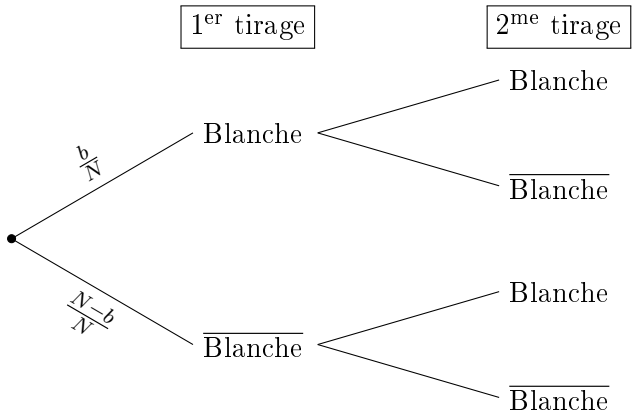
Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules avec remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage.

- la proportion de boules blanches dans l'urne est $p =$ .....
- la variable aléatoire X suit une loi binomiale .....

Remarque : Np est .....

3. Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules de l'urne, mais cette fois-ci, sans remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage.
On n'est plus dans une répétition d'une même épreuve de Bernoulli :



Les tirages successifs sont ici dépendants puisque la composition de l'urne est différente après chaque tirage.

Notons X le nombre de boule blanches tirées. On démontre que $P(X=k) = \dfrac{\binom{b}{k} \times \binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

Tirage sans remise

Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules ..... remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage.

- La proportion initiale de boules blanches dans l'urne est $p =$ ..... , et $q = 1-p$ est la proportion initiale des boules qui ne sont pas blanches.
- La variable aléatoire X suit une loi hypergéométrique ..... .
- $E(X) = np$ et $Var(X) = npq\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$.

II. Les lois continues.

Définition:

Une fonction de ..... ou de distribution de probabilité est une fonction réelle f qui satisfait aux deux conditions suivantes :

$$f \text{ est positive et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Définition:

On dit qu'une variable aléatoire X a pour densité ou ..... de probabilité la fonction f, si pour tous nombres réels a et b tels que $a \leqslant b$:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

On dit alors que la variable aléatoire X est ..... .

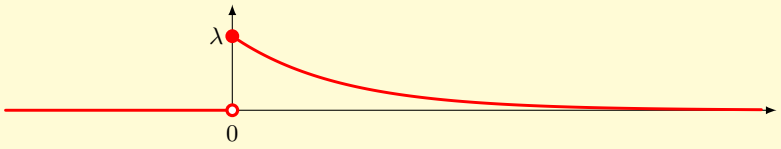
Définition:

L' ..... d'une variable aléatoire continue X, notée $E(X)$ est $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$

1. Loi exponentielle.

Définition:

Soit λ un nombre réel ..... On dit qu'un variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée ..... , si sa densité de probabilité est : $f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

On calcule de même en intégrant par parties :

$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda}E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

D'où $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Théorème

Si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors :

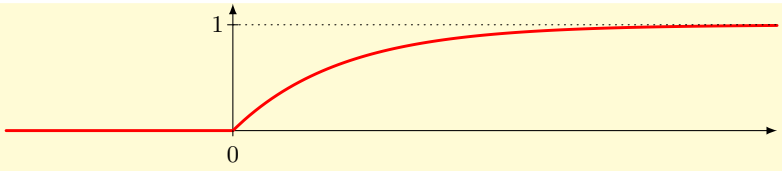
$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Pour $x \geqslant 0$, la fonction de répartition F est définie par : $F(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$

Théorème

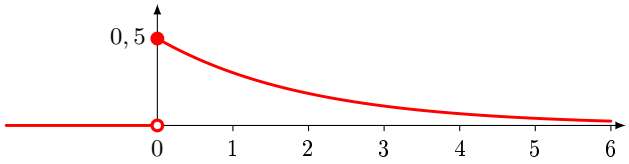
La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

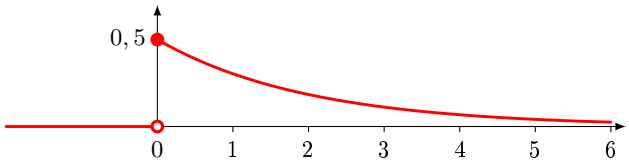


Exemple n° 15 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

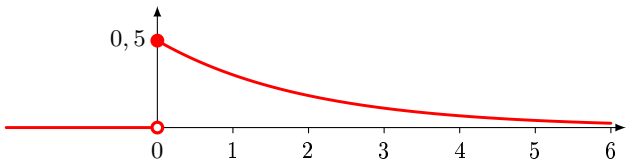
- $P(T=2) =$ .....



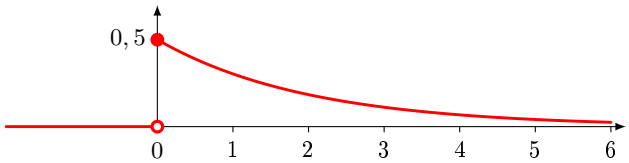
- $P(T \leqslant 2) =$ .....



- $P(2 \leqslant T \leqslant 4) =$ .....



- $P(T \geqslant 2) =$ .....



Théorème

La loi exponentielle est l'unique loi continue ..... : Si X suit une loi exponentielle :

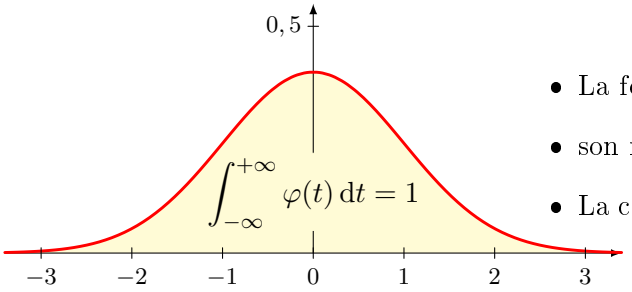
pour tout $t > 0$ et tout $h > 0$, $P_{(X \geqslant t)}(X \geqslant t+s) = P(X \geqslant s)$

Remarque : Si la durée de votre survie, en années, suivait une loi exponentielle, alors, que vous ayez vécu $t = 4$ ans ou $t = 80$ ans, votre probabilité de vivre encore $s = 20$ ans serait la même.

2. La loi normale centrée réduite.

Définition:

On appelle densité de probabilité de ..... , la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$

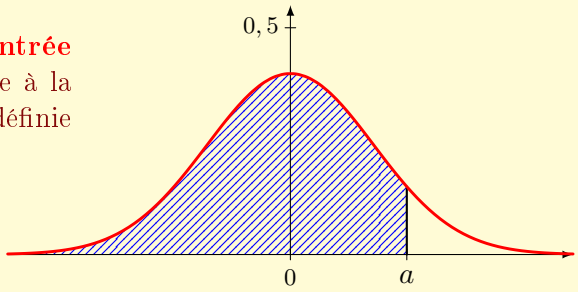


- La fonction φ est paire ;
- son maximum est atteint en 0 ;
- La courbe $\mathcal{C}_\varphi$ est appelée courbe en cloche ou **courbe de Gauss**.

Définition:

On dit que la variable aléatoire Z suit une loi normale **centrée réduite**, notée $\mathcal{N}(0,1)$ si sa densité de probabilité est égale à la fonction φ. Sa fonction de répartition, notée ..... , est définie par :

$$\Phi(a) = P(Z \leqslant a) = \int_{-\infty}^{a} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

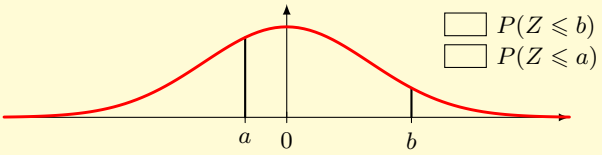


Utilisation de la table de la fonction de répartition

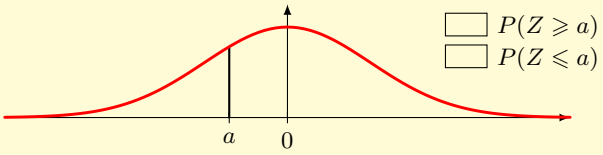
Théorème

Si une variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite alors pour tout réels a et b, $a < b$ on a :

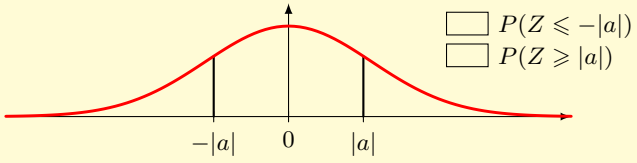
i. $P(a \leqslant Z \leqslant b) = P(Z \leqslant b) - P(Z \leqslant a)$;



ii. $P(Z \geqslant a) = 1 - P(Z \leqslant a)$;



iii. $P(Z \leqslant -|a|) = 1 - P(Z \leqslant |a|)$



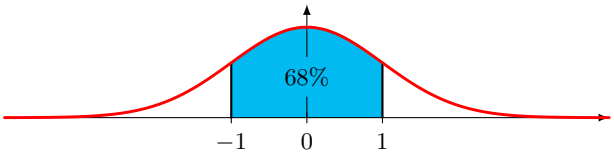
Exemple n° 16 : Z suit une loi normale centrée réduite.

1. $P(Z \geqslant 1,27)$ .....
2. $P(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$ .....
   .....

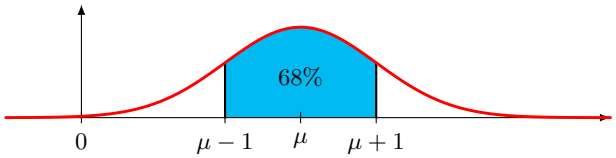
3. La loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

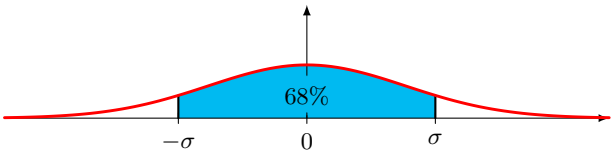
Distribution de Z



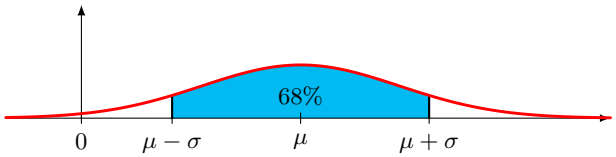
Distribution de $Z + \mu$



Distribution de $Z \times \sigma$



Distribution de $Z \times \sigma + \mu$



Théorème

Soient Z une variable aléatoire normale centrée et réduite, et σ un nombre réel strictement positif.
La variable aléatoire $X = Z \times \sigma + \mu$ suit la loi de densité (distribution) :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Son espérance $E(X) = \mu$ et son écart-type $\sigma_X = \sigma$.

Définition:

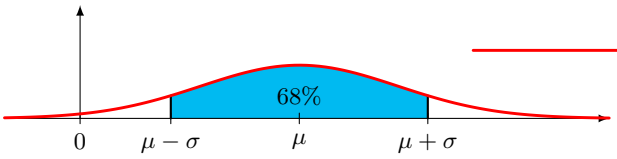
Carl Friedrich Gauss

Etant donné un nombre réel σ strictement positif et un réel μ. La ..... de centre μ et d'écart-type σ, notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ est la loi dont la densité de probabilité est

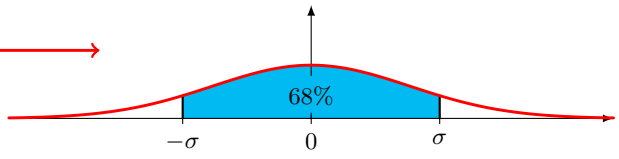
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0\,;+\infty] \\ & t & \longmapsto & \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \end{array}$$

Etant donné une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$:

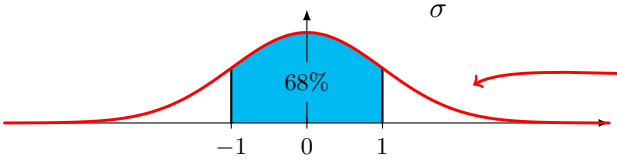
Distribution de X



Distribution de $X - \mu$



Distribution de $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$



Théorème

Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.

Exemple n° 17 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(5, 2)$.

$P(X \leqslant 8) =$ .....

Théorème

Si les variables aléatoires X_1 et X_2 suivent des lois normales indépendantes alors :

- $X_1 + X_2$ suit une loi normale ;
- pour tout réel a, la variable aléatoire aX_1 suit une loi normale.

Exemple n° 18 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2, \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5, 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X + Y$:

   - $E(X + Y) =$ .....
   - $V(X + Y) =$ ..... car X et Y sont .....
   - $\sigma_{X+Y} =$ .....
   - $(X + Y)$ suit une loi normale ..... car X et Y sont .....

2. La loi de $2X - 3Y$:

   - $E(2X - 3Y) =$ .....
   - $V(2X - 3Y) =$ ..... car X et Y sont .....
   - $\sigma_{2X-3Y} =$ .....
   - $(2X - 3Y)$ suit une loi normale ..... car X et Y sont .....

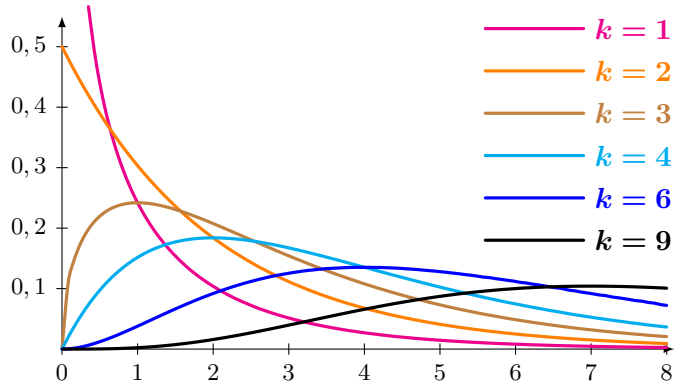
4. Loi du χ^2

Définition:

Soient k variables aléatoires indépendantes X_i suivant une loi normale d'espérance μ_i et écart-type σ_i. Par définition la variable aléatoire

$$Y = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$$

suit une loi du χ^2 à k degrés de liberté.



Lorsque k tend vers $+\infty$ la loi du χ^2 tend vers la loi normale d'espérance k et de variance $2k$.

En pratique, lorsque $k \geqslant 100$, une loi du χ^2 à k degré de liberté peut être approchée par une loi normale $\mathcal{N}(k, \sqrt{2k})$.

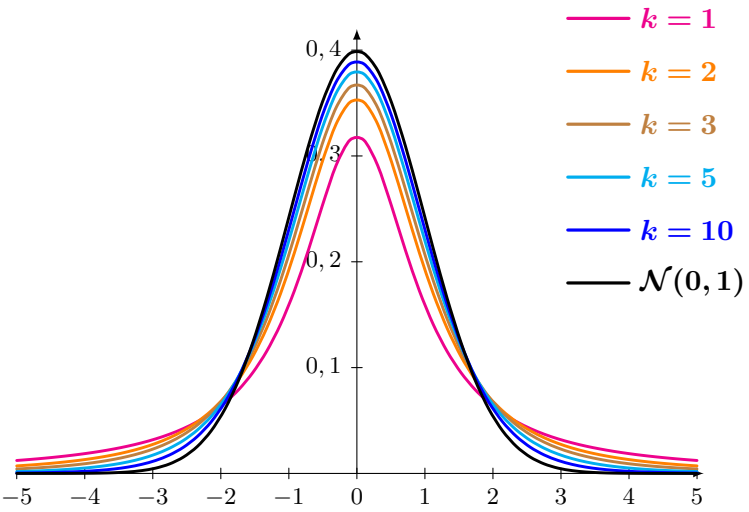
5. Loi de Student

Définition:

Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite et soit U une variable indépendante de Z et distribuée suivant la loi du χ^2 à k degrés de liberté. Par définition la variable

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/k}}$$

suit une loi de Student à k degrés de liberté.



- Son espérance vaut 0 et n'est définie que pour $k \geqslant 2$;
- Sa variance vaut $\dfrac{k}{k-2}$ et n'est définie que pour $k \geqslant 3$.

Lorsque k tend vers $+\infty$ la loi de Student tend vers la loi normale centrée réduite.

Remarque : En pratique, lorsque $k \geqslant 30$, on approche la loi de Student à k degré de liberté par la loi normale centrée réduite.

William Sealy Gosset

connu sous le pseudonyme **Student** est un statisticien anglais (1876 – 1937) qui inventa la distribution ne portant pas son nom.

Il était un employé de la brasserie Guinness qui lui demanda d'utiliser un pseudonyme pour diverses raisons. *Peut-être prétendait-il que la qualité de leurs produits était improbable...*

Chapitre 4 - Statistiques inférentielles : estimation par intervalles de confiances.

L' ..... est l'ensemble des méthodes mathématiques utilisées lors d'un sondage sur un échantillon afin de prédire le comportement d'une population, et ce, avec un contrôle sur l'erreur.

Ces méthodes se déclinent en deux catégories :

- l'estimation par .....
- les .....

Ces méthodes reposent essentiellement sur le théorème de la LIMITE CENTRALE.

I. Variables d'échantillonnages

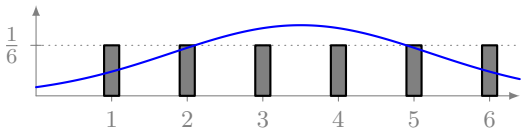
1. Le théorème de la limite centrale

Etude n° 2 :

On lance n dés cubiques, on note pour chacun d'eux X_n le résultat. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme de tous les résultats.

Pour $n = 1$:

k	1	2	3	4	5	6
$P(S_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



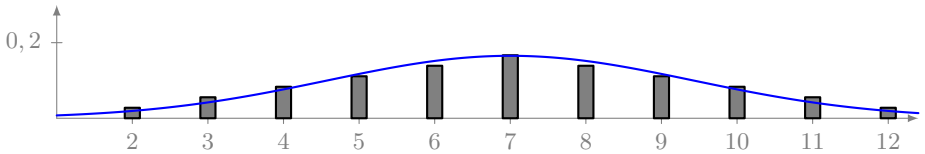
$$E(S_1) = E(X_1) = (1 \times \tfrac{1}{6}) + (2 \times \tfrac{1}{6}) + (3 \times \tfrac{1}{6}) + (4 \times \tfrac{1}{6}) + (5 \times \tfrac{1}{6}) + (6 \times \tfrac{1}{6}) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$\begin{aligned} V(S_1) = V(X_1) &= E(X_1^2) - E(X_1)^2 \\ &= (1^2 \times \tfrac{1}{6}) + (2^2 \times \tfrac{1}{6}) + (3^2 \times \tfrac{1}{6}) + (4^2 \times \tfrac{1}{6}) + (5^2 \times \tfrac{1}{6}) + (6^2 \times \tfrac{1}{6}) - (\tfrac{7}{2})^2 \\ &= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} \simeq 2,917 \end{aligned}$$

$$\sigma(S_1) = \sqrt{V(S_1)} \simeq 1,708$$

Pour $n = 2$:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S_2 = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



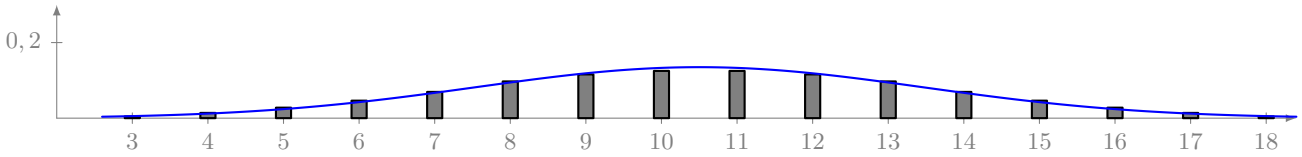
$$E(S_2) = E(X_1 + X_2) = 3,5 + 3,5 = 7$$

$$V(S_2) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = 2 \times \frac{35}{12} \simeq 5,833$$

$$\sigma(S_2) = \sqrt{V(S_2)} \simeq 2,415$$

Pour $n = 3$:

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(S_3 = k)$	$\frac{1}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$



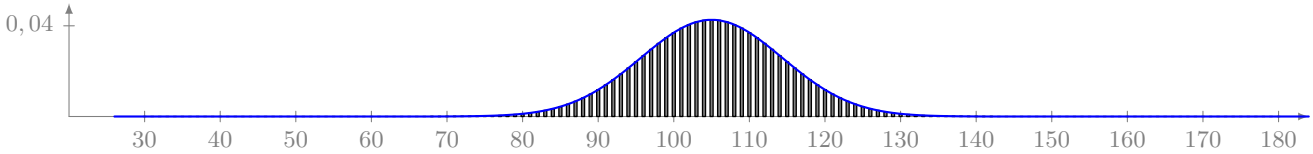
$$E(S_3) = E(X_1 + X_2 + X_3) = 3 \times 3,5 = 10,5$$

$$V(S_3) = V(X_1 + X_2 + X_3) = 3 \times V(X_1) = 3 \times \frac{35}{12} = 8,75$$

$$\sigma(S_3) = \sqrt{V(S_3)} \simeq 2,958$$

Pour $n = 30$:

k	30	31	32	33	34	$\cdots$	90	$\cdots$	100	$\cdots$	105	$\cdots$	110	$\cdots$	140	$\cdots$	180
$P(S_{30} = k)$	$\frac{1}{6^{30}}$	$\frac{30}{6^{30}}$	$\frac{465}{6^{30}}$	$\frac{4960}{6^{30}}$	$\frac{40920}{6^{30}}$	$\cdots$	0,0119	$\cdots$	0,03688	$\cdots$	0,04242	$\cdots$	0,03688	$\cdots$	0,000031025	$\cdots$	$\frac{1}{6^{30}}$



$$E(S_{30}) = E(X_1 + \ldots + X_{30}) = 30 \times 3,5 = 105$$

$$V(S_{30}) = V(X_1 + \ldots + X_{30}) = 30 \times V(X_1) = 30 \times \frac{35}{12} = 87,5$$

$$\sigma(S_{30}) = \sqrt{V(S_{30})} \simeq 9,354$$

Théorème de la limite centrale

Pierre-Simon de Laplace publie en 1812, le théorème de Laplace, appelé aujourd'hui théorème central limite...

Soient X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires ..... , suivants toutes la ..... , admettant une moyenne μ et un écart-type $\sigma \neq 0$ alors pour n ..... :

- la loi normale $\mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})$ est une bonne approximation de la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$;
- la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ est une bonne approximation de la variable aléatoire $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n$.

Remarque :

i. « n suffisamment grand » sera précisé par la suite, en général, $n \geqslant 30$ est suffisant.

ii. A défaut de démontrer ce théorème, on peut en expliquer les paramètres :

- $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$ ..... ;

  Et donc, $E\left(\overline{X_n}\right) =$ .....

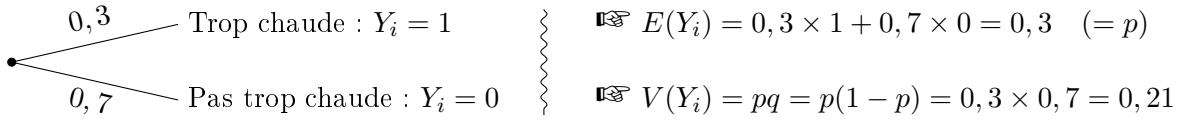
- $V(S_n) =$ .....

  Ainsi, $V\left(\overline{X_n}\right) =$ .....

  L'écart-type de $\overline{X_n}$ est .....

2. Application à la loi binomiale.

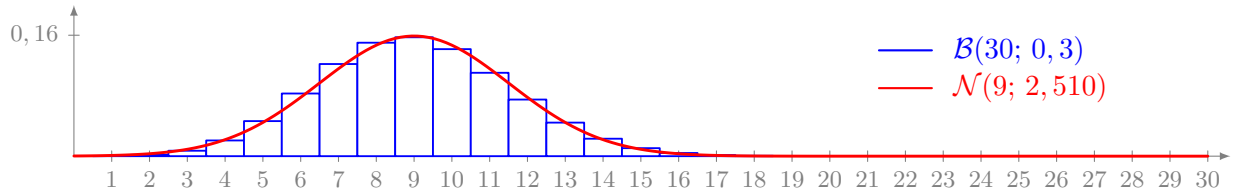
Etude n° 3 :
A chacune des 30 pièces, on peut associer une variable aléatoire Y_i et l'épreuve de Bernoulli suivante :



Comme les Y_i sont indépendants, la variable S suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p) = \mathcal{B}(30;\, 0,3)$:

- Son espérance est .....
- Sa variance est .....
- Son écart-type est .....

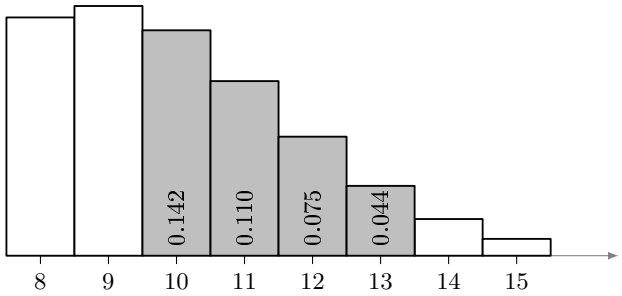
Or, S est une somme de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi : $S = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$.
Donc, d'après le théorème de la limite centrale, S peut être approchée par la loi normale .....



Calculons $P(10 \leqslant S \leqslant 13)$

- **Avec la loi binomiale $\mathcal{B}(30;\, 0,3)$:**

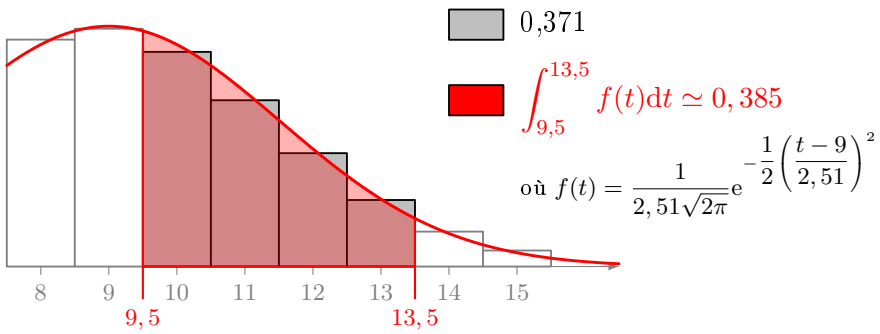
k	10	11	12	13
$P(S = k)$	0,142	0,110	0,075	0,044



$P(10 \leqslant S \leqslant 13) = 0,142 + 0,11 + 0,075 + 0,044 = 0,371$

Les rectangles étant le largeur 1, $P(10 \leqslant S \leqslant 13)$ est l'aire grisée.

- **Avec l'approximation normale $\mathcal{N}(9;\, 2,510)$:**

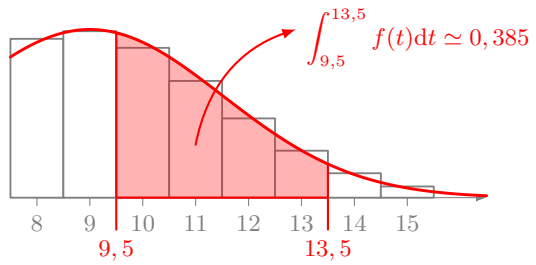


$P(10 \leqslant S \leqslant 13) \simeq 0,385$

Remarque : L'erreur d'approximation de la loi binomiale par la loi normale est

$$\left|0,385 - 0,371\right| = 0,014 = 1,4\%$$

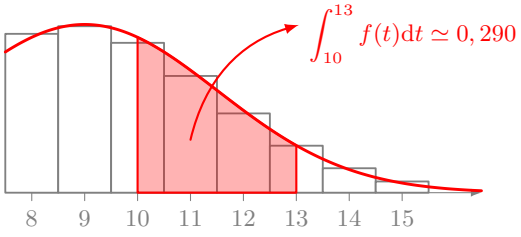
Avec correction de continuité :



L'erreur d'approximation est de :

$$\left|0,385 - 0,371\right| = 0,014 = 1,4\%.$$

Sans correction de continuité :



L'erreur d'approximation est de :

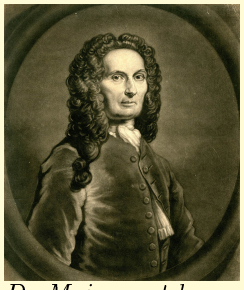
$$\left|0,290 - 0,371\right| = 0,81 = 8,1\%.$$

Correction de continuité

Si X suit une loi binomiale et U une loi normale de même espérance et de même écart-type (non nul), alors, on peut approcher :

- $P(X = k)$ par $P\left(k - \frac{1}{2} \leqslant U \leqslant k + \frac{1}{2}\right)$;
- $P(a \leqslant X)$ par $P\left(a - \frac{1}{2} \leqslant U\right)$;
- $P(a \leqslant X \leqslant b)$ par $P\left(a - \frac{1}{2} \leqslant U \leqslant b + \frac{1}{2}\right)$;
- $P(X \leqslant b)$ par $P\left(U \leqslant b + \frac{1}{2}\right)$.

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale



En pratique, on pourra faire l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale de même espérance et de même écart-type, lorsque l'on aura les conditions suivantes sont satisfaites :

$$n \geqslant 30 \text{ , } np \geqslant 5 \text{ , et } nq \geqslant 5$$

De Moivre est le premier, en 1733, à faire apparaître la loi normale comme loi limite d'une loi binomiale.

Remarque : dans notre étude, les conditions sont satisfaites :

$$n = 30 \geqslant 30,\ np = 30 \times 0,3 = 9 \geqslant 5 \text{ et } nq = 30 \times 0,7 = 21 \geqslant 5$$

Mais que signifie $np = 9$? np est l'espérance de S. Donc, si on répète 30 fois l'expérience aléatoire de l'étude n° 2, ou si on prend un échantillons de 30 expériences aléatoires de l'étude n° 2, alors en moyenne $np = 9$ pièces seront trop chaudes, et $nq = 21$ ne le seront pas.

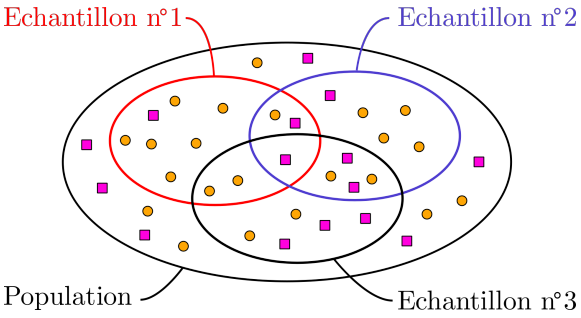
II. Intervalles de confiances pour une proportion.

Objectif : Nous cherchons des informations sur une population à partir de l'étude d'un échantillon. Ce type de situation se rencontre fréquemment dans l'industrie. Il n'est pas possible en général d'étudier la population entière, car cela pourrait prendre trop de temps, reviendrait trop cher, ou serait aberrant dans le cas de contrôle de qualité entraînant la destruction des pièces.

Les statistiques descriptives donnent une réponse ponctuelle à cet objectif. On calcule, par exemple, la moyenne sur l'échantillon, et on estime qu'il est à peu près le même sur la population.

Les statistiques inférentielles offrent une réponse plus rigoureuse avec un contrôle sur l'erreur.

Etude n° 4 :



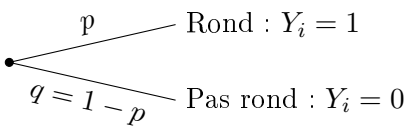
	Ronds	Carrés	Total	Proportion de ronds
Echantillon n° 1	9	3	12	0,75
Echantillon n° 2	7			
Echantillon n° 3				
Population				

On constate qu'aucun des échantillons ne donne la proportion exacte de ronds. En particulier, l'échantillon n° 1 n'est pas ..... de la population.

1. Modélisation de la situation

On suppose que les échantillons aient tous ..... nombre $n = 50$ d'individus et que les conditions soient réunies pour utiliser le théorème de la limite centrale, en particulier $n \geqslant \ldots$
Notre objectif est d'estimer la proportion p de la population.

Dans un échantillon de n individus, chacun d'eux se comporte comme l'épreuve de Bernoulli suivante :



☞ $E(Y_i) = p$

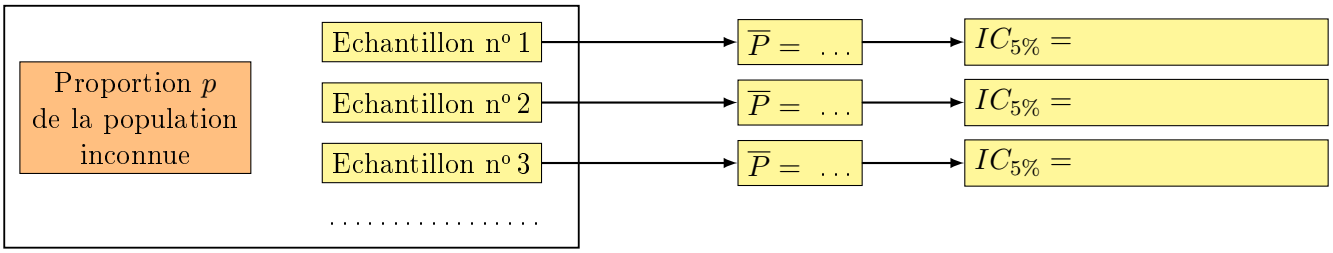
☞ $V(Y_i) = pq$

Le nombre d'individus ronds dans un échantillon est la variable aléatoire $S =$ ..... S suit une loi ...

La proportion d'individus ronds dans un échantillon est la variable aléatoire $\overline{P} = \dfrac{S}{n} = \ldots$

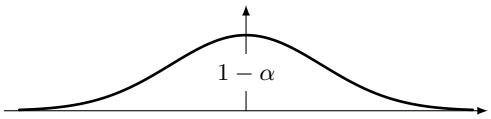
☞ $E(\overline{P}) = \dfrac{1}{n}E(S) = \dfrac{np}{n} = p$ ☞ $V(\overline{P}) = \dfrac{1}{n^2}V(S) = \dfrac{npq}{n^2} = \dfrac{pq}{n}$

Ainsi, d'après le théorème de la limite centrale, $\overline{P}$ suit approximativement une loi $\mathcal{N}\left(p; \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)$



La variable aléatoire $Z = \dfrac{\overline{P} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0; 1)$. Pour un α donné, il existe un $z_{\frac{\alpha}{2}}$ tel que :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{P}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \geqslant 1-\alpha$$
$$P\left(\overline{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \leqslant p \leqslant \overline{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \geqslant 1-\alpha$$



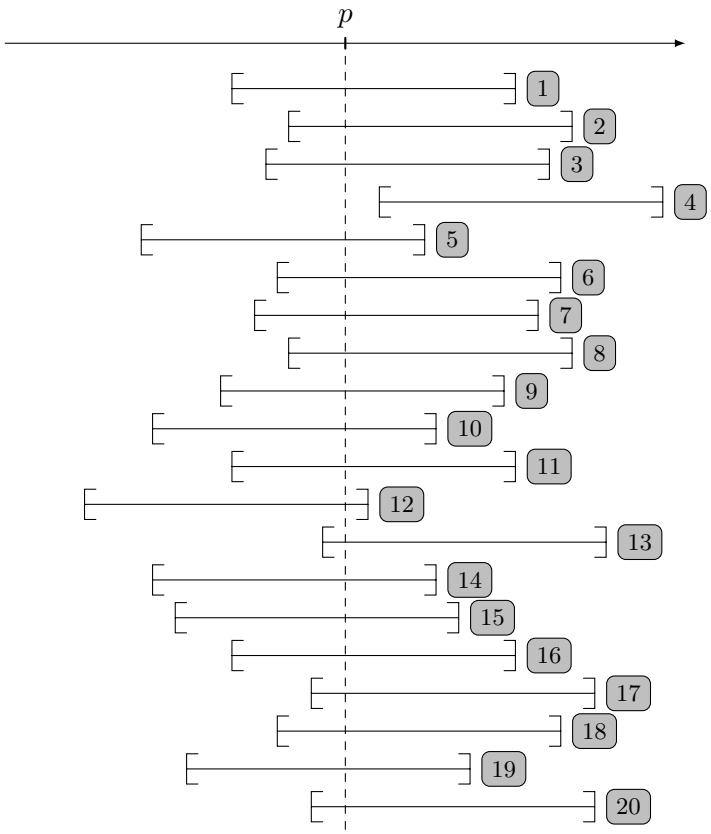
Prenons $\alpha = 5\%$, on sait que $z_{\frac{\alpha}{2}} = \ldots$ et on calcule $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} =$ .....

$$IC_{5\%} = \left[\overline{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\ ,\ \overline{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right] \simeq \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$IC_{5\%}$ est un ..... . Ce n'est plus une estimation ponctuelle, mais par intervalle.

- Si $\overline{P} = 0,75$ alors $IC_{5\%} =$ .....
  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59$ .....
  L'échantillon n° 1 n'est pas ..... de la population.
- Si $\overline{P} = 0,58$ alors $IC_{5\%} =$ .....
  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59$ .....
  L'échantillon n° 2 est ..... de la population.
- Si $\overline{P} = 0,50$ alors $IC_{5\%} =$ .....

On remarque que le p n'est pas dans l'intervalle de confiance du 1er échantillon, mais dans ceux des deux autres. Le premier intervalle n'était pas représentatif de la population. L'estimation est fausse pour cet échantillon. On avait $\alpha = 5\%$ de chance de choisir un échantillon dont l'intervalle de confiance ne contienne pas p, autrement dit, $1 - \alpha = 95\%$ de chances de choisir un échantillon dont l'intervalle de confiance contienne p. $1 - \alpha$ est le niveau de confiance.



$\alpha = 5\%$ d'erreur signifie qu'en moyenne sur 20 échantillons prélevés au hasard, un seul intervalle de confiance ne contient pas la proportion p.

Ici, sur 20 simulations d'échantillons, seule l'intervalle de confiance calculé à partir de l'échantillon n° ..... ne convient pas.

aux idées fausses sur une éventuelle localisation de p dans l'intervalle de confiance : la proportion p peut-être n'importe où dans l'intervalle.

Problème : Pour calculer les bornes des intervalles de confiances, on a utilisé p qu'on ne connait pas puisque qu'on cherche à l'estimer !

En pratique, on a un seul échantillon, donc une seule réalisation de la variable aléatoire $\overline{P}$. Cette réalisation, on la note avec un chapeau : $\hat{p}$ et on l'utilise à la place de p pour calculer les bornes de l'intervalle de confiance.

Dans notre étude, pour le deuxième échantillon on a observé $\hat{p} = \ldots$: $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

☞ .....

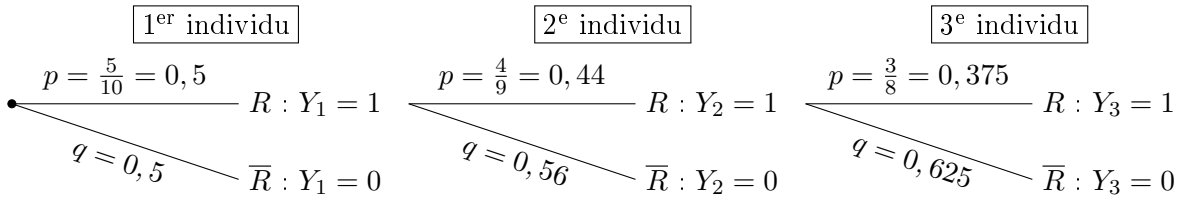
Questions : Supposons que la population soit constituée de $N = 21400$ individus (effectif total) et qu'on ait prélevé l'échantillon n° 2 pour faire notre étude statistique ($n = 50$).

1. Combien de ronds estime-t-on avoir dans la population avec un niveau de confiance de 95% ?
2. On reprend l'étude avec un niveau de confiance de 99%.
   (a) Détermine le nouvel intervalle de confiance ?
   (b) Combien de ronds estime-t-on avoir dans la population avec un niveau de confiance de 99% ?
   (c) Pourquoi l'intervalle $IC_{1\%}$ est-il plus grand ?

2. Indépendance et remise.

Nous avons supposé que lorsqu'on prélevait des individus pour former un échantillon, ils se comportaient de manière indépendante.

Etude n° 5 : Supposons que l'on prélève un échantillon de $n = 3$ individus dans une population de $N = 10$ individus : 5 ronds et 5 carrés.



Les variables de Bernoulli (Y_i) ne suivent pas la même loi car les Y_i ne sont pas indépendants. Pour qu'elles le soient, il faudrait constituer les échantillons en remettant les individus dans la population au fur et à mesure où on les interroge pour savoir s'ils sont ronds ou carrés. L'échantillon serait interrogé par un tirage avec ..... . On risquerait alors d'interroger plusieurs fois le même individu.

Propriété : Statistique de la variable aléatoire $\overline{P}$

Si l'échantillon est constitué

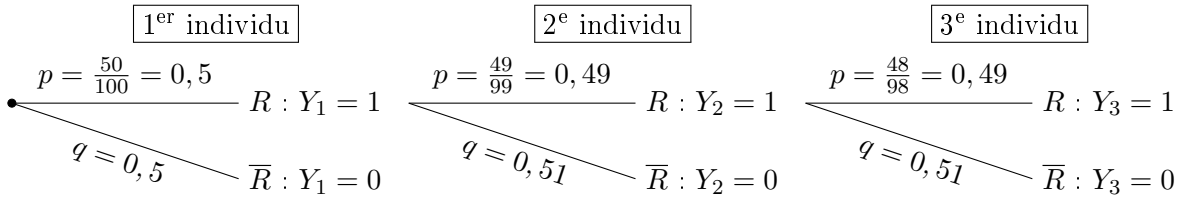
- Avec remise : $E(\overline{P}) = p$ et $V(\overline{P}) = \dfrac{pq}{n}$
- Sinon : $E(\overline{P}) = p$ et $V(\overline{P}) = \dfrac{pq}{n} \times \dfrac{N-n}{N-1}$

Ainsi, dans notre étude (sans remise) l'intervalle de confiance devient :

$$IC_{5\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\ ,\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\right]$$

On reconnaît l'écart-type d'une loi hypergéométrique... Lorsque le tirage est sans remise, la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ ne suit plus une loi $\mathcal{B}(n,p)$, mais une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n,N,p)$. Il s'en suit que la variable aléatoire $\overline{P} = \dfrac{S}{N}$ suit approximativement une loi $\mathcal{N}\left(p; \sqrt{\frac{pq}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\right)$, d'où le facteur $\frac{N-n}{N-1}$.

Etude n° 6 : Supposons que l'on prélève un échantillon de $n = 3$ individus dans une population de $N = 100$ individus : 50 ronds et 50 carrés.



Les variables de Bernoulli (Y_i) suivent pratiquement la même loi. On peut considérer qu'ils sont indépendants. Autrement dit, quand la taille n de l'échantillon est petite devant celle de la population, qu'il y ait remise ou pas, ça ne change pratiquement pas la situation.

En pratique, on considère qu'un échantillon sans remise se comporte comme un échantillon avec remise lorsque la population est 20 fois plus grande que l'échantillon : $N \geqslant 20n$

3. Intervalles de confiances d'une proportion.

Notations :

Population :

p : proportion à .....

N : effectif total

Echantillon :

$\hat{p}$: proportion ..... sur l'échantillon

n : effectif de l'échantillon

$IC_{\alpha\%} =$ .....

$P(p \notin IC_\alpha) = \ldots$

Théorème : intervalle de confiance d'une proportion.

Si $n \geqslant 30$, $n\hat{p} \geqslant 5$ et $n(1-\hat{p}) \geqslant 5$, alors l'intervalle de confiance au risque de α est :

- $IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\ ,\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\right]$

  si échantillonnage sans remise ..... N relativement petit par rapport à n : $N < 20n$;

- $IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ ,\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$

  si échantillonnage avec remise ;

  .....

  si échantillonnage sans remise ..... N relativement grand par rapport à n : $N \geqslant 20n$.

La probabilité que p soit dans cet intervalle est $1-\alpha$ (niveau de confiance).

Exercice n° 1: Dans une boîte contenant 500 vis, parmi 42 tirées au hasard, 17 sont à têtes plates.

1. Les conditions d'application du théorème sont-elles vérifiées ?
2. Sachant que les vis ont été tirées avec remise, estimez le nombre de vis à têtes plates dans cette boîte avec un risque $\alpha = 1\%$.
3. Sachant que les vis ont été tirées sans remise, estimez le nombre de vis à têtes plates dans cette boîte avec un risque $\alpha = 1\%$.

Remarque : Comme $0 < \frac{N-n}{N-1} < 1$, l'intervalle de confiance d'un tirage sans remise a une amplitude plus petite (il est plus précis) que celui d'un tirage avec remise. C'est normal, puisque lorsque le tirage est sans remise, on ne risque pas d'interroger deux fois le même individu. On gagne donc en information, donc en précision.

III. Intervalles de confiances pour une moyenne.

Notations :

Population :

μ : moyenne à .....

N : .....

σ : .....

Echantillon :

$\overline{x}$: la moyenne observée sur l'échantillon

S^2 : la variance observée

S : l'écart-type observé

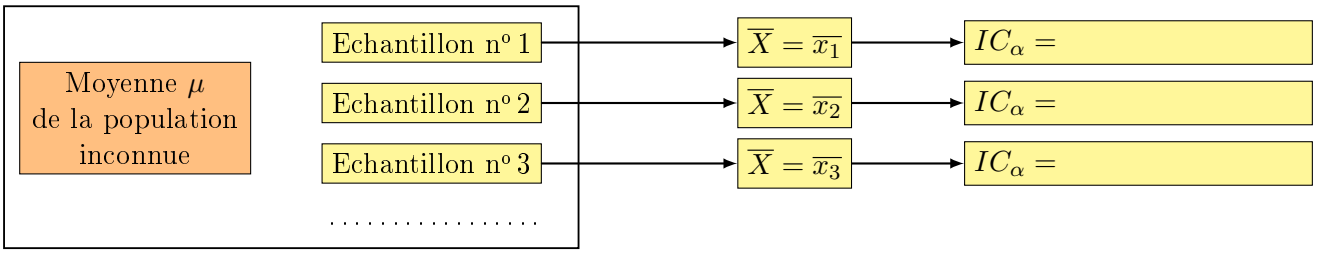
$IC_{\alpha\%} =$ .....

$P(\mu \in IC_\alpha) =$ .....

1. L'écart-type σ de la population est connu.

Etude n° 7 : Supposons que l'on cherche la taille moyenne d'une population d'effectif total N. On prélève un échantillon de n individus. Chaque individu de l'échantillon, numéroté de 1 à n donne sa taille x_i. Sur cet échantillon, on a une estimation ponctuelle de la moyenne des tailles : $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

D'un point de vue probabiliste, notons X_k la variable aléatoire qui à au k-ième individu d'un échantillon donne sa taille. $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ est la variable aléatoire qui à un échantillon associe sa moyenne :



Cas n° 1 : l'échantillon est **grand ($n \geqslant 30$)** et constitué avec **remise**.

On sait que $E(\overline{X}) = \mu$ et $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, donc, en utilisant le théorème de la limite centrale, on obtient :

$$\overline{X} \text{ suit approximativement une loi } \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Il s'en suit : $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$ soit $P\left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$

On obtient donc l'intervalle de confiance : $\boxed{IC_\alpha = \left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \ ; \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]}$

Cas n° 2 : l'échantillon est **grand ($n \geqslant 30$)** et constitué sans **remise**.

On démontre que $E(\overline{X}) = \mu$ et $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$, donc, en utilisant le théorème de la limite centrale, on obtient :

$$\overline{X} \text{ suit approximativement une loi } \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$$

Il s'en suit :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1-\alpha$$

On obtient donc l'intervalle de confiance : $\boxed{IC_\alpha = \left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\ ;\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]}$

Exemple n° 19 :

Cas n° 3 : l'échantillon est **petit ($n < 30$)** et X suit une loi normale.

Si on sait que les valeurs sont ..... distribuées, autrement dit, X suit une loi normale, alors la somme de lois normales indépendantes étant une loi normale, $\overline{X}$ suit une loi normale et on retrouve :

$$\boxed{IC_\alpha = \left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}}\ ;\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}}\right] \text{ avec } \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ (avec remise) ou } \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \text{ (sans remise)}}$$

Cas n° 4 : l'échantillon est **petit ($n < 30$)** et X suit une loi quelconque.

On ne peut rien dire sur la loi de $\overline{X}$... Mais nous pouvons nous servir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\big(|X - E(X)| \geqslant a\big) \leqslant \frac{V(X)}{a^2} \text{ pour tout } a > 0$$

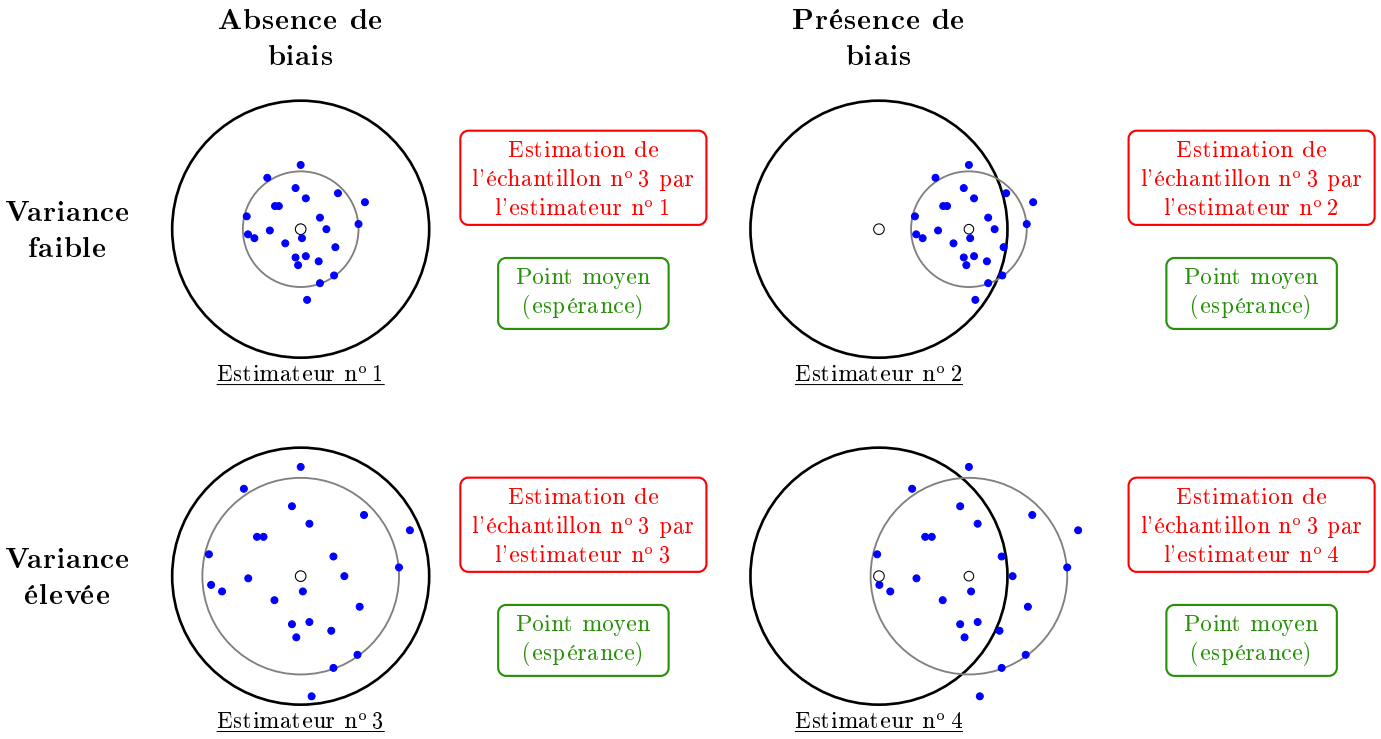
qui appliquée à $\overline{X}$ en prenant $a^2 = \dfrac{V(\overline{X})}{\alpha}$ donne $P\left(\overline{X} - \dfrac{\sigma_{\overline{X}}}{\sqrt{\alpha}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + \dfrac{\sigma_{\overline{X}}}{\sqrt{\alpha}}\right) \geqslant \alpha$

et permet de construire l'intervalle de confiance :

$$\boxed{IC_\alpha = \left[\overline{x} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sigma_{\overline{X}}\ ;\ \overline{x} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sigma_{\overline{X}}\right] \text{ avec } \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ (avec remise) ou } \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \text{ (sans remise)}}$$

2. L'écart-type σ de la population est inconnu.

Les qualités d'un estimateur dépendent de la formule qu'on utilise pour le calculer et de la façon dont l'échantillon a été choisi. Dans ce cours, on supposera toujours que les échantillons sont bien constitués. Le schéma ci-dessous montre les valeurs prises par quatre estimateurs sur 25 échantillons différents. Chaque point correspond à la valeur prise par l'un des estimateurs sur un échantillon. Le point central, en rouge, étant la valeur qu'on cherche à estimer.



Chaque cercle gris est centré sur l'espérance de l'estimateur étudié et son rayon est son écart-type.

Définition:

On dit qu'un estimateur est :

- ..... si son espérance sur les échantillons n'est pas égale à la valeur qu'il doit estimer sur la population.
- ..... si sa variance sur les échantillons est plus petite que celle de tout autre estimateur.

$S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \overline{x}\right)^2$ est un bon estimateur de la variance de la population à partir de l'échantillon, mais il est biaisé : son espérance n'est pas la variance σ^2 de la population, mais $\frac{n-1}{n}\sigma^2$. Donc, on le « corrige » pour qu'il soit sans biais :

Définition:

Etant donné un échantillon (x_k) de taille n d'une population, on appelle ..... et **écart-type corrigé** les estimateurs : $S_c^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \overline{x}\right)^2$ et $S_c = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \overline{x}\right)^2}$.

Remarque : Comme $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \overline{x}\right)^2$, on passe de la variance à la variance corrigée par la formule :

$$\boxed{S_c^2 = \frac{n}{n-1}S^2}$$

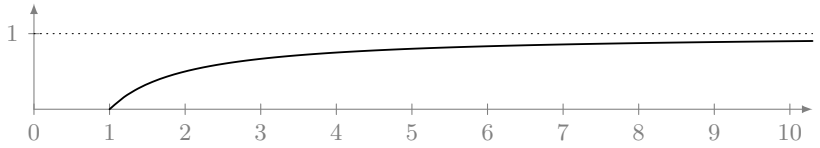
Théorème d'efficacité :

Les estimateurs $\overline{X}$ et S_c de la moyenne et de l'écart-type, sont ..... :

$$E(\overline{X}) = \mu \text{ et } E(S_c) = \sigma$$

et ..... : leur variance (leur dispersion autour de μ pour $\overline{X}$ et de σ pour S_c) sont plus petites que tout autre estimateur.

Remarque : L'espérance de S^2 (la variance non corrigée) est $\frac{n-1}{n}\sigma^2$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1$:



On constate que lorsque la taille n de l'échantillon croît, $\frac{n-1}{n}$ se rapproche de 1, et donc que $Var(S^2)$ se rapproche de σ^2, la variance de la population. C'est la raison pour laquelle, en pratique, à partir de $n \geqslant 30$, des statisticiens ne corrigent plus la variance observée sur l'échantillon (S^2) : $\frac{29}{30} \simeq 0,97$ (une erreur de 3%).

Dans ce cours, la variance sera systématiquement corrigée.

Reprenons l'étude du cas n° 1 :

Variable qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

Comme on ne connaît pas l'écart-type σ, on va le remplacer par l'estimateur corrigé de l'écart-type S_c :

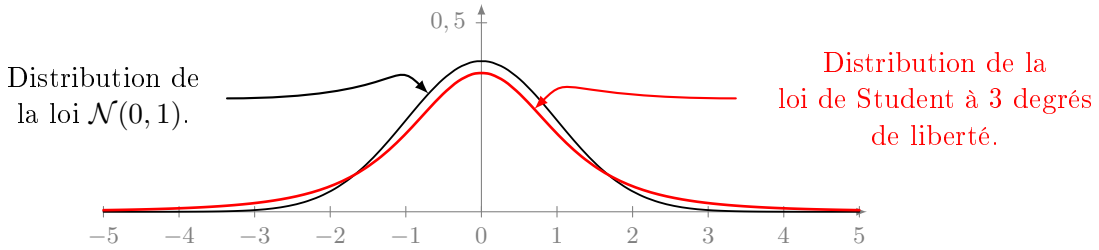
$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S_c}{\sqrt{n}}} \leqslant t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

Variable qui suit la loi de Student à ..... degrés de liberté.

Donc, on va retrouver les mêmes intervalles de confiances que précédemment, sauf que σ sera remplacé par ... et $z_{\frac{\alpha}{2}}$ par ... issu de la table de Student.

Mais, comme dès que $n \geqslant 30$, la distribution de Student à $n-1$ degrés de liberté se comporte pratiquement comme une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On utilisera la loi de Student seulement pour les petits effectifs.

D'ailleurs, la loi de Student est souvent surnommée la « ..... ».



La loi de Student $\mathcal{T}(3)$ est plus légèrement plus aplatie que la loi normale,
son écart-type est donc plus grand ($\sqrt{3} \simeq 1,7$), ce qui traduit la perte d'une information,
celle de l'écart-type σ de la population, remplacé par son estimation S_c.

3. Synthèse.

Conditions	**Intervalle de confiance d'une proportion.**
Grand échantillon : $n \geqslant 30$ $n\hat{p} \geqslant 5$ $n(1-\hat{p}) \geqslant 5$	si échantillonnage **sans remise** et N relativement petit par rapport à n ($N < 20n$) : ☞ $IC_\alpha = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\ ,\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\right]$ si échantillonnage **avec remise** ou N relativement grand par rapport à n ($N \geqslant 20n$) : ☞ $IC_\alpha = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ ,\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$

a. L'écart-type σ de la population est connu.

Conditions	**Intervalle de confiance d'une moyenne** où **l'écart-type σ** de la population est **connu**.
Grand échantillon : $n \geqslant 30$	si échantillonnage **sans remise** et N relativement petit par rapport à n ($N < 20n$) : ☞ $IC_\alpha = \left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\ ;\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]$ si échantillonnage **avec remise** ou N relativement grand par rapport à n ($N \geqslant 20n$) : ☞ $IC_\alpha = \left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

Conditions	**Intervalle de confiance d'une moyenne sur un petit échantillon** où **l'écart-type σ** de la population est **connu** et $\boldsymbol{X}$ suit une **loi normale**.
Petit échantillon : $n < 30$	si échantillonnage **sans remise** et N relativement petit par rapport à n ($N < 20n$) : ☞ $IC_\alpha = \left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\ ;\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]$ si échantillonnage **avec remise** ou N relativement grand par rapport à n ($N \geqslant 20n$) : ☞ $IC_\alpha = \left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

Conditions	**Intervalle de confiance d'une moyenne sur un petit échantillon** où **l'écart-type σ** de la population est **connu** et $\boldsymbol{X}$ suit une **loi inconnue**.
Petit échantillon : $n < 30$	si échantillonnage **sans remise** et N relativement petit par rapport à n ($N < 20n$) : ☞ $IC_\alpha = \left[\overline{x} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\ ;\ \overline{x} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]$ si échantillonnage **avec remise** ou N relativement grand par rapport à n ($N \geqslant 20n$) : ☞ $IC_\alpha = \left[\overline{x} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{x} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

b. L'écart-type σ de la population est inconnu : $S_c^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \overline{x}\right)^2$ et $S_c^2 = \dfrac{n}{n-1}S^2$

Conditions	**Intervalle de confiance d'une moyenne sur un grand échantillon** où **l'écart-type σ** de la population est **inconnu**.
Grand échantillon : $n \geqslant 30$	si échantillonnage **sans remise** et N relativement petit par rapport à n $(N < 20n)$: ☞ $IC_\alpha = \left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{S_c}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}\ ;\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{S_c}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}\right]$ si échantillonnage **avec remise** ou N relativement grand par rapport à n $(N \geqslant 20n)$: ☞ $IC_\alpha = \left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{S_c}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{S_c}{\sqrt{n}}\right]$

Conditions	**Intervalle de confiance d'une moyenne sur un petit échantillon** où **l'écart-type σ** de la population est **inconnu** et $\boldsymbol{X}$ suit une **loi normale**.
Petit échantillon : $n < 30$	si échantillonnage **sans remise** et N relativement petit par rapport à n $(N < 20n)$: ☞ $IC_\alpha = \left[\overline{x} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\dfrac{S_c}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}\ ;\ \overline{x} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\dfrac{S_c}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}\right]$ si échantillonnage **avec remise** ou N relativement grand par rapport à n $(N \geqslant 20n)$: ☞ $IC_\alpha = \left[\overline{x} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\dfrac{S_c}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{x} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\dfrac{S_c}{\sqrt{n}}\right]$

Conditions	**Intervalle de confiance d'une moyenne sur un petit échantillon** où **l'écart-type σ** de la population est **inconnu** et $\boldsymbol{X}$ suit une **loi inconnue**.
Petit échantillon : $n < 30$	si échantillonnage **sans remise** et N relativement petit par rapport à n $(N < 20n)$: ☞ $IC_\alpha = \left[\overline{x} - \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\dfrac{S_c}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}\ ;\ \overline{x} + \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\dfrac{S_c}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}\right]$ si échantillonnage **avec remise** ou N relativement grand par rapport à n $(N \geqslant 20n)$: ☞ $IC_\alpha = \left[\overline{x} - \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\dfrac{S_c}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{x} + \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\dfrac{S_c}{\sqrt{n}}\right]$

Exemple n° 20 : Le poids d'une variété de laitues est normalement distribué. Un laboratoire de recherche teste un nouvel engrais sur un plan de 600 laitues. Le poids moyen d'un échantillon sans remise de laitues est de 335g. Détermine un intervalle de confiance pour le poids moyen de cette variété de laitues cultivées dans ce nouvel engrais avec un niveau de confiance de 95%.

1. Sachant que l'écart-type est connu : $\sigma = 14,2$g, et que l'effectif de l'échantillon est $n = 40$

☞ L'échantillon est prélevé sans remise, mais $20n = 20 \times 40 = 800 \geqslant N = 600$, donc la population est relativement ..... par rapport à l'échantillon et donc, on ne peut pas considérer qu'il a été prélevé avec remise.

L'échantillon est ..... $n = 40 \geqslant 30$, l'écart-type σ de la population est ..... donc :

$$IC_{5\%} =$$

☞ L'écart-type est connu, donc on utilise la table de la loi de ..... avec $\alpha = 5\%$:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = \ .....$$

On obtient l'intervalle de confiance :

$IC_{5\%} =$

2. L'écart-type de la population n'étant pas connu, on a dû estimer la variance sur l'échantillon : 214g^2.
Il compte 22 laitues.

☞ **On corrige l'écart-type :** $S_c^2 = \dfrac{n}{n-1} S^2 =$ ..... donc $S_c =$ .....

☞ L'échantillon est prélevé sans remise, mais $20n = 20 \times 22 = 440 < N = 600$, donc la population est relativement ..... par rapport à l'échantillon et on peut considérer qu'il a été prélevé avec remise.

L'échantillon est ..... $n = 22 < 30$, l'écart-type de la population est ..... , et la distribution suit une loi de Student donc :

$IC_{5\%} =$

☞ L'écart-type est inconnu, donc on utilise la table de la loi de ..... avec ..... degrés de liberté, et ..... car cette table ne répartit pas l'erreur bilatéralement : .....
On obtient l'intervalle de confiance :

$IC_{5\%} =$

Chapitre 5 - Statistiques inférentielles : Test de validité d'hypothèses.

I. Variables d'échantillonnages

Nous parlerons de tests de comparaisons d'un paramètre à une norme ou une spécification :

Par exemple :

- Lorsqu'un fabricant déclare que la moyenne de durée de vie d'une bougie est de 8h. On testera cette information en la comparant à la moyenne $\overline{x}$ d'un échantillon.
- Lorsque la proportion de pièces défectueuses fabriquées par une machine ne doit pas dépasser 2%. On testera cette information en la comparant à la proportion $\hat{p}$ d'un échantillon.

Nous parlerons de tests de comparaisons entre deux paramètres de même nature, associés à deux populations.

Par exemple :

- En comparant, à l'aide de deux échantillons, la durée moyenne de séchage de deux peintures de marques différentes.
- En comparant, à l'aide de deux échantillons, la proportion de réussite au baccalauréat entre les filles et les garçons.

1. Etude du déroulement d'un test d'hypothèses de comparaison de moyenne.

Soit une population pour laquelle, théoriquement la moyenne μ de la variable X est égale à μ_0. On va tester l'exactitude de cette valeur théorique. Pour ce faire, on va la comparer à la moyenne m prise par X sur un échantillon.
Nous sommes donc en présence de deux hypothèses possibles :

- L'hypothèse nulle, hypothèse du statu quo, que nous noterons H_0 signifiant qu'il n'y a aucune différence, aucun changement, que « μ_0 est exacte ».
- L'hypothèse ..... , que nous noterons H_1, signifiant qu'un changement est survenu, qu'il y a une différence, que « μ_0 est inexacte ».

Paires d'hypothèses possibles relativement à une moyenne

Test	Test à droite :	Test à gauche :
$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_1 : \mu < \mu_0$

Exemple n° 21 : Un fabricant déclare que la moyenne de durée de vie de ses bougies est de 8h. Une association de consommateur se demande si cette durée est exacte. On suppose l'écart-type σ connu.

Soit X la durée de vie d'une bougie : $\begin{cases} H_0 : \mu = 8 \text{ (hypothèse nulle)} \\ H_1 : \mu \neq 8 \text{ (hypothèse alternative)} \end{cases}$

Pour confronter l'hypothèse nulle, $\mu = \mu_0$, on choisit au hasard un échantillon, de taille $n \geqslant 30$, on y calcule la moyenne $\overline{x}$ afin de la comparer à $\mu_0 = 8$.

Première ébauche d'une règle de décision :

- Si la moyenne observée $\overline{x}$ est « près » de la valeur $\mu_0 = 8$, alors on accepte l'hypothèse H_0.
- Si la moyenne observée $\overline{x}$ est « loin » de la valeur $\mu_0 = 8$, alors on rejette l'hypothèse H_0.

Mais, que signifient « $\overline{x}$ est près de $\mu_0 = 8$ » ou « $\overline{x}$ est loin de $\mu_0 = 8$ » ?

Plaçons nous dans le cas où l'hypothèse H_0 est vraie :

On a vu dans le chapitre précédent que $\overline{X}$ suit approximativement une loi $\mathcal{N}\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

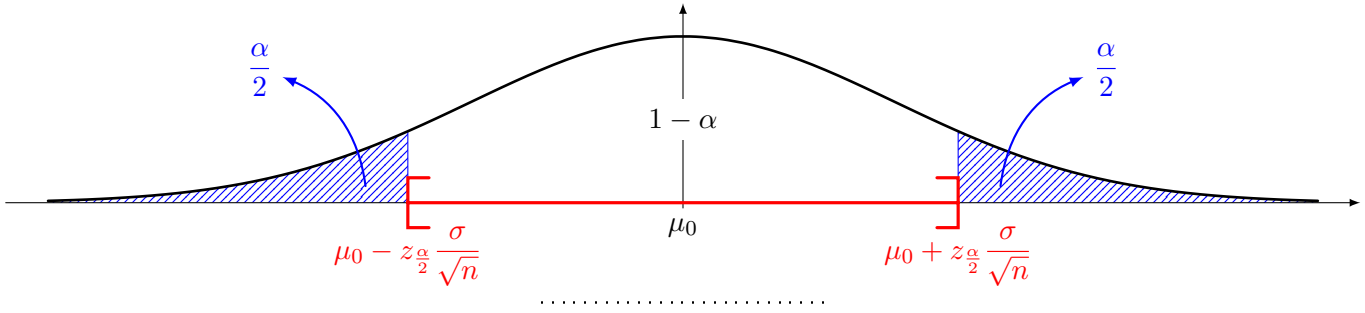
Pour un α donné, il existe un $z_{\frac{\alpha}{2}}$ tel que :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \text{ soit } P\left(\mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{X} \leqslant \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Autrement dit, pour un $\alpha \in]0, 1[$ donné, la probabilité que la moyenne $\overline{x}$ observée sur l'échantillon soit dans l'intervalle .....

$$\ldots = \left[\mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

est égale à $1 - \alpha$.



.....

IA n'est pas un intervalle de confiance. On a supposé que l'hypothèse H_0 était vraie. Donc que la moyenne dans la population était bien μ_0, dans notre exemple $\mu_0 = 8$. Lorsqu'on prend un échantillon, il est « plus ou moins représentatif » : la moyenne observée sur l'échantillon est « plus ou moins proche » de celle de la population. Cette variation, cette fluctuation de la moyenne observée autour de la moyenne μ_0 est appelée la fluctuation d'échantillonnage. L'intervalle d'acceptation IA est un intervalle de .....

.

Si on choisit, par exemple, $\alpha = 5\%$. On sait que 95% des moyennes observées dans les échantillons seront comprise dans l'intervalle IA= $[\mu_0 - \ldots , \mu_0 + \ldots]$. On peut donc émettre un jugement en décidant que, si dans notre échantillon, la moyenne observée $\overline{x}$ n'est pas dans IA, alors l'hypothèse H_0 est fausse. Autrement dit, que la moyenne dans la population n'est pas μ_0. Mais, il se peut que l'échantillon prélevé ne soit pas représentatif (5% de chance), et que l'hypothèse H_0 soit quand même vraie. Le choix de la valeur de α revient à décider de ce qui relève de la fluctuation d'échantillon ou pas. C'est un jugement de signification du test, et il est arbitraire.

Deuxième ébauche d'une règle de décision :

- Si $\overline{x} \in$ ..... , alors on accepte l'hypothèse H_0.
- Si $\overline{x} \notin$ ... , alors on rejette l'hypothèse H_0.

Définition:

α est appelé le .....

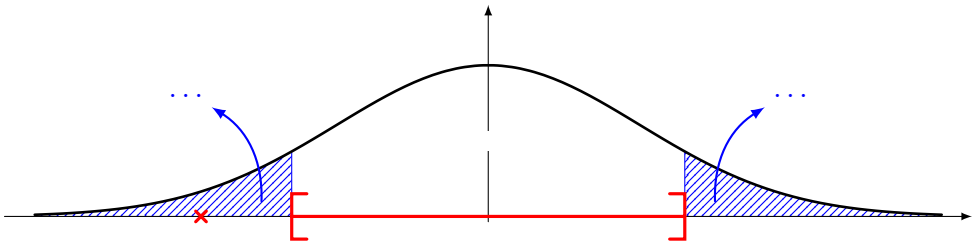
Dans notre exemple, le seuil de signification signifie que la moyenne observée $\overline{x}$ a moins de 5% de chances d'être obtenu par hasard.

Supposons, dans notre exemple, que $\sigma = 0,5$h, que l'échantillon soit de $n = 50$ bougies, et que la moyenne observée sur l'échantillon soit $\overline{x} = 7,68$h. On fixe $\alpha = 5\%$ soit $z_{\frac{\alpha}{2}} =$ ..... (table de l'écart réduit de la loi normale centrée réduite).

On a : $z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} =$ .....

$\left[\mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = [8 - \ldots \; ; \; 8 + \ldots] =$ .....

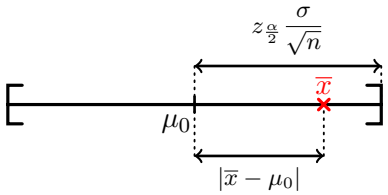
$\overline{x} = 7,68$ .....



Test .....

Formulons autrement cette règle de décision :

$$\overline{x} \in \left[\mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \iff$$



$$\iff \quad |\overline{x} - \mu_0| \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\iff \quad \frac{|\overline{x} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}$$

Règle de décision :

- Si $\dfrac{|\overline{x} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}$, alors on accepte l'hypothèse H_0.
- Si $\dfrac{|\overline{x} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{\frac{\alpha}{2}}$, alors on rejette l'hypothèse H_0.

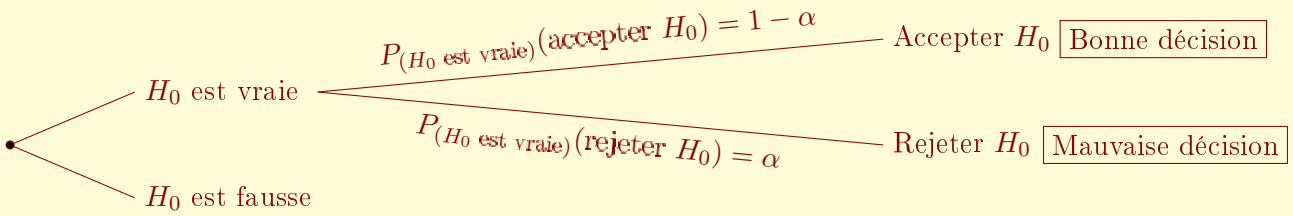
Reprenons notre exemple :

$$\frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Définition:

Lors d'un test, on commet une erreur de ..... lorsqu'on décide de rejeter l'hypothèse H_0 alors qu'elle est vraie. La probabilité de cette erreur est notée α :

$$\boldsymbol{\alpha = P_{(H_0 \text{ est vraie})}(\text{rejeter } H_0)}$$

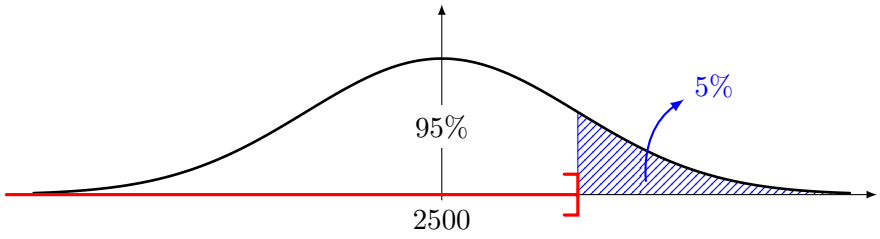


Exemple n° 22 : La durée de vie d'une certaine marque de lampe était de 2500h en 2015. Suite à des avancées technologiques, on pense que la durée de vie de la nouvelle génération de ces lampes a augmenté. On sait que la durée de vie de ces lampes suit une loi normale d'écart-type $\sigma = 30$h.

Soit X la durée de vie d'une lampe : $\begin{cases} H_0 : \ \mu = 2500 \text{ (hypothèse nulle)} \\ H_1 : \ \mu > 2500 \text{ (hypothèse alternative)} \end{cases}$

Pour confronter l'hypothèse nulle, $\mu = 2500$, on choisit au hasard un échantillon de 64 lampes, on y calcule la moyenne $\overline{x}$ de leurs durées de vie qui est égale à 2584 heures.

On va tester ces hypothèses avec un seuil de signification de 5%.



Test .....

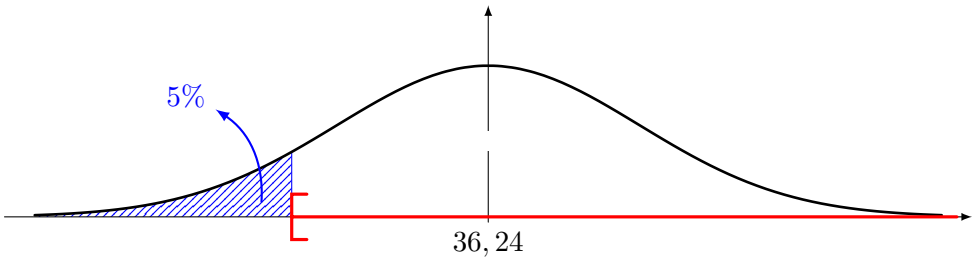
Dans la table de l'écart réduit de la loi normale centrée réduite, on va prendre $\alpha =$ ..... , on trouve $z_\alpha =$ ..... .

$$\frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Exemple n° 23 : La durée moyenne d'une opération par un robot de soudage était de 36,24 secondes. Après un réglage, sur un échantillon de 42 opérations, la durée moyenne est de 36,16 secondes. Sachant que le temps d'une opération suit une loi normale d'écart-type $\sigma = 0,15$ seconde.

Soit X la durée moyenne d'une opération : $\begin{cases} H_0 : \mu = 36,24 \text{ (hypothèse nulle)} \\ H_1 : \mu < 36,24 \text{ (hypothèse alternative)} \end{cases}$

On va tester ces hypothèses avec un seuil de signification de 5%.



Test .....

Dans la table de l'écart réduit de la loi normale centrée réduite, on va prendre $\alpha =$ ..... , on trouve $z_\alpha =$ ..... .

- Si on ne mettait pas de valeur absolue, le test unilatéral à gauche serait :

$$\frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \text{.....}$$

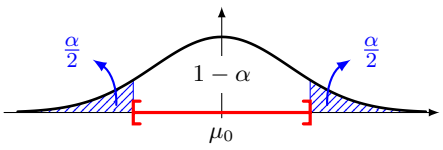
- Mais, le test utilise une valeur absolue, ce qui évite les erreurs de signes :

$$\frac{|\overline{x} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \text{.....}$$

II. Synthèse graphique

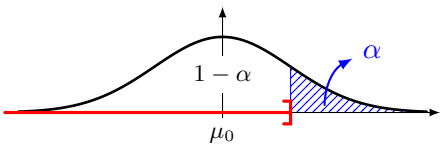
Test bilatéral :

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu \neq \mu_0$



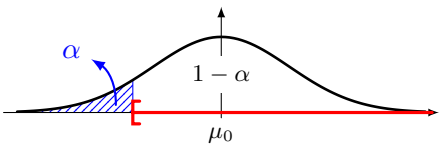
Test unilatéral à droite :

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu > \mu_0$



Test unilatéral à gauche :

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu < \mu_0$



Tests unilatéraux

- Pour les tests unilatéraux, on utilise la table de l'écart réduit de la loi normale centrée réduite en doublant la valeur de α car on met toute l'erreur du même côté.
- Pour le test unilatéral à gauche, on utilise le même protocole que le test unilatéral à droite.

Fixer le seuil de signification α c'est :

- déterminer ce qu'on est prêt à accepter comme probabilité de commettre l'erreur de 1$^{\text{er}}$ espèce ;
- déterminer les zones d'acceptation et de rejet de H_0.

III. Erreur de deuxième espèce et puissance d'un test.

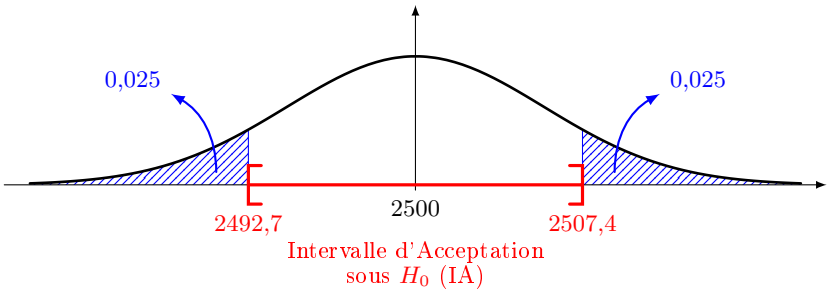
Reprenons notre échantillon de 64 lampes dont la durée théorique de vie suit une loi normale d'écart-type 30h. On se demande si la durée de vie moyenne d'un appareil est de 2500h au risque $\alpha = 5\%$?

Formulation des hypothèses : $\begin{cases} H_0 : \ \mu = 2500 \\ H_1 : \ \mu \neq 2500 \end{cases}$

La statistique du test est $T = \dfrac{|\overline{x} - 2500|}{\frac{30}{\sqrt{64}}}$ et la règle de décision est $\begin{cases} H_0 \text{ si } T \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}} \\ H_1 \text{ si } T > z_{\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$ où $z_{\frac{\alpha}{2}} \simeq 1,96$.

Or, on a vu que $T \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}} \iff \overline{x} \in \left[2492{,}7\,;\, 2507{,}4\right]$, donc cette règle de décision peut être reformulée ainsi :

$\begin{cases} H_0 \text{ si } \overline{x} \in \left[\mathbf{2492{,}7\,;\, 2507{,}4}\right] \\ H_1 \text{ si } \overline{x} \notin \left[2492{,}7\,;\, 2507{,}4\right] \end{cases}$



L'erreur de première espèce $\alpha = P_{H_0}\left(\overline{x} \in \text{IA}\right)$ mesure la probabilité que la moyenne observée sur l'échantillon $\overline{x}$ soit dans l'Intervalle d'Acceptation sachant $H_0(\mu = 2500)$. Pour ce faire, on a supposé que l'hypothèse H_0 est vraie, et on a fixé l'erreur de première espèce α.

Mais si l'hypothèse H_0 est fausse, peut-on faire le même calcul avec l'hypothèse H_1 ? C'est difficile car cette hypothèse $H_1(\mu \neq 2500)$ ne fixe pas la valeur de μ.

Définition:

Lors d'un test, on commet une erreur de ..... lorsqu'on décide d'accepter l'hypothèse H_0 alors qu'elle est fausse. La probabilité de cette erreur est notée .....

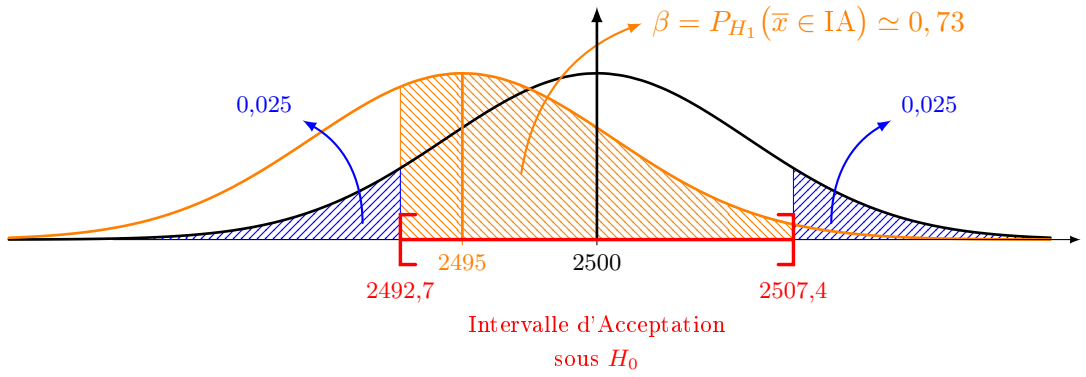
Ainsi on a :

	Hypothèse H_0 vraie	Hypothèse H_1 vraie
Hypothèse H_0 acceptée	Bonne décision $P_{H_0}\left(\overline{x} \in \text{IA}\right) = 1 - \alpha$	Mauvaise décision $P_{H_1}\left(\overline{x} \in \text{IA}\right) = \beta$
Hypothèse H_1 acceptée	Mauvaise décision $P_{H_0}\left(\overline{x} \notin \text{IA}\right) = \alpha$	Bonne décision $P_{H_1}\left(\overline{x} \notin \text{IA}\right) = 1 - \beta$

En fait, l'erreur de seconde β mesure l'importance de la fausseté de H_0. On ne peut pas la calculer directement puisque H_1 ne fixe pas μ, mais on peut l'étudier en fonction des valeurs potentiellement prises par μ :

Supposons que H_0 soit fausse et que nous connaissions μ :

- Si, par exemple, $\mu = 2495$, alors $H_1 : \mu = 2495$ et on a :



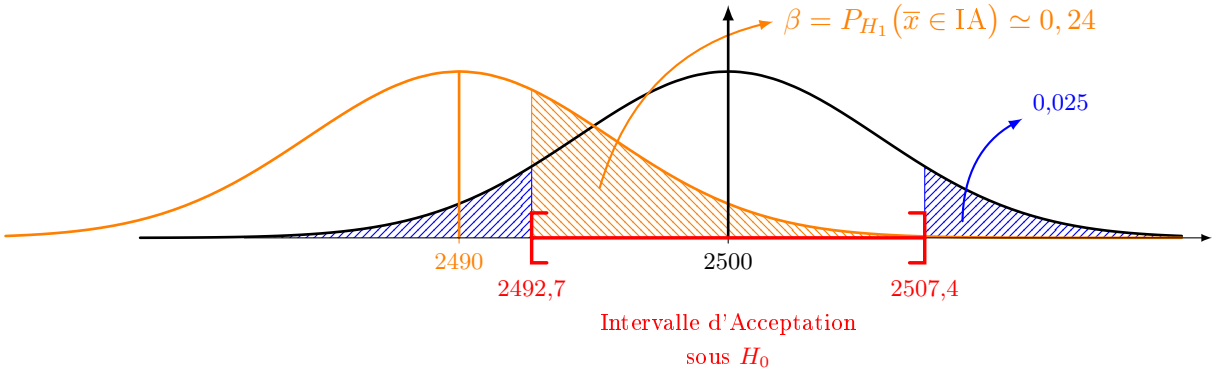
Il y a 73% de chance d'accepter H_0 c'est-à-dire d'affirmer que $\mu = 2500$, alors que $\mu = 2495$. Le test nous conduit à une mauvaise affirmation car 2495 est ..... de 2500. Donc, peut-on dire que « l'on accepte H_0 » ? En statistique, on préfère dire que l'on ..... , ce que l'on note .....

Quelle est la différence sémantique entre ces deux expressions ?

- « Ne pas rejeter H_0 » signifie qu'il se peut que $\mu = 2500$, ce qui n'est pas faux dans cet exemple.
- Alors que l'accepter signifie que $\mu = 2500$, ce qui est faux dans cet exemple puisque $\mu = 2495$.

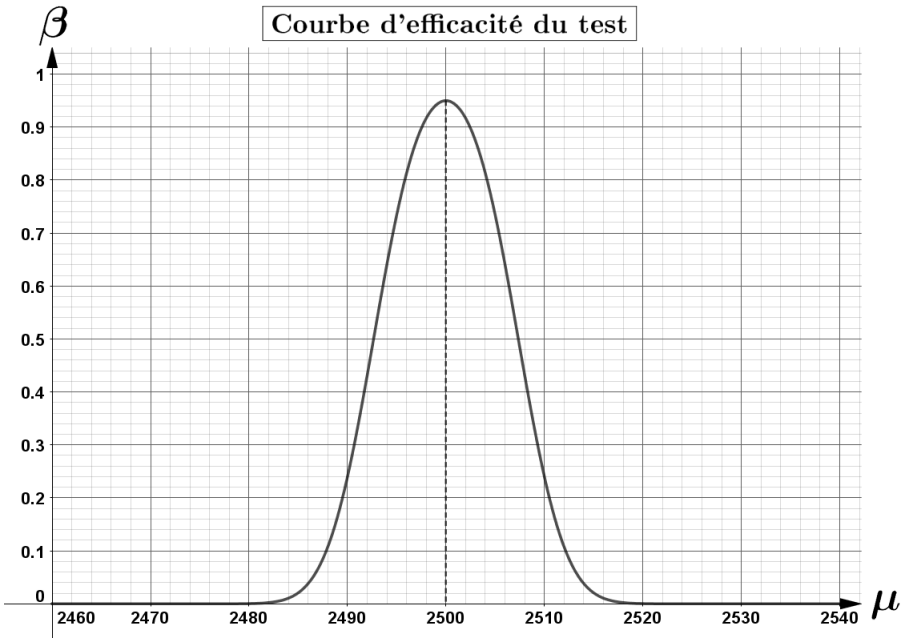
Et donc, dans le cas où $\overline{x} \notin$ IA, on préfère dire que l'on ..... , noté .....

- Si, par exemple, $\mu = 2490$, alors $H_1 : \mu = 2490$ et on a :

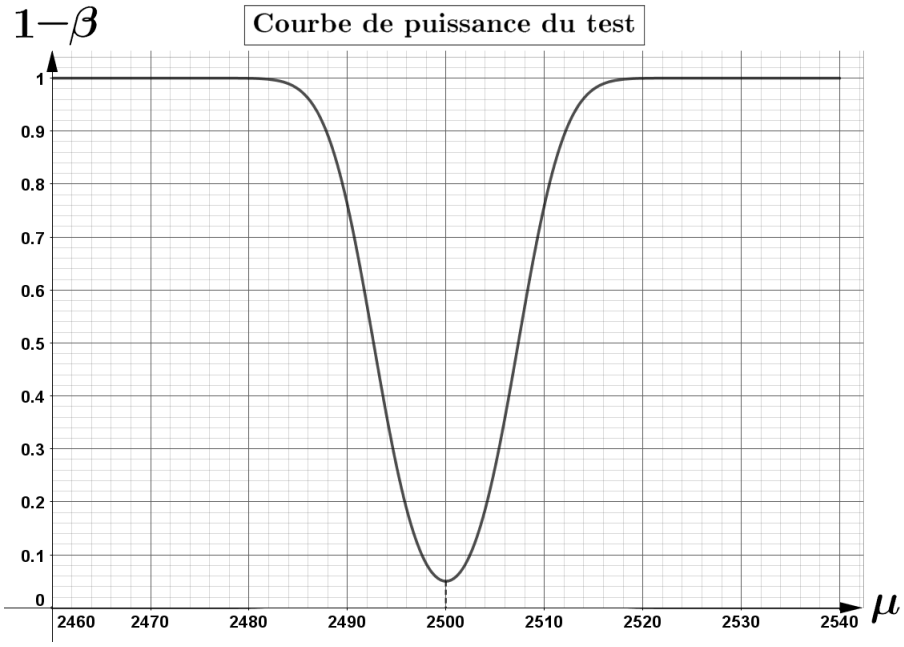


Il y a ..... de chance d'accepter H_0 c'est-à-dire d'affirmer que $\mu = 2500$, alors que $\mu = 2490$. L'erreur de seconde espère est plus faible car μ s'est éloignée de 2500 (de H_0).

Mais, nous ne connaissons toujours pas l'erreur de deuxième espèce β. On peut donc étudier β en fonction des valeurs possibles de μ, on obtient alors la courbe d' ..... du test (ce n'est pas une gaussienne) :



On peut donc étudier $P_{H_1}\left(\overline{x} \notin \text{IA}\right)$ en fonction des valeurs possibles de μ, on obtient alors la courbe de ..... du test :



En résumé, on a :

	Sous H_0	Sous H_1
$\overline{R}H_0$	Bonne décision Confiance du test	Erreur de seconde espèce β
RH_0	Erreur de première espèce α	Bonne décision Puissance du test

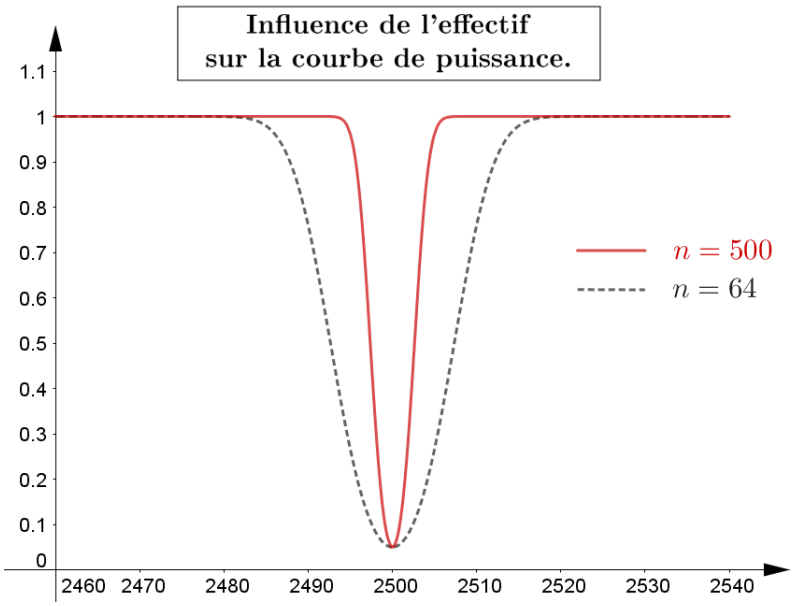


Illustration Geogebra : *PuissanceDunTest.ggb*

Remarques :

- L'augmentation de l'effectif permet de réduire l'erreur de seconde espèce.
- L'erreur de première espèce varie en sens ..... de l'erreur de seconde espèce. Donc, on ne peut pas minimiser simultanément l'erreur α et β.

  On privilégie donc α, autrement dit, le pouvoir de rejeter l'hypothèse H_0 lorsque les informations permettent de le faire.

IV. Tests d'hypothèses de comparaison de moyennes et de proportions

1. Test de comparaison d'une moyenne μ_0 d'une population à celle $\overline{x}$ de l'un de ses échantillons.

μ_0 est la valeur moyenne de la population.
On la compare à la moyenne $\overline{x}$ observée sur l'un de ses échantillons.
On cherche à vérifier l'exactitude de μ_0.

Hypothèses bilatérales : $\begin{cases} H_0 : \ \mu = \mu_0 \text{ (la moyenne de la population } \mu \text{ est égale à } \mu_0). \\ H_1 : \ \mu \neq \mu_0 \end{cases}$

X_i est la variable aléatoire qui au i^e individu d'un échantillon de taille n associe sa moyenne. $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est la variable aléatoire qui à un échantillon associe sa moyenne. On note $\sigma_{\overline{X}}$ son écart-type.

$S_c^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \overline{x}\right)^2$ est la variance corrigée observée sur l'échantillon prélevé et $S_c = \sqrt{S_c^2}$ est l'écart-type corrigé.

$\boldsymbol{\sigma_{\overline{X}}}$	L'écart-type $\boldsymbol{\sigma}$ de la population est connu	L'écart-type $\boldsymbol{\sigma}$ de la population est inconnu
si échantillonnage **sans remise** et N relativement petit par rapport à n ($N < 20n$) :	$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$	$\dfrac{S_c}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$
si échantillonnage **avec remise** ou N relativement grand par rapport à n ($N \geqslant 20n$) :	$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\dfrac{S_c}{\sqrt{n}}$

La variance et la variance corrigée sont reliées par la formule : $\boxed{S_c^2 = \dfrac{n}{n-1}S^2}$

Effectif	Conditions d'application	Quantité à calculer	Seuil de signification (test bilatéral)
Grand échantillon : $n \geqslant 30$	Aucune	$T = \dfrac{\lvert\overline{x} - \mu_0\rvert}{\sigma_{\overline{X}}}$	rejet de H_0 si $T > z_{\frac{\alpha}{2}}$
Petit échantillon : $n < 30$ et σ connu	$\boldsymbol{X}$ suit une **loi normale**	$T = \dfrac{\lvert\overline{x} - \mu_0\rvert}{\sigma_{\overline{X}}}$	rejet de H_0 si $T > z_{\frac{\alpha}{2}}$
Petit échantillon : $n < 30$ et σ inconnu	$\boldsymbol{X}$ suit une **loi normale**	$T = \dfrac{\lvert\overline{x} - \mu_0\rvert}{\sigma_{\overline{X}}}$	rejet de H_0 si $T > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$

Exemple n° 24 : Un employé responsable du contrôle de qualité doit tester avec un seuil de signification de 1%, la durée moyenne théorique de vie d'un condensateur au tantale qui serait de 4500 heures. La moyenne obtenue pour un échantillon de 17 condensateurs est de 4158 heures. Que décidera-t-il ?

1. Il sait que la durée de vie de ces condensateurs suit une loi normale d'écart-type 72 heures.

Il s'agit d'un test ..... de comparaison d'une moyenne théorique μ_0 à celle d'un échantillon de ..... $n = \ldots < 30$ où X suit une ....., et ..... :

1 **Formulation des hypothèses :** $\begin{cases} H_0 : \ldots\ldots\ldots \\ H_1 : \ldots\ldots\ldots \end{cases}$

2 **On corrige l'écart-type :** Non ! l'écart-type $\sigma = 72$ est connu, c'est une valeur théorique, elle n'est pas estimée.

3 **On calcule le test :** La durée moyenne étant théorique, on peut donc supposer que la population est grande par rapport à l'échantillon : ..... (pas de correction hypergéométrique), on a : $\sigma_{\overline{X}} =$ .....

$$T = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4 **Règle de décision :** L'écart-type est connu, donc on utilise la table de l'écart réduit de la loi ... :

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = \ldots\ldots\ldots$$

$T =$ ..... donc H_0 est .....

On peut supposer, au risque de 1er espèce de ...., que la durée moyenne théorique .....

2. Il sait que la durée de vie de ces condensateurs suit une loi normale, mais il ne connait pas son écart-type. Il estime l'écart-type sur l'échantillon : $S = 92$

Il s'agit d'un test ..... de comparaison d'une moyenne théorique μ_0 à celle d'un échantillon de ..... $n = \ldots < 30$ où X suit une ....., et .....

1 **Formulation des hypothèses :** $\begin{cases} H_0 : \ldots\ldots\ldots \\ H_1 : \ldots\ldots\ldots \end{cases}$

2 **On corrige l'écart-type :** $S_c^2 = \dfrac{n}{n-1} S^2$ donc $S_c =$ .....

3 **On calcule le test :**

La durée moyenne étant théorique, on peut supposer que la population est grande par rapport à l'échantillon : ....., on a : $\sigma_{\overline{X}} =$ .....

$$T = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4 **Règle de décision :**

L'écart-type étant inconnu, on utilise la table de la loi de .....

La table de Student ne répartissant pas l'erreur de façon bilatérale, on doit diviser l'erreur $\boldsymbol{\alpha = 1\%}$ par deux.

Ainsi, $t_{0{,}005;\,16} =$ ..... et

$T =$ ..... donc H_0 est .....

On peut supposer, au risque de 1er espèce de 1%, que la durée moyenne théorique .....

2. Test de comparaison d'une proportion p_0 sur une population à celle $\hat{p}$ observée sur l'un de ses échantillons.

p_0 est la proportion d'une modalité sur une population.
On la compare à la proportion $\hat{p}$ observée sur l'un de ses échantillons.

Hypothèses bilatérales :

H_0 : $p = p_0$ (la proportion p sur la population est égale à p_0).
H_1 : $p \neq p_0$

$\overline{P}$ est la variable aléatoire qui à un échantillon associe sa proportion, on note $\sigma_{\overline{P}}$ son écart-type.

	si échantillonnage **sans remise** et N relativement petit par rapport à n ($N < 20n$) :	si échantillonnage **avec remise** ou N relativement grand par rapport à n ($N \geqslant 20n$) :
$\boldsymbol{\sigma_{\overline{P}}}$	$\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \dfrac{N-n}{N-1}}$	$\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

Effectif	Conditions d'application	Quantité à calculer	Seuil de signification (test bilatéral)
Grand échantillon : $n \geqslant 30$	$n_1\hat{p} \geqslant 5$ et $n_1\hat{q} \geqslant 5$ où $\hat{q} = 1 - \hat{p}$	$T = \dfrac{\lvert\hat{p} - p_0\rvert}{\sigma_{\overline{P}}}$	rejet de H_0 si $T > z_{\frac{\alpha}{2}}$

3. Test de comparaison de deux proportions observées $\hat{p_1}$ et $\hat{p_2}$.

On veut comparer les proportions d'une modalité sur deux populations à partir des proportions observées $\hat{p_1}$ et $\hat{p_2}$ sur un échantillon de chacune d'entre elles, les deux échantillons étant indépendants.

Hypothèses bilatérales :

H_0 : $p_1 = p_2$ (les proportions sont les même sur les deux populations).
H_1 : $p_1 \neq p_2$

Première population :

L'échantillon prélevé sur cette population est de taille n_1. La proportion observée sur cet échantillon est $\hat{p_1}$, et on note $\hat{q_1} = 1 - \hat{p_1}$.

Deuxième population :

L'échantillon prélevé sur cette population est de taille n_2. La proportion observée sur cet échantillon est $\hat{p_2}$, et on note $\hat{q_2} = 1 - \hat{p_2}$.

On calcule proportion commune aux deux échantillons p_c, pondérée par leur taille :

$$p_c = \frac{n_1\hat{p_1} + n_2\hat{p_2}}{n_1 + n_2} \text{ et } q_c = 1 - p_c$$

Effectif	Conditions d'application	Quantité à calculer	Seuil de signification (test bilatéral)
Grands échantillons : $n_1 \geqslant 30$ et $n_2 \geqslant 30$	$n_1\hat{p_1} \geqslant 5$ et $n_1\hat{q_1} \geqslant 5$ $n_2\hat{p_2} \geqslant 5$ et $n_2\hat{q_2} \geqslant 5$	$T = \dfrac{\lvert\hat{p_1} - \hat{p_2}\rvert}{\sqrt{\dfrac{p_cq_c}{n_1} + \dfrac{p_cq_c}{n_2}}}$	Rejet de H_0 si $T > z_{\frac{\alpha}{2}}$

Exemple n° 25 : Le groupe d'hypermarchés Merlan se demande si le changement de direction de ses hypermarchés a amélioré la satisfaction de ses clients. Pour ce faire, il compare deux études de satisfactions, l'une faite avant l'arrivée de la nouvelle direction, et l'autre faite deux mois après.

	Avant	**Après**
Nombre de clients satisfaits	105	110
Nombre de clients interrogés	124	136

Les taux de satisfactions :

- avant le changement de direction : $\hat{p_1} =$ .....
- après le changement de direction : $\hat{p_1} =$ .....

Cette différence de pourcentages, peut-elle être considérer comme une simple fluctuation d'échantillon avec un niveau de confiance de 0,95 ?

Il s'agit d'un test bilatéral de comparaison de deux proportions observées :

1 **Formulation des hypothèses :** $H_0 : p_1 = p_2$ (les taux de satisfactions sont les même sur les deux périodes).
$H_1 : p_1 \neq p_2$

2 **Les conditions sont vérifiées :** .....
.....

3 **Calcul du test :**

- La proportion commune : $p_c = \dfrac{n_1\hat{p_1} + n_2\hat{p_2}}{n_1 + n_2} =$ .....
- $T = \dfrac{\lvert\hat{p_1} - \hat{p_2}\rvert}{\sqrt{\dfrac{p_cq_c}{n_1} + \dfrac{p_cq_c}{n_2}}} =$ .....

4 **Règle de décision :**

La table de l'écart réduit de la loi normale centrée réduite avec $\alpha = 5\%$ (test bilatéral) : .....

.....

4. Test de comparaison des moyennes observées $\overline{x_1}$ et $\overline{x_2}$.

On veut comparer les moyennes d'une même modalité sur deux populations à partir des moyennes observées $\overline{x_1}$ et $\overline{x_2}$ sur un échantillon de chacune d'entre elles, les deux échantillons étant indépendants.

Hypothèses bilatérales :
$H_0 :\ \mu_1 = \mu_2$ (les moyennes sont les même sur les deux populations).
$H_1 :\ \mu_1 \neq \mu_2$

Première population :

$\overline{X_1}$ est la variable aléatoire qui à un échantillon de la première population associe sa moyenne.
L'échantillon prélevé sur cette population est de taille n_1. La moyenne observée sur cet échantillon est $\overline{x_1}$.
σ_1 est son écart-type, s'il est connu. Sinon, on calculera S_{1c} son écart-type corrigé.

Deuxième population :

$\overline{X_2}$ est la variable aléatoire qui à un échantillon de la deuxième population associe sa moyenne.
L'échantillon prélevé sur cette population est de taille n_2. La moyenne observée sur cet échantillon est $\overline{x_2}$.
σ_2 est son écart-type, s'il est connu. Sinon, on calculera S_{2c} son écart-type corrigé.

Les tests reposent sur l'étude de la variable aléatoire $\overline{X_1} - \overline{X_2}$:

a. Les écart-types σ_1 et σ_2 sont connus.

Effectif	Conditions d'application	Quantité à calculer	Seuil de signification (test bilatéral)
Grands échantillons : $n_1 \geqslant 30$ et $n_2 \geqslant 30$	Aucune	$T = \dfrac{\lvert\overline{x_1} - \overline{x_2}\rvert}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	rejet de H_0 si $T > z_{\frac{\alpha}{2}}$
n_1 ou $n_2 < 30$	$\boldsymbol{X_1}$ et $\boldsymbol{X_2}$ suivent des **lois normales**		

b. Les écart-types σ_1 et σ_2 sont inconnus.

Effectif	Ecart-types	Conditions d'application	Quantité à calculer	Seuil de signification (test bilatéral)
Grands échantillons : $n_1 \geqslant 30$ et $n_2 \geqslant 30$	Aucune condition	Aucune	$T = \dfrac{\lvert\overline{x_1} - \overline{x_2}\rvert}{\sqrt{\dfrac{S_{1c}^2}{n_1} + \dfrac{S_{2c}^2}{n_2}}}$	Rejet de H_0 si $T > z_{\frac{\alpha}{2}}$
n_1 ou $n_2 < 30$	σ_1 et σ_2 sont inconnus mais égaux	$\boldsymbol{X_1}$ et $\boldsymbol{X_2}$ suivent des **lois normales**	$T = \dfrac{\lvert\overline{x_1} - \overline{x_2}\rvert}{S_p^{\star}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$	Rejet de H_0 si $T > t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$
$n_1 = n_2 < 30$	σ_1 et σ_2 sont inconnus mais** $\frac{1}{3} \leqslant \frac{S_{1c}^2}{S_{2c}^2} \leqslant 3$	$\boldsymbol{X_1}$ et $\boldsymbol{X_2}$ suivent des **lois normales**		
n_1 ou $n_2 < 30$ $n_1 \neq n_2$	σ_1 et σ_2 sont inconnus et inégaux	Aucune	$T = \dfrac{\lvert\overline{x_1} - \overline{x_2}\rvert}{\sqrt{\dfrac{S_{1c}^2}{n_1} + \dfrac{S_{2c}^2}{n_2}}}$	Rejet de H_0 si $T > t_{\frac{\alpha}{2}, k}$ où k est l'entier le plus proche de $\dfrac{\left(\dfrac{S_{1c}^2}{n_1} + \dfrac{S_{2c}^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{1}{n_1 - 1}\left(\dfrac{S_{1c}^2}{n_1}\right)^2 + \dfrac{1}{n_2 - 1}\left(\dfrac{S_{2c}^2}{n_2}\right)^2}$

$(^{\star})$ $S_p = \sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_{1c}^2 + (n_2 - 1)S_{2c}^2}{n_1 + n_2 - 2}}$ est la racine carrée de la moyenne pondérée par leur degré de liberté des variances

$(^{\star\star})$ $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{S_{1c}^2}{S_{2c}^2} \leqslant 3$ signifie que les variances estimées ne sont pas trop différentes (dans un rapport de 3).

Chapitre 6 - Statistiques inférentielles : Test d'ajustement.

Notations :

Etant donné un ensemble fini A, le nombre d'éléments de A est appelé le ..... de A et noté .....

Exemple n° 26 : $\#\left(\left\{ \heartsuit, \diamondsuit, \bullet \right\}\right) = \ldots.$ et $\#\left(\left\{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\right\}\right) = \ldots.$

I. Tests d'adéquation d'une distribution à une distribution théorique.

On va comparer une distribution statistique (des données) à des distributions théoriques.

1. Adéquation d'une distribution à une distribution équirépartie.

Lançons un dé 600 fois de suites, et notons les résultats obtenus :

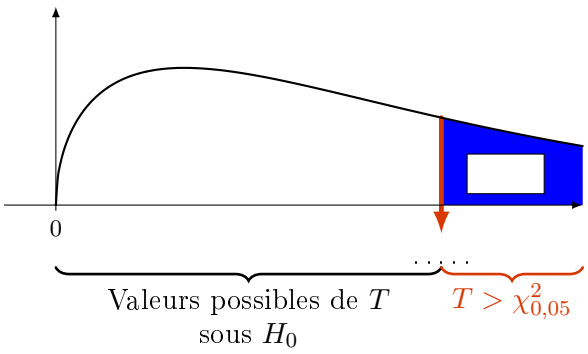
Numéro de la face	1	2	3	4	5	6	Total
Effectifs	90	108	109	93	102		
Effectifs théorique							

Le nombre de degrés de liberté est de ..... , car lorsqu'on connaît l'effectif de 5 faces, on connaît l'effectif de la ..... On souhaite tester l'hypothèse ... selon laquelle le dé n'est pas truqué, avec un risque $\alpha = 0,05$.

On calcule la variable aléatoire :

$$T = \frac{(90-100)^2}{100} + \frac{(108-100)^2}{100} + \frac{(109-100)^2}{100} + \frac{(93-100)^2}{100} + \frac{(102-100)^2}{100} + \frac{(\quad -100)^2}{100} = 3,02$$

Sous l'hypothèse H_0 : le dé est parfaitement équilibré, la variable aléatoire T suit une loi du χ^2 à 5 degrés de liberté. D'après la table du χ^2 : $\boldsymbol{\chi^2_{0,05\,;\,5}} \simeq$ .....



Comme .....

En résumé :

Nous observons des effectifs $O_1, O_2, \ldots O_n$ sur un échantillon.

1 On émet l'hypothèse (H_0) que ces données suivent une distribution particulière (normale, exponentielle, etc.).

2 En utilisant cette loi supposée, on calcule les effectifs attendus $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

Ces effectifs calculés, les C_i, ils doivent être supérieurs ou égaux à 5.

Si ces conditions ne sont pas satisfaites, on peut, si c'est possible, regrouper des observations jusqu'à ce que les effectifs calculés soient suffisamment grands.

3 A partir de ces données calculées (C_i) et observées (O_i) on calcule la quantité suivante :

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - C_i)^2}{C_i}$$

Si l'hypothèse (H_0) est vraie alors T suit une loi du χ^2 de degré de liberté :

$$\text{ddl} = \begin{pmatrix}\text{nb de } C_i \text{ utilisés}\\ \text{dans le calcul de } T\end{pmatrix} - 1 - \begin{pmatrix}\text{nb de paramètres}\\ \text{estimés pour}\\ \text{le calcul des } C_i\end{pmatrix}^*$$

4 La règle de décision est la suivante : $\left|\begin{array}{l} H_0 : T \leqslant \chi^2_{\alpha,\,\text{ddl}} \\ H_1 : T > \chi^2_{\alpha,\,\text{ddl}} \end{array}\right.$

(*) *Généralement la moyenne ou l'écart-type quand ils sont inconnus.*

2. Adéquation d'une distribution à une distribution normale.

Lors de l'étude sur le reboisement dans un secteur donné, 100 arbres sont choisis aléatoirement. A l'aide des donnés ci-contre, et sachant que le diamètre moyen des arbres de l'échantillon est de de 260,4mm et son écart-type corrigé de 30,88mm, peut-on penser avec un seuil fixé à 10% que le diamètre de ces arbres suit une loi normale ?

Diamètres des arbres (en mm)	Nombre d'arbres
[170 ; 190[	1
[190 ; 210[	6
[210 ; 230[	8
[230 ; 250[	16
[250 ; 270[	34
[270 ; 290[	22
[290 ; 310[	7
[310 ; 330[	4
[330 ; 350[	2
Total	100

1 **Formulation des hypothèses :**

$\left|\begin{array}{l} H_0 : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_1 : \text{Le diamètre des arbres ne suit pas cette loi.} \end{array}\right.$

2 **On calcule les Fréquences avec la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, puis les effectifs calculés :**

Diamètres des arbres (en mm)	Nombre d'arbres O_i	Fréquences calculées	Effectifs calculés C_i
[170 ; 190[	1	0,010	1,0
[190 ; 210[	6	0,040	4,0
[210 ; 230[	8	0,111	11,1
[230 ; 250[	16	0,206	20,6
[250 ; 270[	34	0,255	25,5
[270 ; 290[	22	0,209	20,9
[290 ; 310[	7	0,115	11,5
[310 ; 330[	4	0,042	4,2
[330 ; 350[	2	0,010	1,0
Total	100	1	100

Détails des calculs pour l'intervalle [250 ; 270[**:**

On note D la variable aléatoire « diamètre des arbres » qui suit une loi $\mathcal{N}(260,4;\ 30,88)$.

$P(250 \leqslant D < 270) = P(\ldots\ldots \leqslant Z \leqslant \ldots\ldots)$ où $Z \sim \mathcal{N}(0;\ 1)$

$= \ldots\ldots$

$= \ldots\ldots$

$= \ldots\ldots$

L'effectif calculé C_5 est donc $\ldots\ldots$

Les effectifs calculés doivent être supérieurs à 5, donc on regroupe les deux premières et les deux dernières classes :

Diamètres des arbres (en mm)	Nombre d'arbres O_i	Fréquences calculées	Effectifs calculés C_i
[170 ; 210[	7	0,050	5,0
[210 ; 230[	8	0,111	11,1
[230 ; 250[	16	0,206	20,6
[250 ; 270[	34	0,255	25,5
[270 ; 290[	22	0,209	20,9
[290 ; 310[	7	0,115	11,5
[310 ; 350[	6	0,052	5,2
Total	100	1	100

3 **On calcule T**

$$T = \frac{(7-5)^2}{5} + \frac{(8-11,1)^2}{11,1} + \frac{(16-20,6)^2}{20,6} + \frac{(34-25,5)^2}{25,5} + \frac{(22-20,9)^2}{20,9} + \frac{(7-11,5)^2}{11,5} + \frac{(6-5,2)^2}{5,2} \simeq 7,47$$

Le nombre de degrés de liberté est $\text{ddl} = \underbrace{\begin{pmatrix}\text{nb de } C_i \text{ utilisés}\\ \text{dans le calcul de } T\end{pmatrix}}_{\text{7: un par classe}} - 1 - \underbrace{\begin{pmatrix}\text{nb de paramètres}\\ \text{estimés pour}\\ \text{le calcul des } C_i\end{pmatrix}}_{\text{2: la moyenne et l'écart-type}}$

ddl = $\ldots\ldots$

4 **Règle de décision :**

$H_0 :\ T \leqslant \chi^2_{5\%,4}$ .....

$H_1 :\ T > \chi^2_{5\%,4}$ .....

II. Tests d'indépendance de deux critères.

Claude et Virginie se sont intéressés aux résultats scolaires de 120 étudiants et à leurs habitudes concernant le tabac. Les résultats obtenus sont réunis dans le tableaux suivant :

Usage du tabac	Résultats scolaires			Total
	Excellents	satisfaisants	Médiocres	
Fume Beaucoup	8	16	7	
Fume Modérément	9	20	8	
Ne Fume pas	6	34	12	
Total				

1 **Formulation des hypothèses :**

$H_0 :$ Les résultats scolaires et la consommation de tabac

$H_1 :$ Les résultats scolaires et la consommation de tabac

2 **On calcule les effectifs théoriques.** On rappelle que :

Les événements FB et RS sont indépendants $\iff P(FB \cap RS) = P(FB)P(RS)$

Usage du tabac	RE	RS	RM	Total
FB				31
FM				37
FP				52
Total	23	70	27	120

$$P(FB \cap RS) = P(FB)P(RS)$$

$$= \frac{31}{120} \times \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, $\#(FB \cap RS) \simeq 0,1507 \times 120 = \ldots$

$$\#(FB \cap RS) = \frac{\#(FB) \times \#(RS)}{\text{effectif total}}$$

Ainsi, $\#(FM \cap RM) = \dfrac{\ldots \times \ldots}{120} \simeq \ldots$

Usage théorique du tabac	RE	RS	RM
FB		18,1	
FM			
FP			

3 **On calcule T**

$$T = \frac{(8-5,9)^2}{5,9} + \frac{(16-\ \ldots\ )^2}{} + \ldots + \frac{(12-11,7)^2}{11,7} \simeq \ldots\ldots$$

Le nombre de degrés de liberté est ddl $= \underbrace{\begin{pmatrix}\text{nb de } C_i \text{ utilisés}\\ \text{dans le calcul de } T\end{pmatrix}}_{\text{9: un par } \cap} - 1 - \underbrace{\begin{pmatrix}\text{nb de paramètres}\\ \text{estimés pour}\\ \text{le calcul des } C_i\end{pmatrix}}_{\text{2+2: colonne et ligne des totaux}} = \ldots\ldots\ldots$

Ici, les paramètres estimés sont les probabilités d'évènements de chaque variable, ceux que nous retrouvons en ligne et en colonne. Ainsi, On a dû estimer la ligne des totaux c'est-à-dire les probabilités des évènements RE, RS, et RM. Mais celle de RM n'a pas dû être estimée puisque leur somme est égale à 1.

Une approche différente :

	RE	RS	RM
FB			
FM			
FP			

Sur chaque ligne, et chaque colonne, seules deux cases $\boxed{}$ sont libres. Une fois qu'elles ont été estimées, les autres probabilités en découlent, donc :

$$\text{ddl} = \big(\text{nb colonnes} - 1\big)\big(\text{nb lignes} - 1\big)$$

Propriété : Nombre de degrés de liberté

En considérant seulement les intersections, autrement dit, le tableau sans les intitulés ni les totaux, on a :

$$\text{ddl} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4 **Règle de décision :** Seuil de signification du test $\alpha = 10\%$.

$H_0 : T \leqslant \chi^2_{10\%,\,4}$ ……

$H_1 : T > \chi^2_{10\%,\,4}$ ……

III. Tests d'homogénéité.

Dans une population formée d'individus répartis en différentes catégories (hommes/femmes, classes d'ages, niveaux socio-économiques, etc...), on observe une variable (durée de vie, présence d'un risque, performances, etc.) et on se demande si ses variations selon les différentes catégories de la population sont simplement dues aux fluctuations d'échantillonnage ou si au contraire elles révèlent des comportements différents de la variable dans chacune de ces catégories.
Pour conclure, on va utiliser une test d'homogénéité, qui revient exactement à faire les mêmes calculs que dans un test d'indépendance.

Exemple n° 27 : Avant le dépôt d'un projet de loi sur la dépénalisation des drogues douces, un sondage est effectué auprès des membres de la majorité et des membres de l'opposition. Les résultats sont les suivants :

	Favorable	Opposé	Abstention
Majorité	90	110	25
Opposition	50	96	29

1 **Formulation des hypothèses :**

H_0 : ……

H_1 : ……

2 **On calcule les effectifs théoriques :** Pour calculer les effectifs théorique, on multiplie les totaux de la ligne et de la colonne correspondant à la case et en divisant par l'effectif total.

	Favorable	Opposé	Abstention	Total
Majorité	90	110	25	
Opposition	50	96	29	
Total				

3 **On calcule T**

$T =$ .....

Le nombre de degrés de liberté est ddl= .....

Remarque : $\text{ddl} = \underbrace{\begin{pmatrix}\text{nb de } C_i \text{ utilisés}\\ \text{dans le calcul de } T\end{pmatrix}}_{\text{... un par } \cap} - 1 - \underbrace{\begin{pmatrix}\text{nb de paramètres}\\ \text{estimés pour}\\ \text{le calcul des } C_i\end{pmatrix}}_{\text{..... : colonne et ligne des totaux}} =$ .....

4 **Règle de décision :** Seuil de signification du test $\alpha = 5\%$.

$H_0 : T \leqslant \chi^2_{5\%,2}$ .....

$H_1 : T > \chi^2_{5\%,2}$ .....

Chapitre 7 - Fiabilité des systèmes.

Dans la vie courante, la fiabilité est la capacité d'un appareil de fonctionner correctement dans le temps.

Ainsi, pour L'**A**ssociation **F**rançaise de **Nor**malisation (AFNOR) la ..... est « *la caractéristique d'un dispositif exprimée par la probabilité que ce dispositif accomplisse une fonction requise dans des conditions d'utilisation données et pour une période de temps déterminée.* »

Dans ce chapitre, nous nous limitons au cas où cette « période donnée » est située avant la première panne ou défaillance, soit après une réparation qui a permis de remettre le dispositif à neuf. Dans chacune de ces deux situations, nous allons étudier comment une telle probabilité peut être obtenue.

Une telle étude est maintenant devenue importante pour des raisons évidentes de qualité, mais essentiel dans les secteurs où se posent des problème de sécurité ou lorsque les réparations sont impossibles.

I. Premières notions de fiabilité.

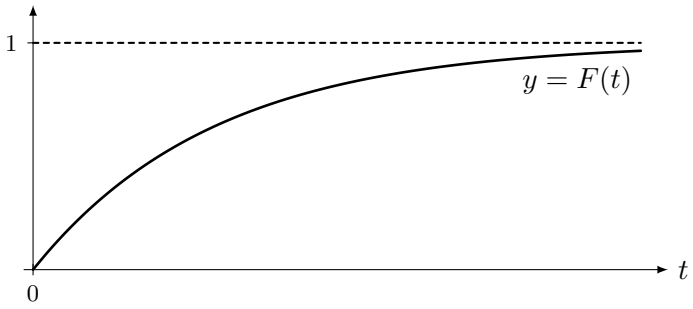
1. Définitions.

Dans tout ce chapitre,

- nous nous intéressons à un dispositif ..... dans une population constituée des dispositifs du même type. Dans le domaine industriel, ce peut être une partie d'une machine, une machine, un réseau de machines, etc.
- On désigne par T la variable aléatoire qui, à tout dispositif choisi au hasard, associe son temps de bon fonctionnement ou sa durée de vie avant une défaillance.

Définition:

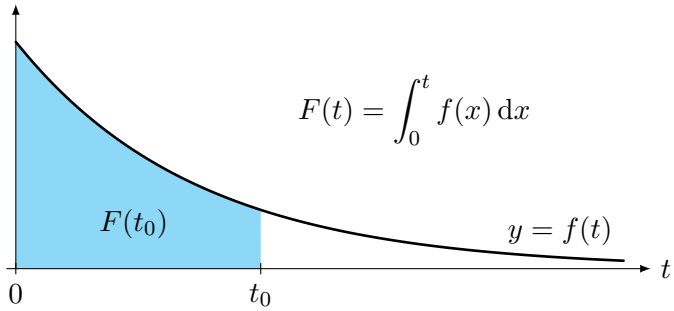
On appelle ..... la fonction F définie pour tout $t \geqslant 0$ par $F(t) = P(T \leqslant t)$.



☞ $F(t)$ est la probabilité qu'un dispositif prélevé au hasard dans la population ait une défaillance avant l'instant t.

☞ $t \geqslant 0$ car on prélève le dispositif à l'instant $t = 0$.

☞ Lorsque t tend vers $+\infty$, la probabilité d'avoir une défaillance devient certaine.



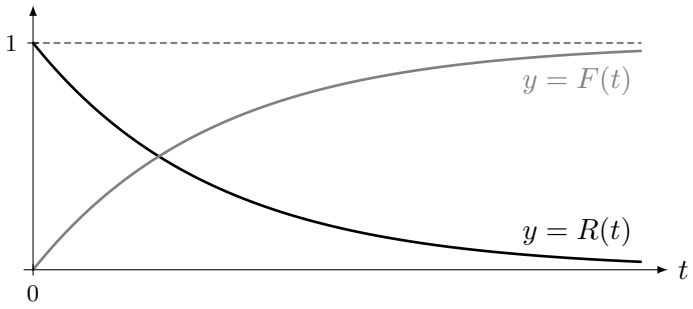
☞ F est une fonction répartition. Sa distribution (densité) est notée f : $F' = f$.

☞ $t \geqslant 0$ car on prélève le dispositif à l'instant $t = 0$.

On a alors : $P(T > t) = P\left(\overline{T \leqslant t}\right) = 1 - P(T \leqslant t) = 1 - F(t)$. Il s'en suit la définition suivante :

Définition:

On appelle ..... , la fonction R, définie pour tout $t \geqslant 0$ par $R(t) =$ .....



☞ $R(t)$ représente la probabilité qu'un dispositif choisi au hasard dans la population n'ait pas de défaillance avant l'instant t.

2. Estimation de $F(t)$ et de $R(t)$.

Dans la pratique, pour un dispositif donné, nous ne connaissons pas les valeurs exactes de $F(t)$ et de $R(t)$ pour une valeur donnée de t. Aussi sommes-nous amenés à ..... les $F(t)$ et $R(t)$ à partir de valeurs observées sur un échantillon.

Exemple n° 28 : On a mesuré pour 20 aspirateurs du même type le temps en heures écoulé avant la première panne :

Intervalle de temps en heures	$[0;500]$	$]500;1000]$	$]1000;1500]$	$]1500;2000]$	$]2000;2500]$	$]2500;3000]$	$]3000;4000]$
Nombre d'appareils	7	4	3	2	2	1	1

On souhaite estimer les valeurs de la fonction de défaillance F suivant les valeurs de t.
On note n_i le nombre de dispositifs défaillants à l'instant t_i et n l'effectif total de l'échantillon.

On peut utiliser 3 méthodes :

1. **Méthode des** .....

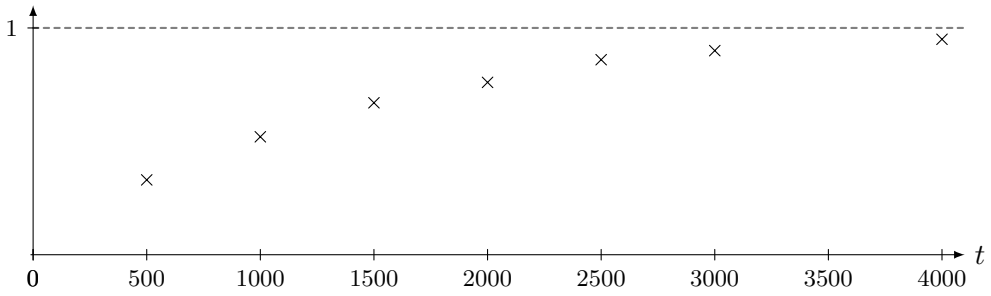
   On calcule les valeurs de F grâce à la formule $\boxed{F(t_i) = \dfrac{n_i}{n}}$

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$							
$R(t)$							

2. **Méthode des** .....

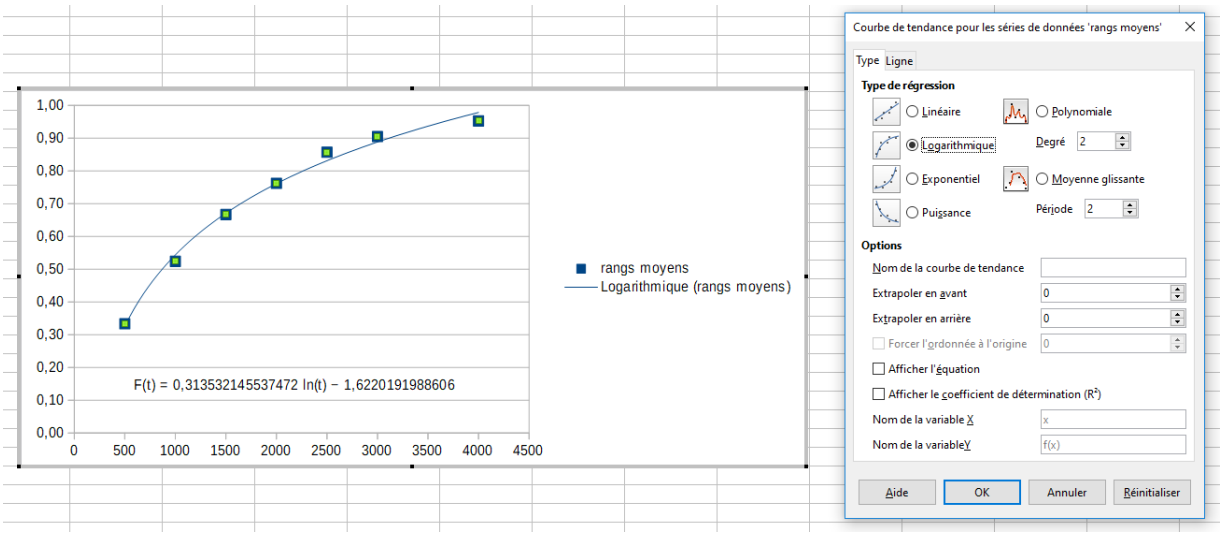
   Avec la méthode précédente, la probabilité qu'un dispositif n'ait pas eu de défaillance à l'instant $t = 4000$ est estimée à ..... : Aucun dispositif n'aurait une durée de vie supérieure à 4000 heures. Ce qui dans la réalité semble exagéré. En effet, si on considère un grand nombre de dispositifs, certains devraient survivre à 4000 heures. Pour remédier à ce problème, en particulier lorsque l'échantillon est petit, on peut prendre $\boxed{F(t_i) = \dfrac{n_i}{n+1}}$:

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$			0,67	0,76			



Pour déterminer les images la fonction de défaillance F :

- On peut relier « harmonieusement » les points à la main, et lire les valeurs prises par f graphiquement sur la courbe. On oublie pas de tracer l'asymptote $y = 1$.
- Utiliser un tableur, et lui demander d'« insérer une courbe de tendance » :



Le tableur de « LibreOffice » propose $F(t) \simeq 0,3135 \ln(t) - 1,622$.

- Reconnaître la fonction de répartition d'une loi de probabilité connue.

  Les points semble suivre la fonction de répartition d'une loi ..... dont l'expression de la fonction de répartition est : ..... avec $\lambda > 0$. On sait que $F(4000) =$ ..... donc :

  .....

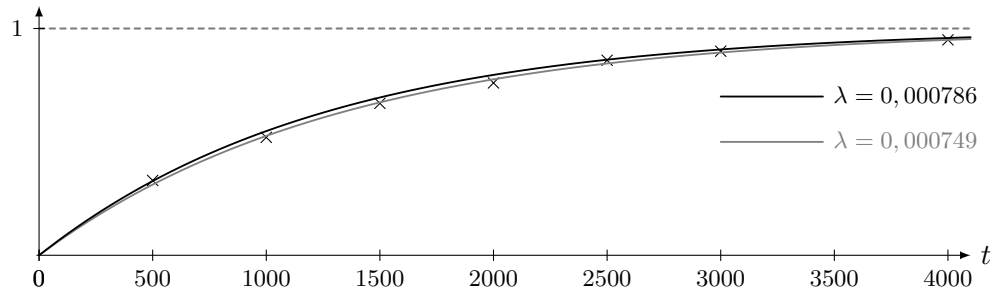
  .....

  .....

  Ainsi, la probabilité qu'un dispositif n'ait pas de défaillance avant 1233 heures est :

  .....

Remarque : On a choisit de déterminer λ en posant $F(4000) = 0,95$. Ce choix est arbitraire, on aurait pu prendre $F(2500) = 0,86$, ce qui nous aurait conduit à $\lambda \simeq 0,000786$.



Les différentes estimations des fonctions de défaillances suivant les valeurs de λ.

3. **Méthode des** .....

Enfin, quand l'échantillon est ..... , on peut prendre $\boxed{F(t_i) = \dfrac{n_i - 0,3}{n + 0,4}}$

t	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
$F(t)$			0,67	0,77	0,87	0,92	0,97

3. Taux d'avarie.

a. Approche statistique.

Reprenons notre exemple :

Instants en heures	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
Nombre d'appareils en fonctionnement		9	6	4	2	1	0

- Entre 1000 et 1500 heures, ... aspirateurs sont tombés en panne sur 9.

  Donc, le taux d' ..... entre 1000 et 1500 heures est ..... , autrement dit,

  ..... % des aspirateurs sont tombés en panne dans l'intervalle]1000; 1500].

  Le taux d' ..... entre 1000 et 1500 heures est donc de ..... aspirateurs par heure.

- Entre 2000 et 2500 heures, ... aspirateurs sont tombés en panne sur .....

  Donc, le taux d' ..... entre 2000 et 2500 heures est ..... .

  Le taux d'avarie moyen par unité de temps entre 2000 et 2500 heures est de ..... aspirateurs par heure.

Intervalle de temps en heures	$[0;500]$	$]500;1000]$	$]1000;1500]$	$]1500;2000]$	$]2000;2500]$	$]2500;3000]$	$]3000;4000]$
Taux d'avarie moyen	$0,35$	$0,31$	$0,33$			$0,50$	1
Taux d'avarie moyen par heure	$0,07\%$	$0,062\%$	$0,066\%$			$0,1\%$	

b. Approche probabiliste.

Notons N l'effectif totale de notre échantillon, et plaçons-nous dans l'intervalle de temps $[t,\, t+h]$:

- $F(t) \times N$ est le nombre d'aspirateurs défaillants à l'instant t.
- $F(t+h) \times N$ est le nombre d'aspirateurs défaillants à l'instant $t+h$.
- $\big(F(t+h) - F(t)\big) \times N$ est le nombre d'aspirateurs défaillants dans l'intervalle de temps $[t,\, t+h]$.
- $R(t) \times N$ est le nombre d'aspirateurs en fonctionnement à l'instant t.

Définition:

Dans l'intervalle de temps $[t\,, t+h]$, le ..... .

- moyen est $\dfrac{F(t+h)-F(t)}{R(t)}$
- moyen par unité de temps est $\dfrac{F(t+h)-F(t)}{h \times R(t)}$
- ..... est $\dfrac{f(t)}{R(t)}$

Le taux d'avarie instantanée à l'instant t est noté ..... .

Démonstration

Le taux d'avarie instantanée est .....

On en déduit que :

Propriété

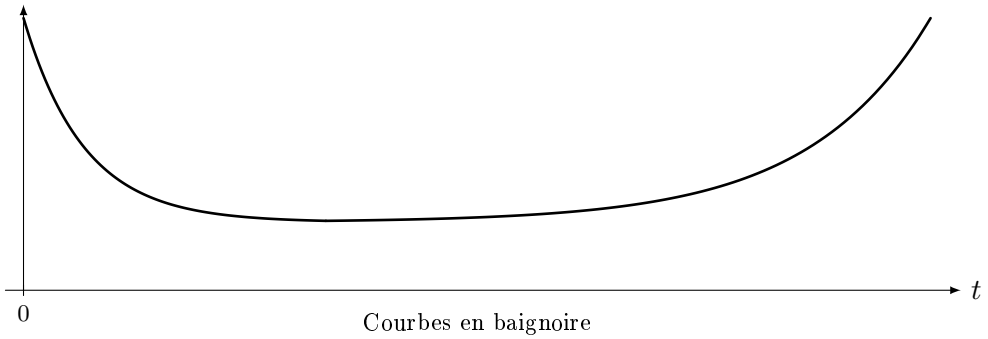
$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}\,;\ \lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)}\,;\ \text{ et } \lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$$

Ces égalités permettent de relier le taux d'avarie instantanée à la fonction de défaillance ou à la fonction de fiabilité.
En résolvant ces égalités qui sont des équations différentielles on obtient :

Propriété

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(x)\,\mathrm{d}x\right) \text{ et } F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

On constate expérimentalement que, pour la plupart des matériels, la courbe représentative du taux d'avarie instantané $t \mapsto \lambda(t)$ a la forme donnée par la figure ci-dessous. Elle est appelée « courbe en baignoire » et comporte trois parties distinctes :



Courbes en baignoire

☐ **Pannes précoces :** la période de début de fonctionnement, où le taux d'avarie instantané décroît avec le temps, car les pannes précoces dues à des défauts de fabrication ou de conception sont de moins en moins nombreuses.

☐ **Vie utile :**la période de maturité, ou « vie utile », où le taux d'avarie instantané reste à peu près constant ; pendant cette période, les pannes paraissent dues au hasard.

☐ **Usure :**la période d'usure, où le taux d'avarie instantané augmente avec le temps, car les pannes sont dues à l'usure croissante du matériel.

c. MTBF

Définition:

Le **T**emps **M**oyen de **B**on **F**onctionnement (Mean Time Between Failure) est l'espérance de T :

$$\text{MTBF} = E(T) = \int_0^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$$

L'espérance, $E(T)$ de la variable aléatoire T représente la ..... d'un dispositif avant sa première défaillance.

II. Fiabilité d'un système.

- **Fiabilité d'un système monté en série :**

Pour un système constitués de n composants montés en série (le bon fonctionnement de chacun étant indépendant du bon fonctionnement des autres), on montre que l'on a :

$$\boxed{R(T) = R_1(t) \times R_2(t) \times \cdots \times R_n(t)}$$

où R_1, R_2, ..., R_n sont les fonctions de fiabilités respectives des n composants.

Remarque : En effet, le système est défaillant dès qu'un seul composant est défaillant.

Démonstration

En notant T_i la variable aléatoire durée de vie avant une défaillance du composant i, on a :

$$P(T > t) = P\big((T_1 > t) \cap (T_2 > t) \cap \ldots \cap (T_n > t)\big)$$

Le bon fonctionnement de chacun des composants étant indépendant du bon fonctionnement des autres, on a :

$$P(T > t) = P(T_1 > t) \times P(T_2 > t) \times \ldots \times P(T_n > t) = R_1(t) \times R_2(t) \times \cdots \times R_n(t)$$

- **Fiabilité d'un système monté en parallèle :**

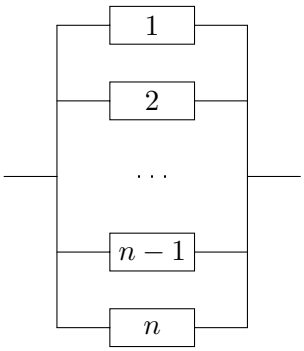
En parallèles, il y a deux modes différents :

- ..... : tous les composants fonctionnent dès le temps $t = 0$. Il suffit qu'au moins un composant fonctionne pour que le système au complet fonctionne. La durée de vie T du système est

$$T = max\big\{T_1, T_2, \ldots, T_n\big\}$$

- ..... : Seul le premier composant est mis en marche à $t = 0$. Une fois en panne, le deuxième composant prend le relai et ainsi de suite. Le système au complet tombe en panne quand le dernier composant tombe en panne.

Dans ce cours, nous nous placerons toujours en redondance active.



Pour un système constitués de n composants montés en parallèles (le bon fonctionnement de chacun étant indépendant du bon fonctionnement des autres), on montre que l'on a

$$\boxed{F(T) = F_1(t) \times F_2(t) \times \cdots \times F_n(t)}$$

où F_1, F_2, ..., F_n sont les fonctions de défaillances respectives des n composants. En effet, le système est fonctionnel dès qu'un seul composant est fonctionnel.

Démonstration

Pour que le système monté en parallèles soit défaillant, il faut que tous les composants le soit, donc :

$$P(T \leqslant t) = P\big((T_1 \leqslant t) \cap (T_2 \leqslant t) \cap \ldots \cap (T_n \leqslant t)\big)$$

Le bon fonctionnement de chacun des composants étant indépendant du bon fonctionnement des autres, donc* le mauvais fonctionnement de chacun des composants étant indépendant du mauvais fonctionnement des autres, et on a :

$$P(T \leqslant t) = P(T_1 \leqslant t) \times P(T_2 \leqslant t) \times \ldots \times P(T_n \leqslant t) = F_1(t) \times F_2(t) \times \cdots \times F_n(t)$$

(*) Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ aussi.

III. Application avec la loi exponentielle.

Dans un certain nombre de cas, à partir des valeurs numériques de fiabilité ou de défaillance établies grâce à un échantillonnage et par exemple la méthode des rangs, on peut utiliser une loi de probabilité pour décrire les données.
On peut utiliser n'importe quelle loi de probabilité pourvu qu'elle décrive les données. Dans la pratique, on retient en général quatre lois :

- la loi exponentielle ;
- la loi normale ;
- la loi log-normale ;
- la loi de Weibull.

Dans toute cette section, nous allons nous concentrer sur la loi exponentielle. Ainsi, la densité de la variable aléatoire T sera toujours : $f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ avec $\lambda > 0$.

Cette loi concerne tous les matériels pendant une durée de leur ..... (voir la courbe en baignoire) et les matériels électroniques pendant presque toute leur vie.

Propriété

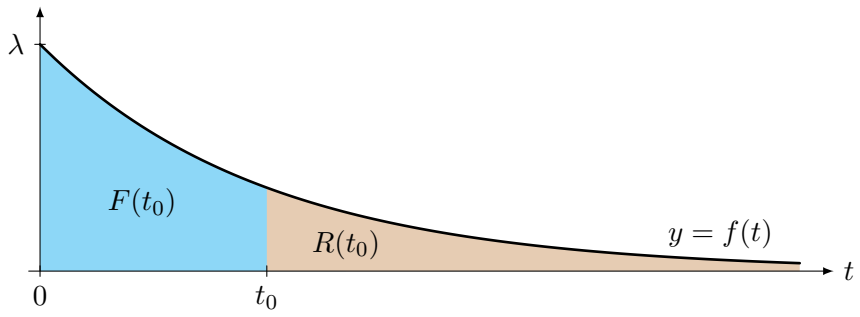
La loi exponentielle est la loi suivie par la variable aléatoire T lorsque le taux d'avarie est ..... .
Autrement dit, on a :

$$\forall t \geqslant 0\,,\ \lambda(t) = \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \forall t \geqslant 0\,,\ f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

où λ est une constante réelle strictement positive.

Propriété

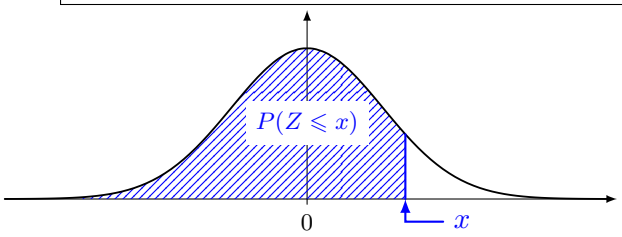
- La fonction de fiabilité est définie pour tout $t \geqslant 0$ par $R(t) = e^{-\lambda t}$.
- La fonction de défaillance est définie pour tout $t \geqslant 0$ par $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- La densité de probabilité de la variable aléatoire T est définie pour tout $t \geqslant 0$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

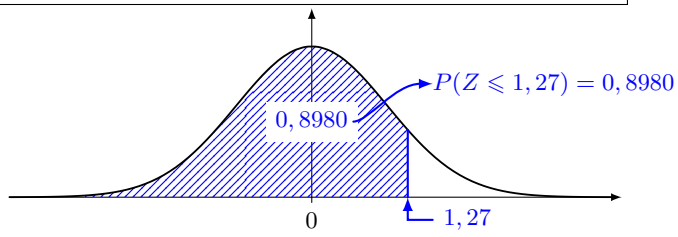


Propriété

- Le temps moyen de bon fonctionnement est $E(T) = \frac{1}{\lambda}$
- L'écart-type de la variable aléatoire T est $\sigma_T = \frac{1}{\lambda}$

Table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

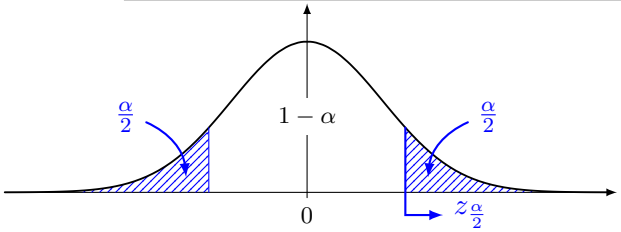


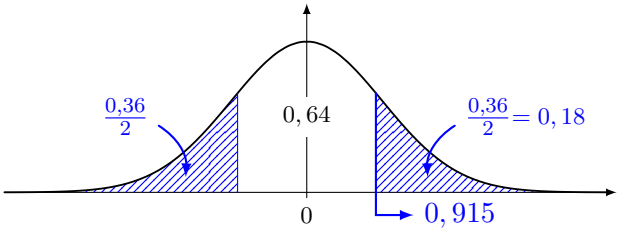


x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	**0,07**	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	**0,8980**	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

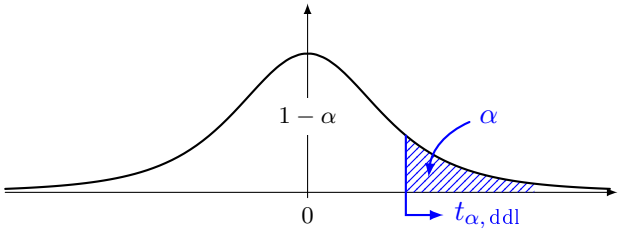
Table de l'écart réduit de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

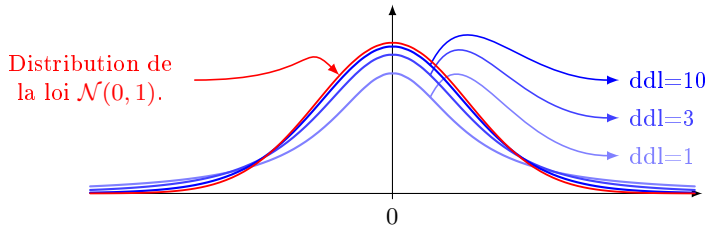




α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	**0,06**	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	**0,915**	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

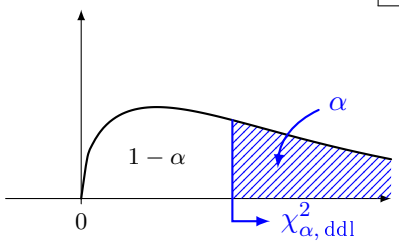
Table de la loi de Student $\mathcal{T}$(ddl)

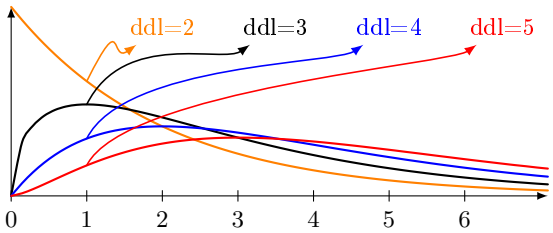




ddl \ α	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40
1	63,657	31,821	12,706	6,314	3,078	1,376	1,000	0,727	0,325
2	9,925	6,965	4,303	2,920	1,886	1,061	0,816	0,617	0,289
3	5,841	4,541	3,182	2,353	1,638	0,978	0,765	0,584	0,277
4	4,604	3,747	2,776	2,132	1,533	0,941	0,741	0,569	0,271
5	4,032	3,365	2,571	2,015	1,476	0,920	0,727	0,559	0,267
6	3,707	3,143	2,447	1,943	1,440	0,906	0,718	0,553	0,265
7	3,499	2,998	2,365	1,895	1,415	0,896	0,711	0,549	0,263
8	3,355	2,896	2,306	1,860	1,397	0,889	0,706	0,546	0,262
9	3,250	2,821	2,262	1,833	1,383	0,883	0,703	0,543	0,261
10	3,169	2,764	2,228	1,812	1,372	0,879	0,700	0,542	0,260
11	3,106	2,718	2,201	1,796	1,363	0,876	0,697	0,540	0,260
12	3,055	2,681	2,179	1,782	1,356	0,873	0,695	0,539	0,259
13	3,012	2,650	2,160	1,771	1,350	0,870	0,694	0,538	0,259
14	2,977	2,624	2,145	1,761	1,345	0,868	0,692	0,537	0,258
15	2,947	2,602	2,131	1,753	1,341	0,866	0,691	0,536	0,258
16	2,921	2,583	2,120	1,746	1,337	0,865	0,690	0,535	0,258
17	2,898	2,567	2,110	1,740	1,333	0,863	0,689	0,534	0,257
18	2,878	2,552	2,101	1,734	1,330	0,862	0,688	0,534	0,257
19	2,861	2,539	2,093	1,729	1,328	0,861	0,688	0,533	0,257
20	2,845	2,528	2,086	1,725	1,325	0,860	0,687	0,533	0,257
21	2,831	2,518	2,080	1,721	1,323	0,859	0,686	0,532	0,257
22	2,819	2,508	2,074	1,717	1,321	0,858	0,686	0,532	0,256
23	2,807	2,500	2,069	1,714	1,319	0,858	0,685	0,532	0,256
24	2,797	2,492	2,064	1,711	1,318	0,857	0,685	0,531	0,256
25	2,787	2,485	2,060	1,708	1,316	0,856	0,684	0,531	0,256
26	2,779	2,479	2,056	1,706	1,315	0,856	0,684	0,531	0,256
27	2,771	2,473	2,052	1,703	1,314	0,855	0,684	0,531	0,256
28	2,763	2,467	2,048	1,701	1,313	0,855	0,683	0,530	0,256
29	2,756	2,462	2,045	1,699	1,311	0,854	0,683	0,530	0,256

Table du χ^2(ddl)





ddl \ α	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,250	0,750	0,900	0,950	0,990	0,995
1	7,879	6,635	5,024	3,841	2,706	1,323	0,1015	0,01579	0,003932	0,000157	0,000039
2	10,60	9,210	7,378	5,991	4,605	2,773	0,5754	0,2107	0,1026	0,02010	0,01003
3	12,84	11,34	9,348	7,815	6,251	4,108	1,213	0,5844	0,3518	0,1148	0,07172
4	14,86	13,28	11,14	9,488	7,779	5,385	1,923	1,064	0,7107	0,2971	0,2070
5	16,75	15,09	12,83	11,07	9,236	6,626	2,675	1,610	1,145	0,5543	0,4117
6	18,55	16,81	14,45	12,59	10,64	7,841	3,455	2,204	1,635	0,8721	0,6757
7	20,28	18,48	16,01	14,07	12,02	9,037	4,255	2,833	2,167	1,239	0,9893
8	21,95	20,09	17,53	15,51	13,36	10,22	5,071	3,490	2,733	1,646	1,344
9	23,59	21,67	19,02	16,92	14,68	11,39	5,899	4,168	3,325	2,088	1,735
10	25,19	23,21	20,48	18,31	15,99	12,55	6,737	4,865	3,940	2,558	2,156
11	26,76	24,72	21,92	19,68	17,28	13,70	7,584	5,578	4,575	3,053	2,603
12	28,30	26,22	23,34	21,03	18,55	14,85	8,438	6,304	5,226	3,571	3,074
13	29,82	27,69	24,74	22,36	19,81	15,98	9,299	7,042	5,892	4,107	3,565
14	31,32	29,14	26,12	23,68	21,06	17,12	10,17	7,790	6,571	4,660	4,075
15	32,80	30,58	27,49	25,00	22,31	18,25	11,04	8,547	7,261	5,229	4,601
16	34,27	32,00	28,85	26,30	23,54	19,37	11,91	9,312	7,962	5,812	5,142
17	35,72	33,41	30,19	27,59	24,77	20,49	12,79	10,09	8,672	6,408	5,697
18	37,16	34,81	31,53	28,87	25,99	21,60	13,68	10,86	9,390	7,015	6,265
19	38,58	36,19	32,85	30,14	27,20	22,72	14,56	11,65	10,12	7,633	6,844
20	40,00	37,57	34,17	31,41	28,41	23,83	15,45	12,44	10,85	8,260	7,434
21	41,40	38,93	35,48	32,67	29,62	24,93	16,34	13,24	11,59	8,897	8,034
22	42,80	40,29	36,78	33,92	30,81	26,04	17,24	14,04	12,34	9,542	8,643
23	44,18	41,64	38,08	35,17	32,01	27,14	18,14	14,85	13,09	10,20	9,260
24	45,56	42,98	39,36	36,42	33,20	28,24	19,04	15,66	13,85	10,86	9,886
25	46,93	44,31	40,65	37,65	34,38	29,34	19,94	16,47	14,61	11,52	10,52
26	48,29	45,64	41,92	38,89	35,56	30,43	20,84	17,29	15,38	12,20	11,16
27	49,64	46,96	43,19	40,11	36,74	31,53	21,75	18,11	16,15	12,88	11,81
28	50,99	48,28	44,46	41,34	37,92	32,62	22,66	18,94	16,93	13,56	12,46
29	52,34	49,59	45,72	42,56	39,09	33,71	23,57	19,77	17,71	14,26	13,12
30	53,67	50,89	46,98	43,77	40,26	34,80	24,48	20,60	18,49	14,95	13,79
31	55,00	52,19	48,23	44,99	41,42	35,89	25,39	21,43	19,28	15,66	14,46
32	56,33	53,49	49,48	46,19	42,58	36,97	26,30	22,27	20,07	16,36	15,13
33	57,65	54,78	50,73	47,40	43,75	38,06	27,22	23,11	20,87	17,07	15,82
34	58,96	56,06	51,97	48,60	44,90	39,14	28,14	23,95	21,66	17,79	16,50
35	60,27	57,34	53,20	49,80	46,06	40,22	29,05	24,80	22,47	18,51	17,19
36	61,58	58,62	54,44	51,00	47,21	41,30	29,97	25,64	23,27	19,23	17,89
37	62,88	59,89	55,67	52,19	48,36	42,38	30,89	26,49	24,07	19,96	18,59
38	64,18	61,16	56,90	53,38	49,51	43,46	31,81	27,34	24,88	20,69	19,29

ddl \ α	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,250	0,750	0,900	0,950	0,990	0,995
39	65,48	62,43	58,12	54,57	50,66	44,54	32,74	28,20	25,70	21,43	20,00
40	66,77	63,69	59,34	55,76	51,81	45,62	33,66	29,05	26,51	22,16	20,71
41	68,05	64,95	60,56	56,94	52,95	46,69	34,58	29,91	27,33	22,91	21,42
42	69,34	66,21	61,78	58,12	54,09	47,77	35,51	30,77	28,14	23,65	22,14
43	70,62	67,46	62,99	59,30	55,23	48,84	36,44	31,63	28,96	24,40	22,86
44	71,89	68,71	64,20	60,48	56,37	49,91	37,36	32,49	29,79	25,15	23,58
45	73,17	69,96	65,41	61,66	57,51	50,98	38,29	33,35	30,61	25,90	24,31
46	74,44	71,20	66,62	62,83	58,64	52,06	39,22	34,22	31,44	26,66	25,04
47	75,70	72,44	67,82	64,00	59,77	53,13	40,15	35,08	32,27	27,42	25,77
48	76,97	73,68	69,02	65,17	60,91	54,20	41,08	35,95	33,10	28,18	26,51
49	78,23	74,92	70,22	66,34	62,04	55,27	42,01	36,82	33,93	28,94	27,25
50	79,49	76,15	71,42	67,50	63,17	56,33	42,94	37,69	34,76	29,71	27,99
51	80,75	77,39	72,62	68,67	64,30	57,40	43,87	38,56	35,60	30,48	28,73
52	82,00	78,62	73,81	69,83	65,42	58,47	44,81	39,43	36,44	31,25	29,48
53	83,25	79,84	75,00	70,99	66,55	59,53	45,74	40,31	37,28	32,02	30,23
54	84,50	81,07	76,19	72,15	67,67	60,60	46,68	41,18	38,12	32,79	30,98
55	85,75	82,29	77,38	73,31	68,80	61,66	47,61	42,06	38,96	33,57	31,73
56	86,99	83,51	78,57	74,47	69,92	62,73	48,55	42,94	39,80	34,35	32,49
57	88,24	84,73	79,75	75,62	71,04	63,79	49,48	43,82	40,65	35,13	33,25
58	89,48	85,95	80,94	76,78	72,16	64,86	50,42	44,70	41,49	35,91	34,01
59	90,72	87,17	82,12	77,93	73,28	65,92	51,36	45,58	42,34	36,70	34,77
60	91,95	88,38	83,30	79,08	74,40	66,98	52,29	46,46	43,19	37,48	35,53
61	93,19	89,59	84,48	80,23	75,51	68,04	53,23	47,34	44,04	38,27	36,30
62	94,42	90,80	85,65	81,38	76,63	69,10	54,17	48,23	44,89	39,06	37,07
63	95,65	92,01	86,83	82,53	77,75	70,16	55,11	49,11	45,74	39,86	37,84
64	96,88	93,22	88,00	83,68	78,86	71,23	56,05	50,00	46,59	40,65	38,61
65	98,11	94,42	89,18	84,82	79,97	72,28	56,99	50,88	47,45	41,44	39,38
66	99,33	95,63	90,35	85,96	81,09	73,34	57,93	51,77	48,31	42,24	40,16
67	100,6	96,83	91,52	87,11	82,20	74,40	58,87	52,66	49,16	43,04	40,94
68	101,8	98,03	92,69	88,25	83,31	75,46	59,81	53,55	50,02	43,84	41,71
69	103,0	99,23	93,86	89,39	84,42	76,52	60,76	54,44	50,88	44,64	42,49
70	104,2	100,4	95,02	90,53	85,53	77,58	61,70	55,33	51,74	45,44	43,28
71	105,4	101,6	96,19	91,67	86,64	78,63	62,64	56,22	52,60	46,25	44,06
72	106,6	102,8	97,35	92,81	87,74	79,69	63,58	57,11	53,46	47,05	44,84
73	107,9	104,0	98,52	93,95	88,85	80,75	64,53	58,01	54,33	47,86	45,63
74	109,1	105,2	99,68	95,08	89,96	81,80	65,47	58,90	55,19	48,67	46,42
75	110,3	106,4	100,8	96,22	91,06	82,86	66,42	59,79	56,05	49,48	47,21
76	111,5	107,6	102,0	97,35	92,17	83,91	67,36	60,69	56,92	50,29	48,00
77	112,7	108,8	103,2	98,48	93,27	84,97	68,31	61,59	57,79	51,10	48,79
78	113,9	110,0	104,3	99,62	94,37	86,02	69,25	62,48	58,65	51,91	49,58
79	115,1	111,1	105,5	100,7	95,48	87,08	70,20	63,38	59,52	52,72	50,38
80	116,3	112,3	106,6	101,9	96,58	88,13	71,14	64,28	60,39	53,54	51,17
81	117,5	113,5	107,8	103,0	97,68	89,18	72,09	65,18	61,26	54,36	51,97
82	118,7	114,7	108,9	104,1	98,78	90,24	73,04	66,08	62,13	55,17	52,77
83	119,9	115,9	110,1	105,3	99,88	91,29	73,99	66,98	63,00	55,99	53,57
84	121,1	117,1	111,2	106,4	101,0	92,34	74,93	67,88	63,88	56,81	54,37
85	122,3	118,2	112,4	107,5	102,1	93,39	75,88	68,78	64,75	57,63	55,17

ddl \ α	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,250	0,750	0,900	0,950	0,990	0,995
86	123,5	119,4	113,5	108,6	103,2	94,45	76,83	69,68	65,62	58,46	55,97
87	124,7	120,6	114,7	109,8	104,3	95,50	77,78	70,58	66,50	59,28	56,78
88	125,9	121,8	115,8	110,9	105,4	96,55	78,73	71,48	67,37	60,10	57,58
89	127,1	122,9	117,0	112,0	106,5	97,60	79,68	72,39	68,25	60,93	58,39
90	128,3	124,1	118,1	113,1	107,6	98,65	80,62	73,29	69,13	61,75	59,20
91	129,5	125,3	119,3	114,3	108,7	99,70	81,57	74,20	70,00	62,58	60,00
92	130,7	126,5	120,4	115,4	109,8	100,8	82,52	75,10	70,88	63,41	60,81
93	131,9	127,6	121,6	116,5	110,9	101,8	83,47	76,01	71,76	64,24	61,63
94	133,1	128,8	122,7	117,6	111,9	102,8	84,42	76,91	72,64	65,07	62,44
95	134,2	130,0	123,9	118,8	113,0	103,9	85,38	77,82	73,52	65,90	63,25
96	135,4	131,1	125,0	119,9	114,1	104,9	86,33	78,73	74,40	66,73	64,06
97	136,6	132,3	126,1	121,0	115,2	106,0	87,28	79,63	75,28	67,56	64,88
98	137,8	133,5	127,3	122,1	116,3	107,0	88,23	80,54	76,16	68,40	65,69
99	139,0	134,6	128,4	123,2	117,4	108,1	89,18	81,45	77,05	69,23	66,51