

Chapitre 2 - Probabilités.

Soient A , B , et C trois événements d'un univers Ω , on a les propriétés suivantes :

Soient A , B , et C trois événements d'un univers Ω , on a les propriétés suivantes :

- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, et , $0 \leq P(A) \leq 1$

Soient A , B , et C trois événements d'un univers Ω , on a les propriétés suivantes :

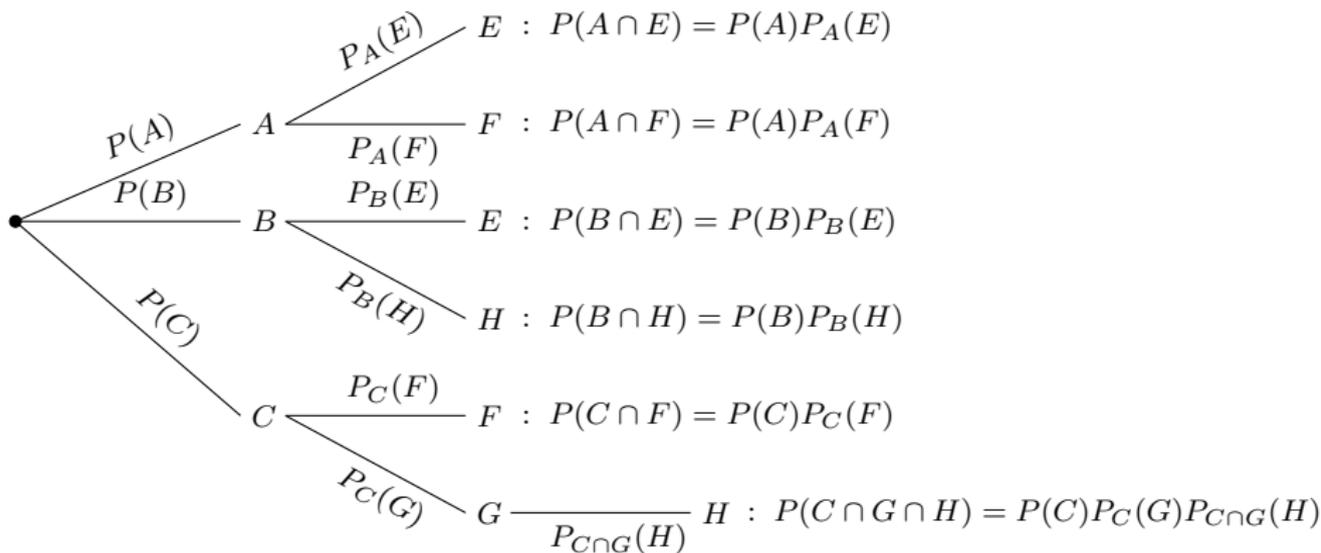
- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, et, $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Soient A , B , et C trois événements d'un univers Ω , on a les propriétés suivantes :

- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, et, $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont incompatibles.

Soient A , B , et C trois événements d'un univers Ω , on a les propriétés suivantes :

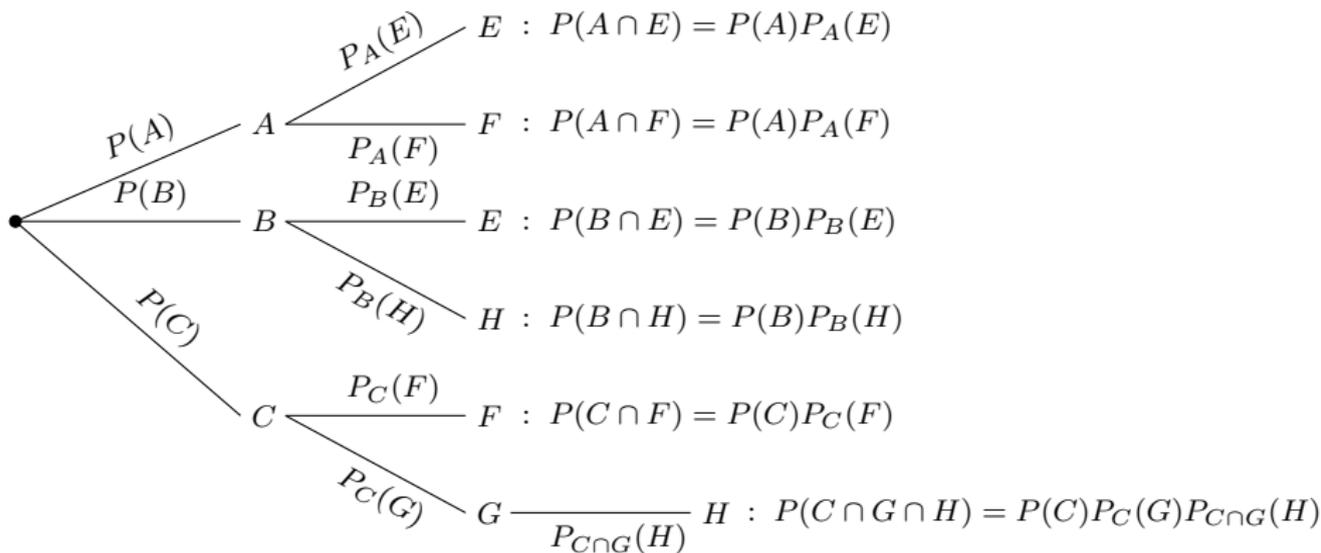
- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, et, $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont incompatibles.
- Si $P(B) \neq 0$ alors la probabilité de A sachant B est $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$



Propriété

La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.

II. Arbres pondérés

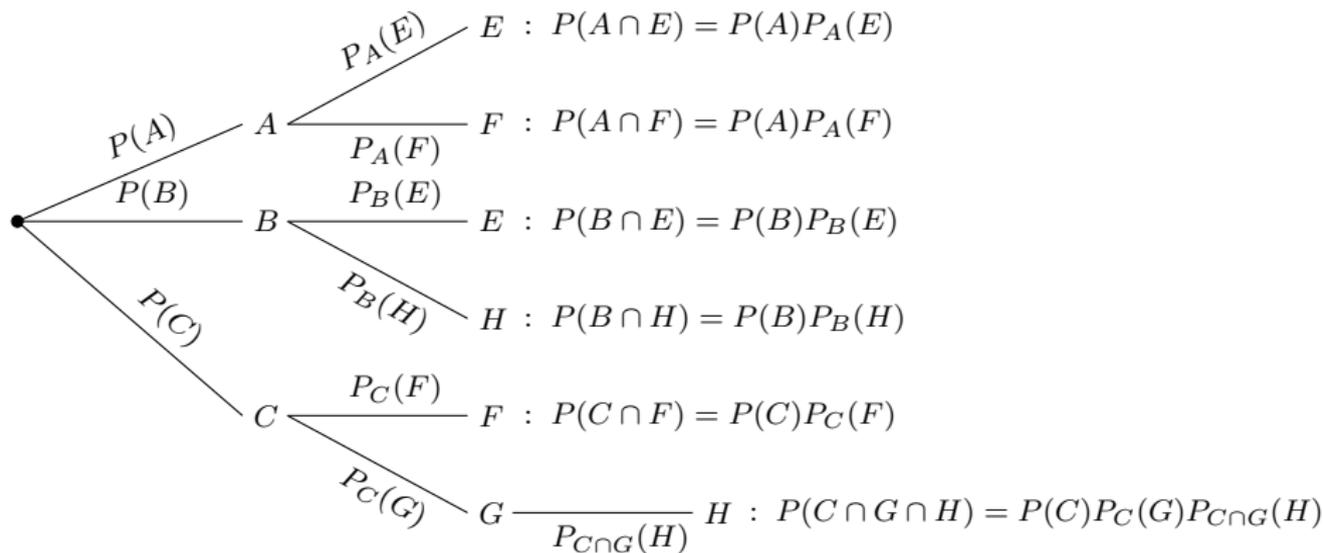


Propriété

La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.

Exemple n° 1 :

- Au nœud racine :

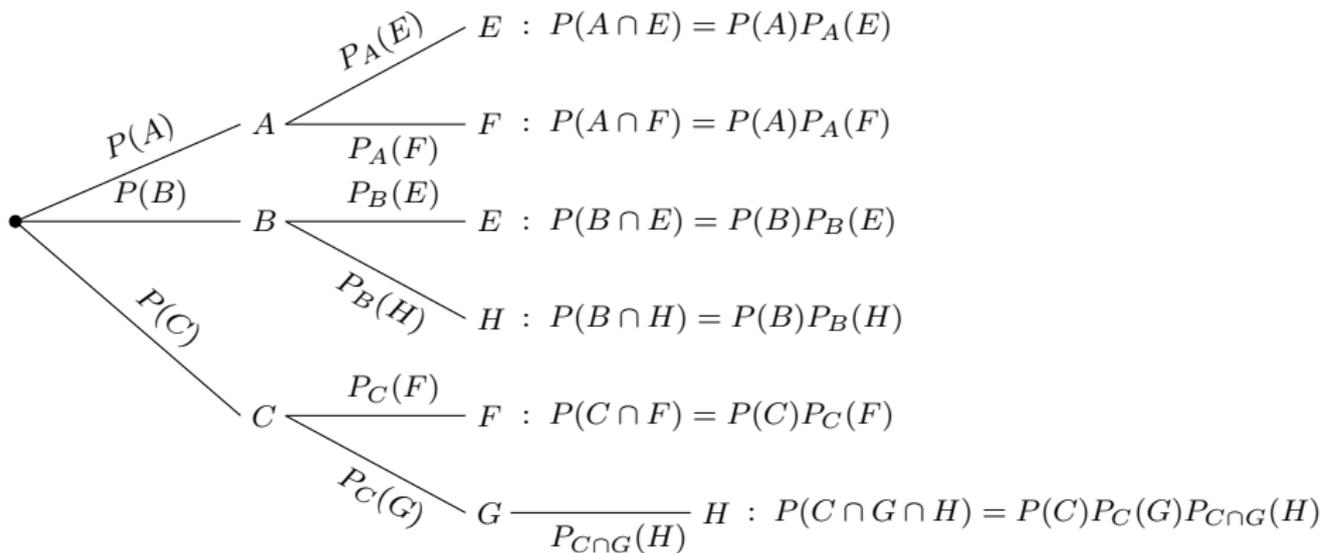


Propriété

La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.

Exemple n° 1 :

- Au nœud racine : $P(A) + P(B) + P(C) = 1$



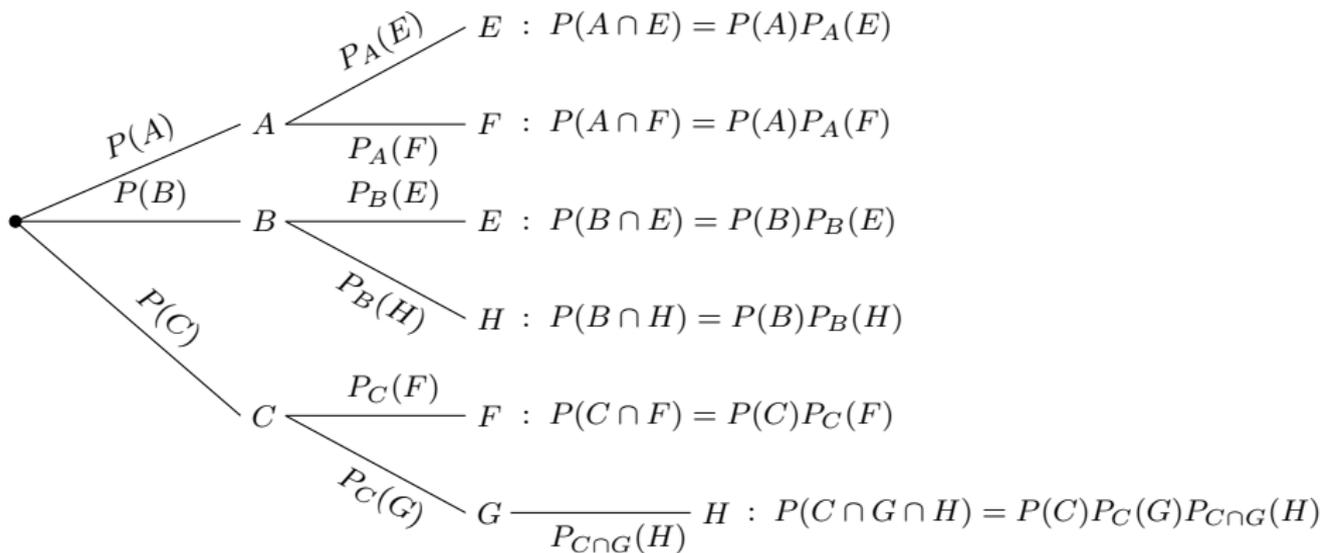
Propriété

La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.

Exemple n° 1 :

- Au nœud racine : $P(A) + P(B) + P(C) = 1$
- Au nœud C :

II. Arbres pondérés

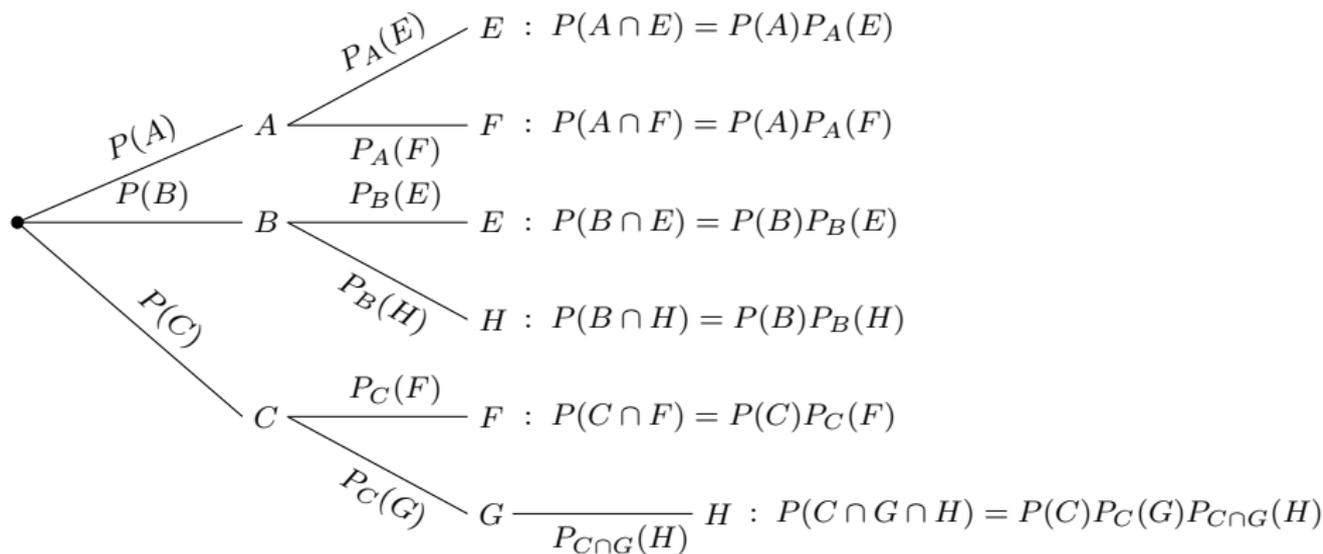


Propriété

La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.

Exemple n° 1 :

- Au nœud racine : $P(A) + P(B) + P(C) = 1$
- Au nœud C : $P_C(F) + P_C(G) = 1$.

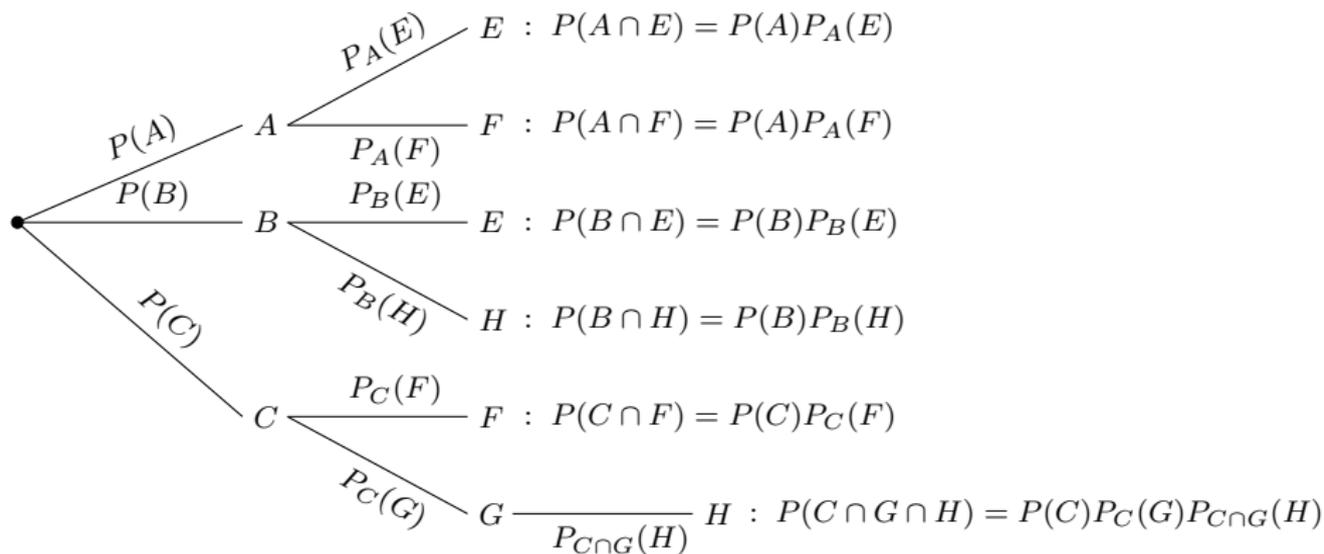


Propriété

La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.

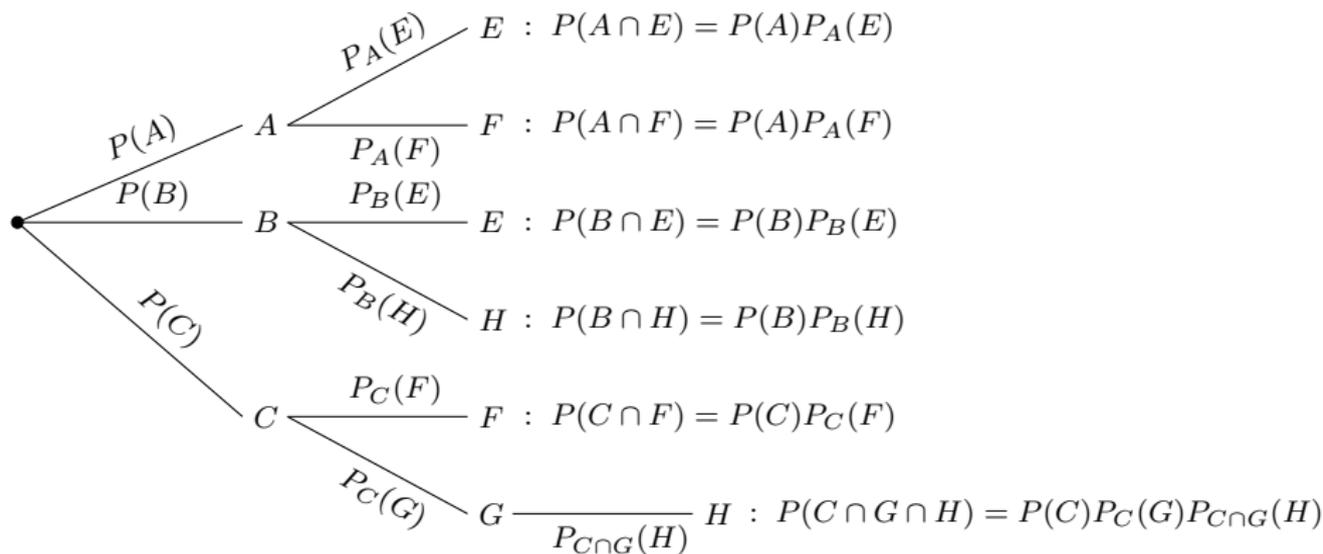
Exemple n° 1 :

- Au nœud racine : $P(A) + P(B) + P(C) = 1$
- Au nœud C : $P_C(F) + P_C(G) = 1$.



Propriété

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.

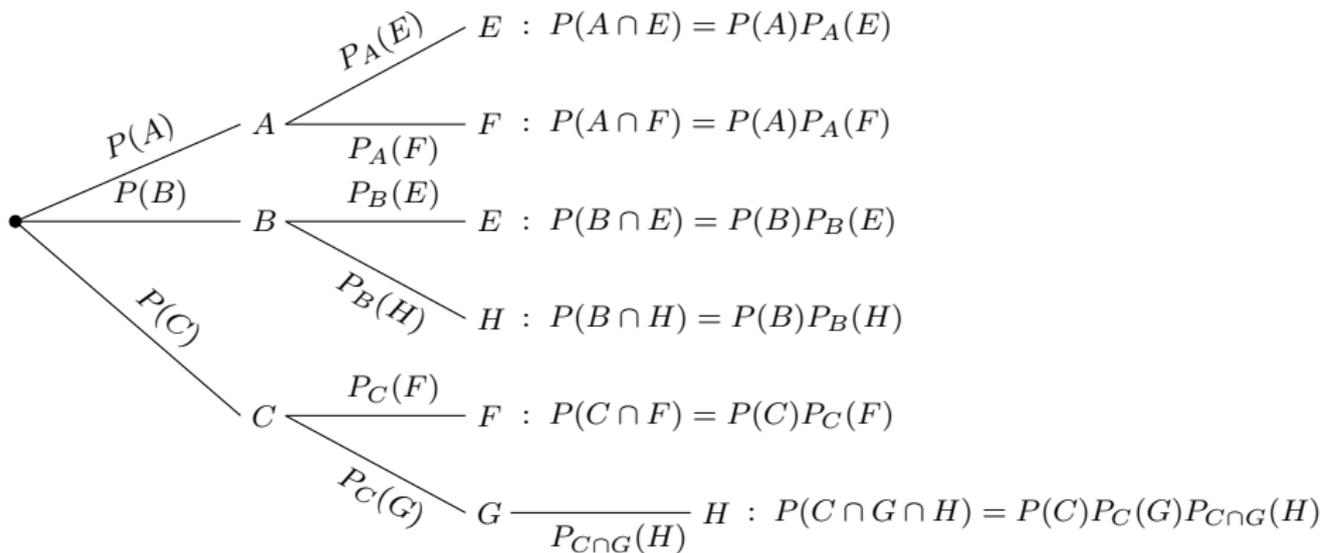


Propriété

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.

Exemple n° 2 :

- Au chemin $A \cap F$:

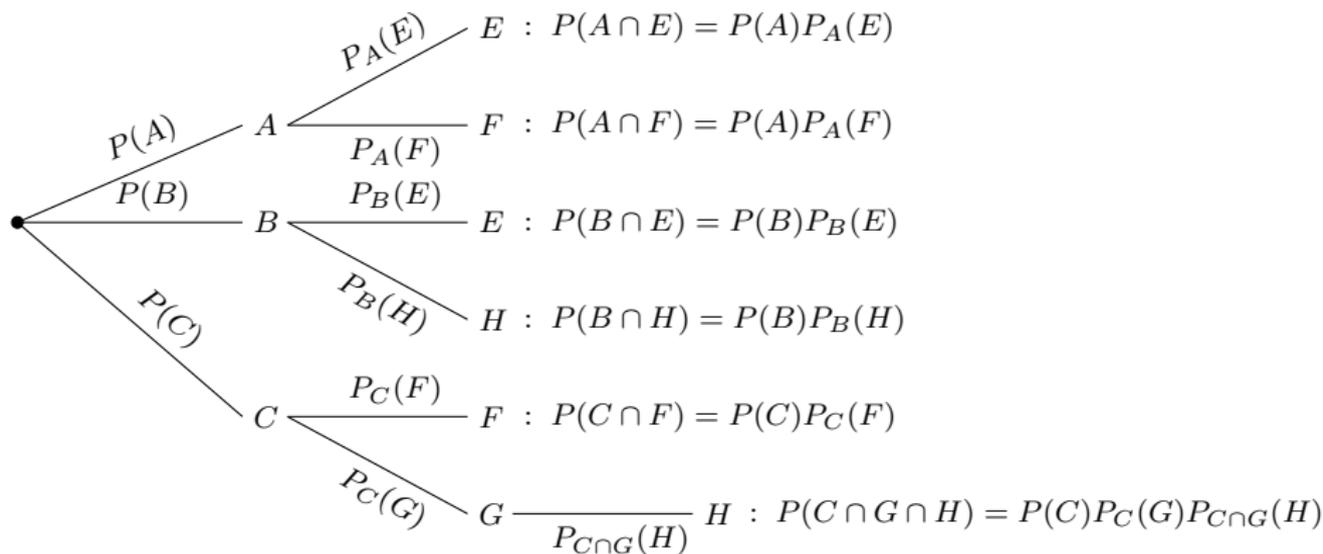


Propriété

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.

Exemple n° 2 :

- Au chemin $A \cap F$: $P(A \cap F) = P(A)P_A(F)$

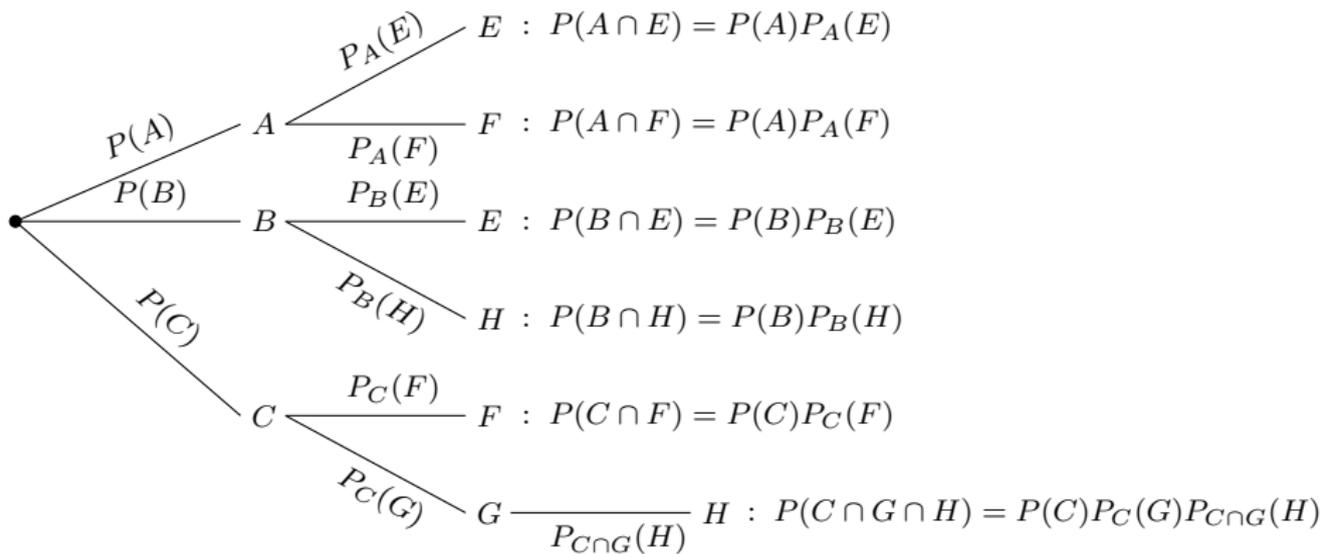


Propriété

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.

Exemple n° 2 :

- Au chemin $A \cap F$: $P(A \cap F) = P(A)P_A(F)$
- Au chemin $C \cap G \cap H$:

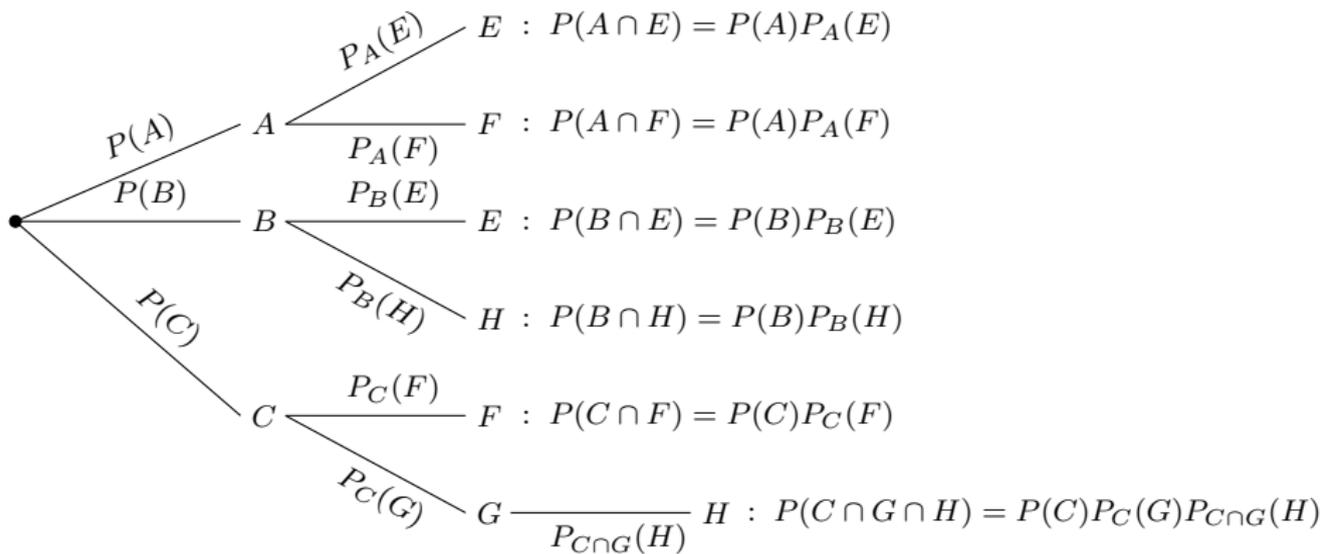


Propriété

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.

Exemple n° 2 :

- Au chemin $A \cap F$: $P(A \cap F) = P(A)P_A(F)$
- Au chemin $C \cap G \cap H$: $P(C \cap G \cap H) = P(C)P_C(G)P_{C \cap G}(H)$

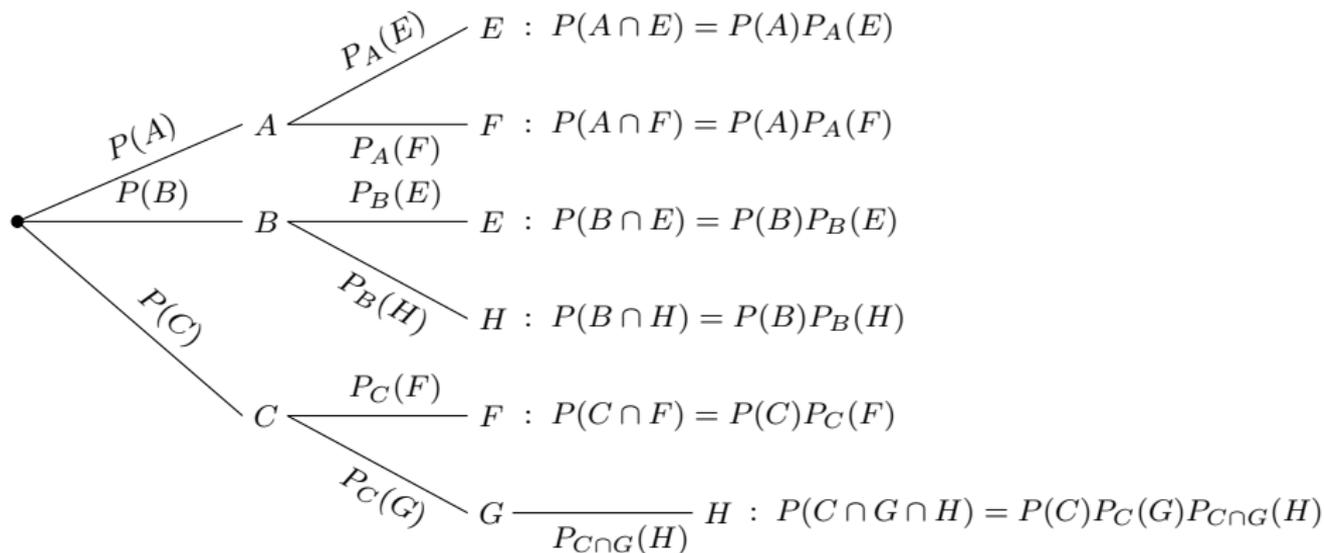


Propriété

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.

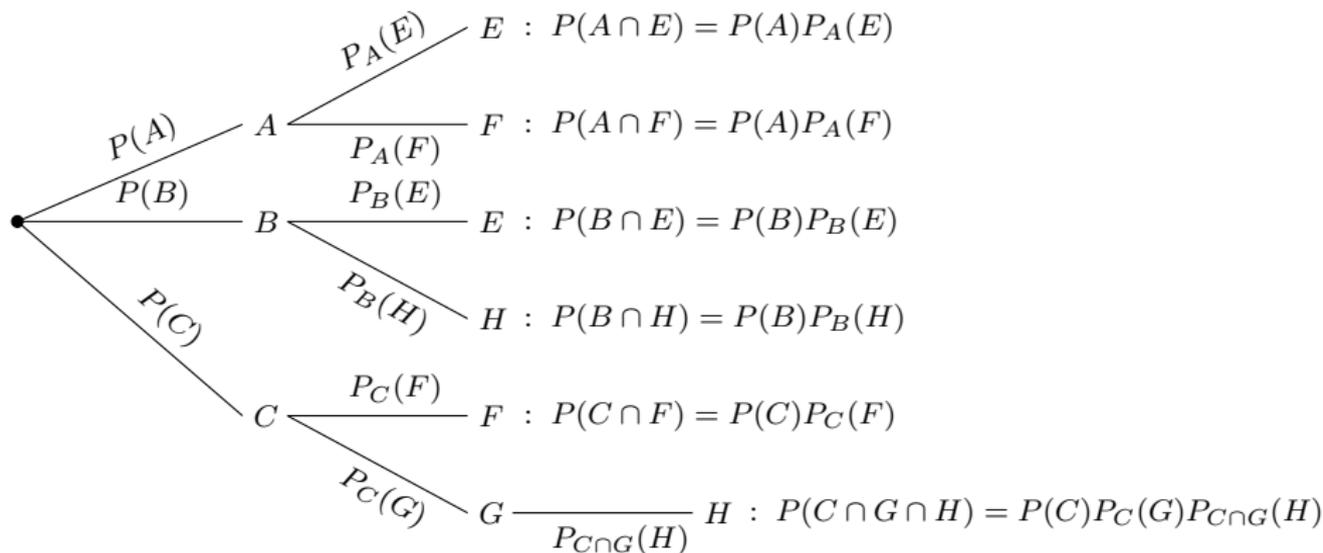
Exemple n° 2 :

- Au chemin $A \cap F$: $P(A \cap F) = P(A)P_A(F)$
- Au chemin $C \cap G \cap H$: $P(C \cap G \cap H) = P(C)P_C(G)P_{C \cap G}(H)$



Formule des probabilités totales :

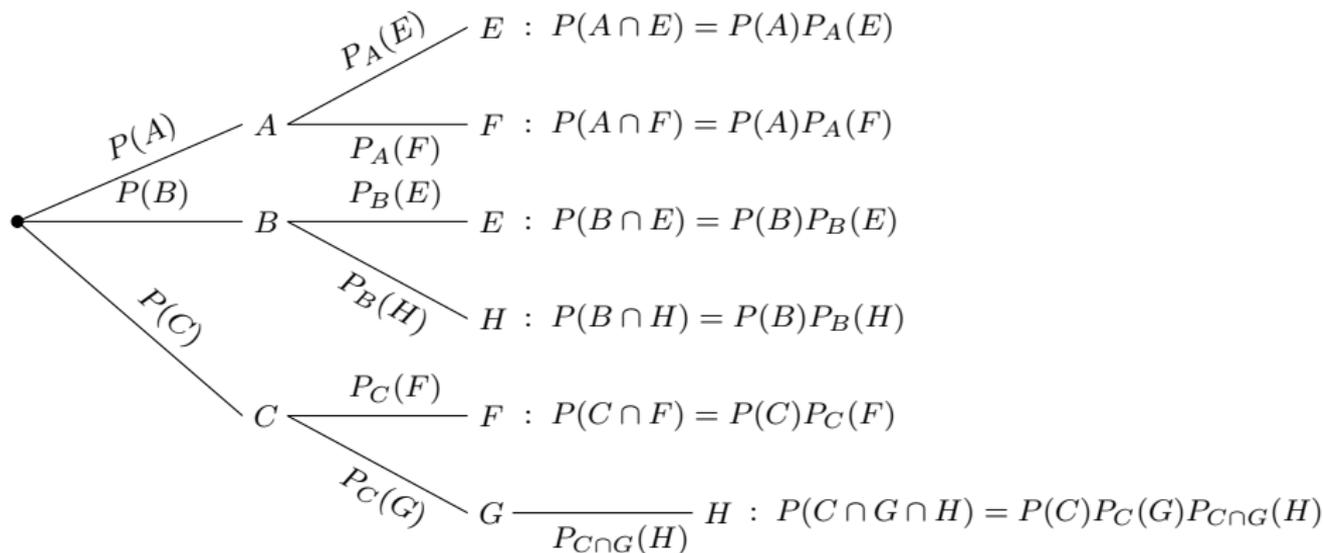
la probabilité d'une feuille est la somme des probabilités des chemins menant à cette feuille.



Formule des probabilités totales :

la probabilité d'une feuille est la somme des probabilités des chemins menant à cette feuille.

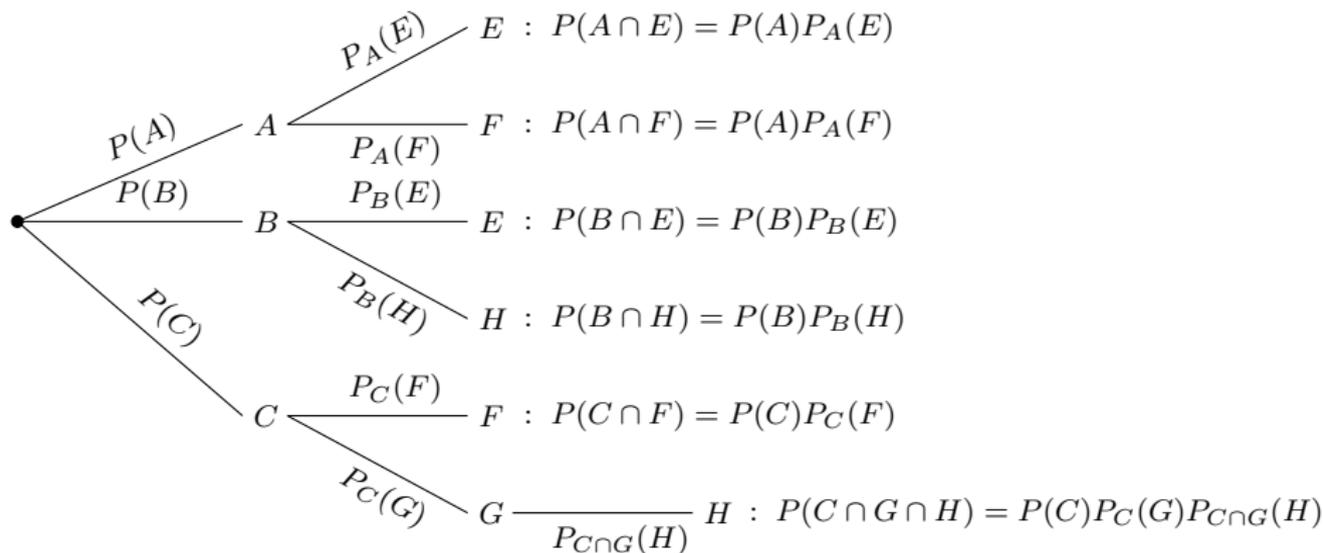
Exemple n° 3 : Il y a deux chemins menant à la feuille F :



Formule des probabilités totales :

la probabilité d'une feuille est la somme des probabilités des chemins menant à cette feuille.

Exemple n° 3 : Il y a deux chemins menant à la feuille $F : A \cap F$ et $C \cap F$

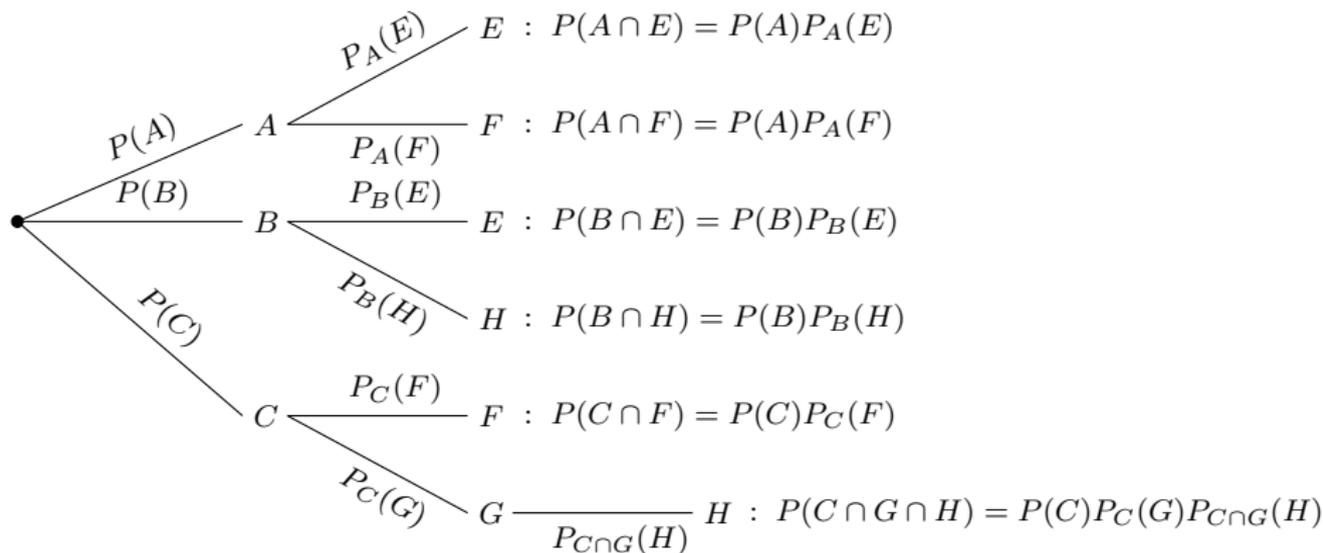


Formule des probabilités totales :

la probabilité d'une feuille est la somme des probabilités des chemins menant à cette feuille.

Exemple n° 3 : Il y a deux chemins menant à la feuille $F : A \cap F$ et $C \cap F$

$$P(F) = P(A \cap F) + P(C \cap F) =$$



Formule des probabilités totales :

la probabilité d'une feuille est la somme des probabilités des chemins menant à cette feuille.

Exemple n° 3 : Il y a deux chemins menant à la feuille $F : A \cap F$ et $C \cap F$

$$P(F) = P(A \cap F) + P(C \cap F) = P(A)P_A(F) + P(C)P_C(F)$$

Exercice n° 1: Aline adore la confiture aux prunes de sa grand-mère. Quand elle tartine sa tranche de brioche, au petit déjeuner, la cuillerée de confiture va directement dans sa bouche une fois sur trois. Pour obtenir une tranche de brioche correctement recouverte de confiture, il faut y étaler le contenu de trois cuillers.

Exercice n°2: Aline adore la confiture aux prunes de sa grand-mère. Quand elle tartine sa tranche de brioche, au petit déjeuner, la cuillerée de confiture va directement dans sa bouche une fois sur trois. Pour obtenir une tranche de brioche correctement recouverte de confiture, il faut y étaler le contenu de trois cuillers.

On note les événements :

- B_i : « la $i^{\text{ème}}$ cuillerée de confiture va directement dans sa bouche » ;
- A : « Aline a avalé directement au moins deux cuillerées de confiture lorsque la tranche de brioche sera prête à être consommée. »

Exercice n°3: Aline adore la confiture aux prunes de sa grand-mère. Quand elle tartine sa tranche de brioche, au petit déjeuner, la cuillerée de confiture va directement dans sa bouche une fois sur trois. Pour obtenir une tranche de brioche correctement recouverte de confiture, il faut y étaler le contenu de trois cuillers.

On note les événements :

- B_i : « la $i^{\text{ème}}$ cuillerée de confiture va directement dans sa bouche » ;
- A : « Aline a avalé directement au moins deux cuillerées de confiture lorsque la tranche de brioche sera prête à être consommée. »

Calcule la probabilité de l'événement A .

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R , une boule verte V , et une boule bleue B . Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R , une boule verte V , et une boule bleue B . Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

| $\begin{array}{l} \text{2}^{\text{nd}} \text{ tirage} \\ \text{1}^{\text{er}} \text{ tirage} \end{array}$ | R | V | B |
|---|----------|----------|----------|
| R | (R, R) | (R, V) | (R, B) |
| V | (V, R) | (V, V) | (V, B) |
| B | (B, R) | (B, V) | (B, B) |

III. Variables aléatoires discrètes

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R , une boule verte V , et une boule bleue B . Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

| $\begin{array}{l} \text{2}^{\text{nd}} \text{ tirage} \\ \text{1}^{\text{er}} \text{ tirage} \end{array}$ | R | V | B |
|---|----------|----------|----------|
| R | (R, R) | (R, V) | (R, B) |
| V | (V, R) | (V, V) | (V, B) |
| B | (B, R) | (B, V) | (B, B) |

On est en situation d'équiprobabilité donc la probabilité d'avoir au moins une boule bleue est :

.....

III. Variables aléatoires discrètes

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R , une boule verte V , et une boule bleue B . Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

| $\begin{array}{l} \text{2}^{\text{nd}} \text{ tirage} \\ \text{1}^{\text{er}} \text{ tirage} \end{array}$ | R | V | B |
|---|----------|----------|----------|
| R | (R, R) | (R, V) | (R, B) |
| V | (V, R) | (V, V) | (V, B) |
| B | (B, R) | (B, V) | (B, B) |

On est en situation d'équiprobabilité donc la probabilité d'avoir au moins une boule bleue est :

$$P(\{(R, B), (V, B), (B, R), (B, V), (B, B)\}) = \frac{5}{9}$$

Complétons l'énoncé :

- Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 6€.
- Pour chaque boule verte tirée, on gagne 2€.
- Pour chaque boule bleue tirée, on perd 8€.

Complétons l'énoncé :

- Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 6€.
- Pour chaque boule verte tirée, on gagne 2€.
- Pour chaque boule bleue tirée, on perd 8€.

Notons G la variable aléatoire qui à un tirage de deux boules associe le gain du joueur :

$$\begin{aligned} G : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (R, B) &\longmapsto \dots \end{aligned}$$

Complétons l'énoncé :

- Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 6€.
- Pour chaque boule verte tirée, on gagne 2€.
- Pour chaque boule bleue tirée, on perd 8€.

Notons G la variable aléatoire qui à un tirage de deux boules associe le gain du joueur :

$$\begin{aligned} G : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (R, B) &\longmapsto -2 \end{aligned}$$

Complétons l'énoncé :

- Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 6€.
- Pour chaque boule verte tirée, on gagne 2€.
- Pour chaque boule bleue tirée, on perd 8€.

Notons G la variable aléatoire qui à un tirage de deux boules associe le gain du joueur :

$$\begin{aligned} G : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (R, B) &\longmapsto -2 \end{aligned}$$

Les valeurs prises par G sont $G(\Omega) = \{ \dots \}$

Complétons l'énoncé :

- Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 6€.
- Pour chaque boule verte tirée, on gagne 2€.
- Pour chaque boule bleue tirée, on perd 8€.

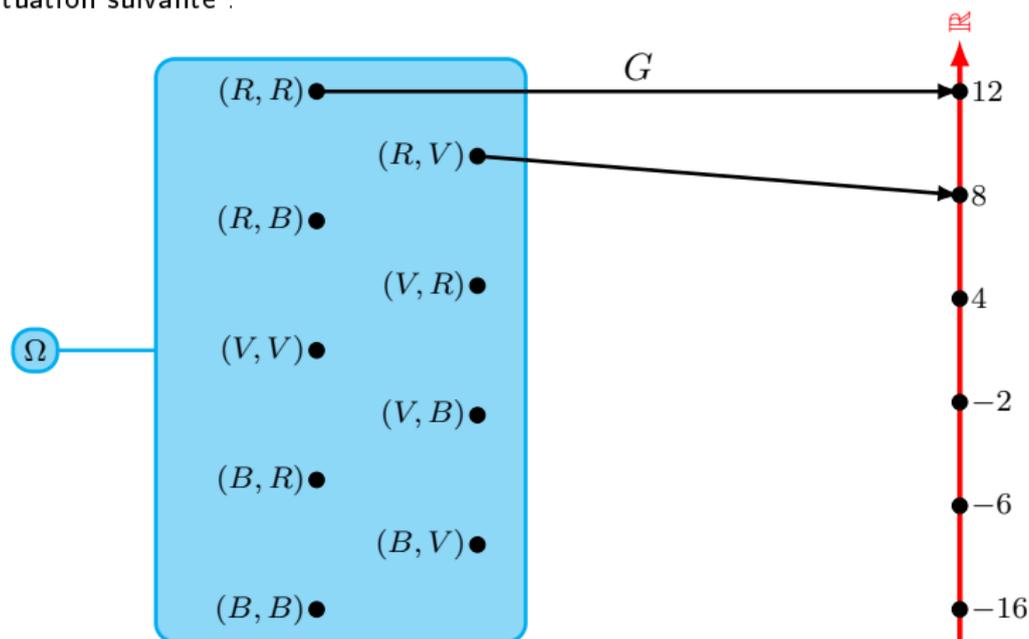
Notons G la variable aléatoire qui à un tirage de deux boules associe le gain du joueur :

$$\begin{aligned} G : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (R, B) &\longmapsto -2 \end{aligned}$$

Les valeurs prises par G sont $G(\Omega) = \{ -16, -6, -2, 4, 8, 12 \}$

III. Variables aléatoires discrètes

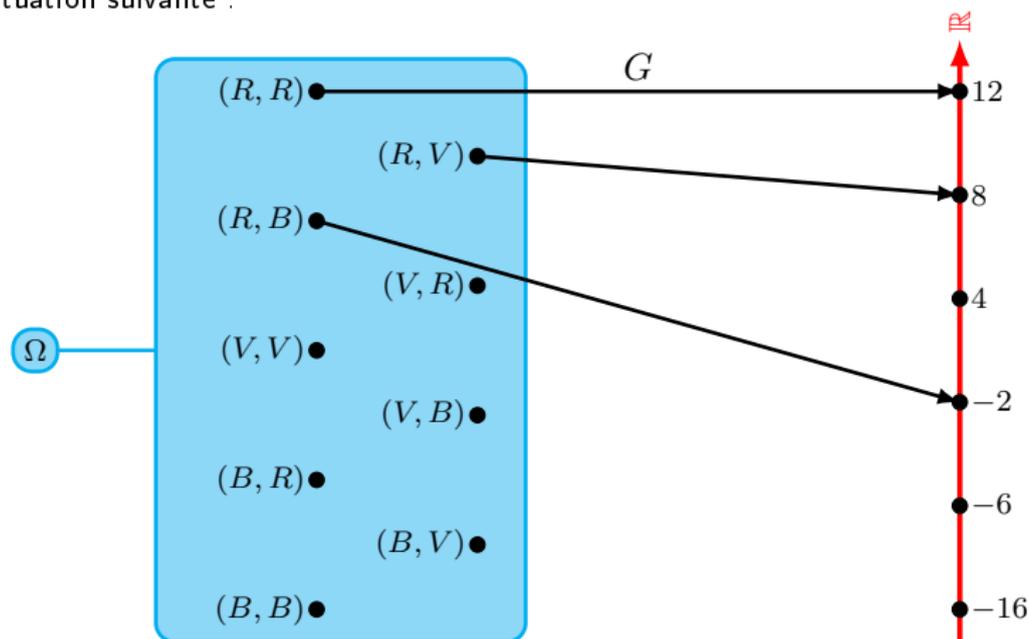
On a la situation suivante :



$$P(G = 8) = P(\{ \dots \dots \dots \}) =$$

III. Variables aléatoires discrètes

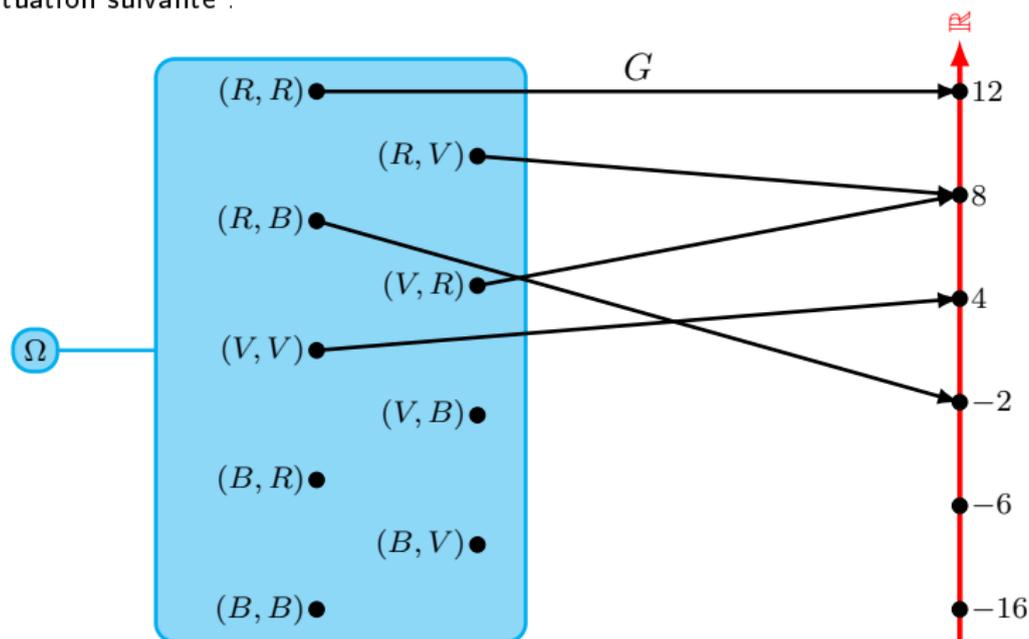
On a la situation suivante :



$$P(G = 8) = P(\{ \dots \dots \dots \}) =$$

III. Variables aléatoires discrètes

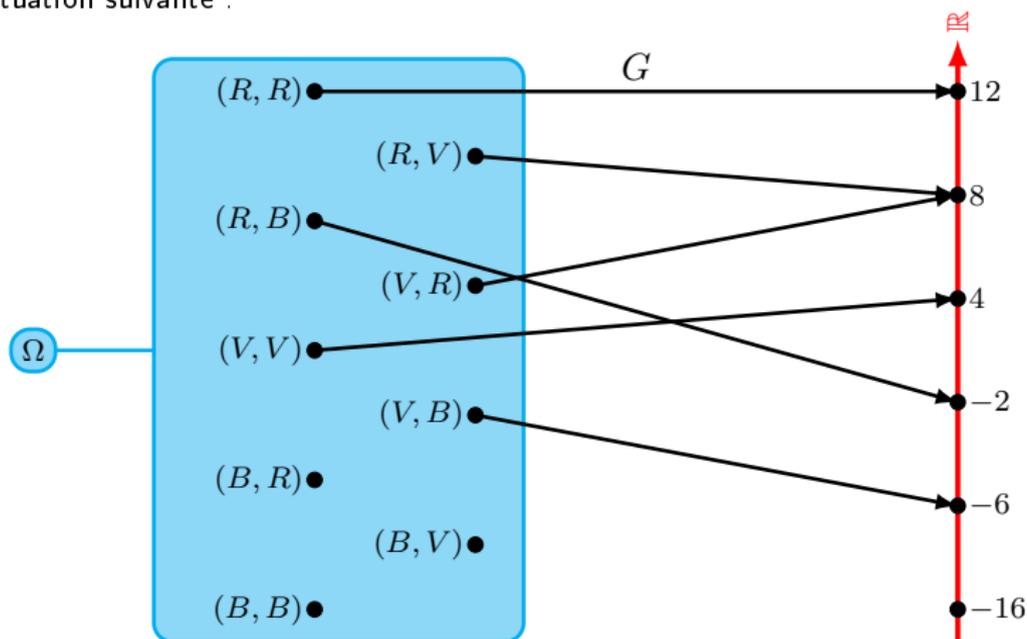
On a la situation suivante :



$$P(G = 8) = P(\{ \dots \dots \dots \}) =$$

III. Variables aléatoires discrètes

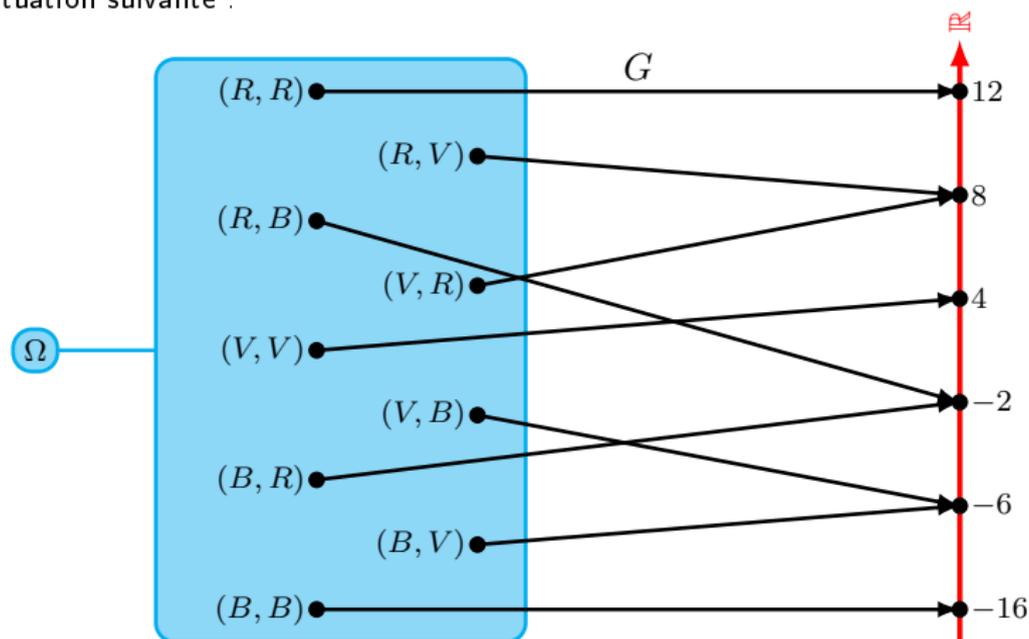
On a la situation suivante :



$$P(G = 8) = P(\{ \dots \dots \dots \}) =$$

III. Variables aléatoires discrètes

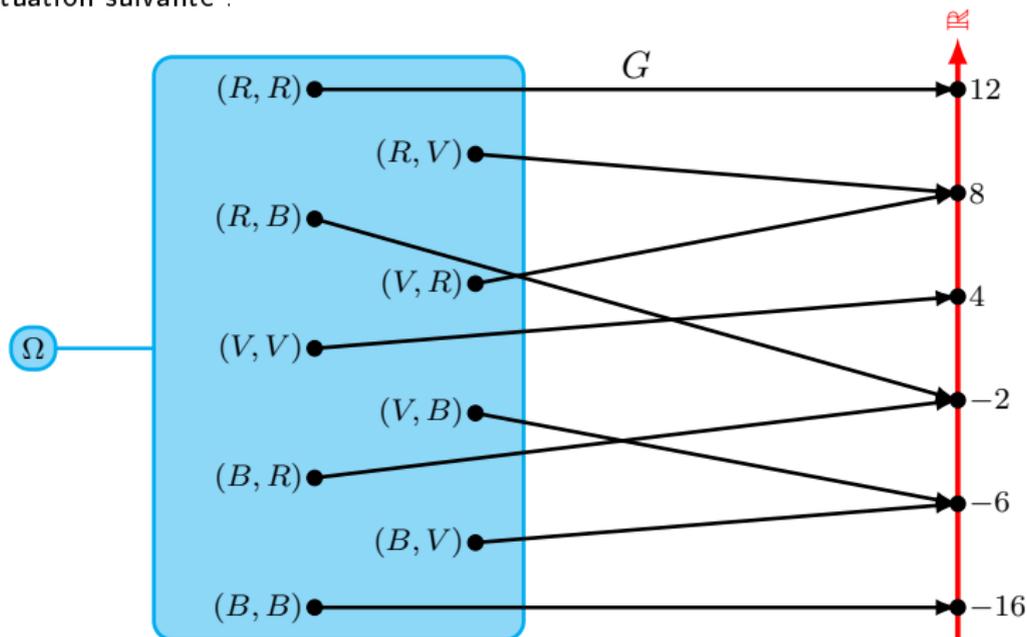
On a la situation suivante :



$$P(G = 8) = P(\{(R, V), (V, R)\}) = \frac{2}{9}$$

III. Variables aléatoires discrètes

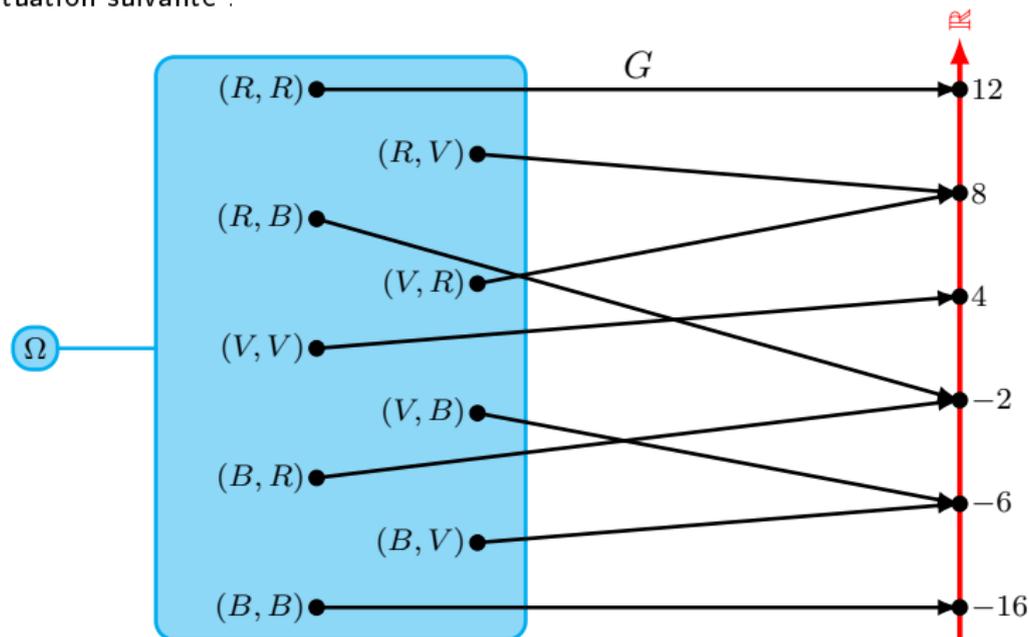
On a la situation suivante :



L'espérance de la variable aléatoire G est :

III. Variables aléatoires discrètes

On a la situation suivante :

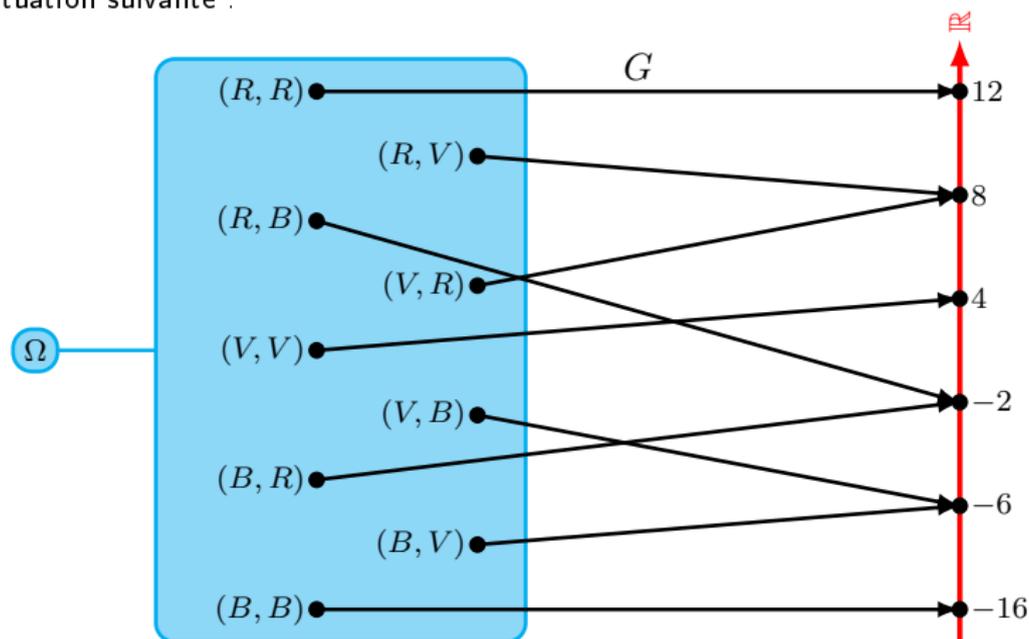


L'espérance de la variable aléatoire G est :

$\Rightarrow E(G) = \dots\dots\dots$

III. Variables aléatoires discrètes

On a la situation suivante :



L'espérance de la variable aléatoire G est :

$$\mathbb{E}(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$$

III. Variables aléatoires discrètes

$$\Rightarrow E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois », la

III. Variables aléatoires discrètes

$$\Rightarrow E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois », la **moyenne** des gains est

III. Variables aléatoires discrètes

$$\Rightarrow E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois », la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est

III. Variables aléatoires discrètes

$$\Rightarrow E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois », la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

III. Variables aléatoires discrètes

$$\Rightarrow E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois », la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) =$$

III. Variables aléatoires discrètes

$$\Rightarrow E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois », la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

III. Variables aléatoires discrètes

$$\Rightarrow E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois », la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

$$\Rightarrow V(G) =$$

III. Variables aléatoires discrètes

$$\Rightarrow E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois », la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

$$\Rightarrow V(G) = E(G^2) - E(G)^2 =$$

III. Variables aléatoires discrètes

$$\Rightarrow E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois », la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

$$\Rightarrow V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 - 0^2 = 69,3$$

III. Variables aléatoires discrètes

$$\Rightarrow E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois », la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

$$\Rightarrow V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 - 0^2 = 69,3 \text{ et } \sigma_G =$$

III. Variables aléatoires discrètes

$$\Rightarrow E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois », la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

$$\Rightarrow V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 - 0^2 = 69,3 \text{ et } \sigma_G = \sqrt{69,3} \simeq 8,3$$

III. Variables aléatoires discrètes

$$\Rightarrow E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois », la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

$$\Rightarrow V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 - 0^2 = 69,3 \text{ et } \sigma_G = \sqrt{69,3} \simeq 8,3$$

Finalement, grande différence entre les statistiques descriptives et les probabilités, c'est que dans le premier cas, l'expérience aléatoire a déjà eu lieu.

III. Variables aléatoires discrètes

$$\Rightarrow E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois », la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

$$\Rightarrow V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 - 0^2 = 69,3 \text{ et } \sigma_G = \sqrt{69,3} \simeq 8,3$$

Finalement, grande différence entre les statistiques descriptives et les probabilités, c'est que dans le premier cas, l'expérience aléatoire a déjà eu lieu.

- En statistique descriptive, on prélève un échantillon de 100 parties, on mesure la moyenne des gains.

III. Variables aléatoires discrètes

$$\Rightarrow E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois », la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

$$\Rightarrow V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 - 0^2 = 69,3 \text{ et } \sigma_G = \sqrt{69,3} \simeq 8,3$$

Finalement, grande différence entre les statistiques descriptives et les probabilités, c'est que dans le premier cas, l'expérience aléatoire a déjà eu lieu.

- En statistique descriptive, on prélève un échantillon de 100 parties, on mesure la moyenne des gains.
- En probabilités, on « espère » une moyenne nulle.

III. Variables aléatoires discrètes

$$\Rightarrow E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois », la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

$$\Rightarrow V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 - 0^2 = 69,3 \text{ et } \sigma_G = \sqrt{69,3} \simeq 8,3$$

Finalement, grande différence entre les statistiques descriptives et les probabilités, c'est que dans le premier cas, l'expérience aléatoire a déjà eu lieu.

- En statistique descriptive, on prélève un échantillon de 100 parties, on mesure la moyenne des gains.
- En probabilités, on « espère » une moyenne nulle.

En mélangeant, ces deux branches des mathématiques, on va estimer la moyenne des gains sur 100 parties, on fera alors des statistiques **inférentielles**.

IV. Probabilités et statistiques.

Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers Ω tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$$

IV. Probabilités et statistiques.

Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers Ω tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$$

| Probabilités | Statistiques |
|--------------------------------------|--|
| $E(X) = \sum_{i=1}^N x_i P(X = x_i)$ | $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ |

IV. Probabilités et statistiques.

Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers Ω tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$$

| Probabilités | Statistiques |
|--------------------------------------|--|
| $E(X) = \sum_{i=1}^N x_i P(X = x_i)$ | $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ |
| E est linéaire | La moyenne est linéaire |

IV. Probabilités et statistiques.

Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers Ω tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$$

| Probabilités | Statistiques |
|--|--|
| $E(X) = \sum_{i=1}^N x_i P(X = x_i)$ | $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ |
| E est linéaire | La moyenne est linéaire |
| $\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^N (E(X) - x_i)^2 P(X = x_i) \\ &= E[E(X) - X]^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$ | $\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2 \\ &= \frac{(\bar{x} - x)^2}{N} \\ &= \bar{x}^2 - \bar{x}^2 \end{aligned}$ |

IV. Probabilités et statistiques.

Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers Ω tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$$

| Probabilités | Statistiques |
|--|--|
| $E(X) = \sum_{i=1}^N x_i P(X = x_i)$ | $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ |
| E est linéaire | La moyenne est linéaire |
| $\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^N (E(X) - x_i)^2 P(X = x_i) \\ &= E[E(X) - X]^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$ | $\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2 \\ &= \overline{(x - \bar{x})^2} \\ &= \overline{x^2} - \bar{x}^2 \end{aligned}$ |
| $\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E[(E(X) - X)(E(Y) - Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} Cov(x, y) &= \overline{(\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)} \\ &= \overline{xy} - \bar{x}\bar{y} \end{aligned}$ |

IV. Probabilités et statistiques.

Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers Ω tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$$

| Probabilités | Statistiques |
|--|--|
| $E(X) = \sum_{i=1}^N x_i P(X = x_i)$ | $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ |
| E est linéaire | La moyenne est linéaire |
| $\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^N (E(X) - x_i)^2 P(X = x_i) \\ &= E[E(X) - X]^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$ | $\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2 \\ &= \frac{(\bar{x} - x)^2}{N} \\ &= \bar{x}^2 - \bar{x}^2 \end{aligned}$ |
| $\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E[(E(X) - X)(E(Y) - Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} Cov(x, y) &= \overline{(\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)} \\ &= \bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y} \end{aligned}$ |
| $\begin{aligned} V(aX + bY) &= \\ a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abCov(X, Y) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} V(ay + by) &= \\ a^2V(x) + b^2V(y) + 2abCov(x, y) \end{aligned}$ |

IV. Probabilités et statistiques.

Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers Ω tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$$

| Probabilités | Statistiques |
|--|--|
| $E(X) = \sum_{i=1}^N x_i P(X = x_i)$ | $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ |
| E est linéaire | La moyenne est linéaire |
| $\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^N (E(X) - x_i)^2 P(X = x_i) \\ &= E[E(X) - X]^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$ | $\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2 \\ &= \frac{(\bar{x} - x)^2}{N} \\ &= \bar{x}^2 - \bar{x}^2 \end{aligned}$ |
| $\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E[(E(X) - X)(E(Y) - Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} Cov(x, y) &= \overline{(\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)} \\ &= \bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y} \end{aligned}$ |
| $\begin{aligned} V(aX + bY) &= \\ a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abCov(X, Y) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} V(ay + by) &= \\ a^2V(x) + b^2V(y) + 2abCov(x, y) \end{aligned}$ |

Où $E(XY) =$

IV. Probabilités et statistiques.

Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même univers Ω tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$$

| Probabilités | Statistiques |
|--|--|
| $E(X) = \sum_{i=1}^N x_i P(X = x_i)$ | $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ |
| E est linéaire | La moyenne est linéaire |
| $\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^N (E(X) - x_i)^2 P(X = x_i) \\ &= E[E(X) - X]^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$ | $\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2 \\ &= \frac{(\bar{x} - \bar{x})^2}{N} \\ &= \bar{x}^2 - \bar{x}^2 \end{aligned}$ |
| $\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E[(E(X) - X)(E(Y) - Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} Cov(x, y) &= \overline{(\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)} \\ &= \bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y} \end{aligned}$ |
| $\begin{aligned} V(aX + bY) &= \\ a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abCov(X, Y) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} V(ay + by) &= \\ a^2V(x) + b^2V(y) + 2abCov(x, y) \end{aligned}$ |

$$\text{Où } E(XY) = \sum_{i,j=1}^N x_i y_j P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$



Théorème

Si X et Y sont deux variables indépendantes alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y) ; Cov(X, Y) = 0 ; V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

IV. Probabilités et statistiques.

Exemple n° 4 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

| $Y \backslash X$ | -1 | 0 | 1 | Total |
|------------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| -1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| Total | $\frac{5}{16}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | 1 |

$$P((X = -1) \cap (Y = 0)) =$$

IV. Probabilités et statistiques.

Exemple n° 4 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

| $Y \backslash X$ | -1 | 0 | 1 | Total |
|------------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| -1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| Total | $\frac{5}{16}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | 1 |

$$P((X = -1) \cap (Y = 0)) = \frac{1}{16}$$

$$P((X = 1) \cap (Y = 1)) =$$

IV. Probabilités et statistiques.

Exemple n° 4 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

| $Y \backslash X$ | -1 | 0 | 1 | Total |
|------------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| -1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| Total | $\frac{5}{16}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | 1 |

$$P((X = -1) \cap (Y = 0)) = \frac{1}{16}$$

$$P((X = 1) \cap (Y = 1)) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) =$$

IV. Probabilités et statistiques.

Exemple n° 4 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

| $Y \backslash X$ | -1 | 0 | 1 | Total |
|------------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| -1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| Total | $\frac{5}{16}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | 1 |

$$P((X = -1) \cap (Y = 0)) = \frac{1}{16}$$

$$P((X = 1) \cap (Y = 1)) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = \frac{5}{16}$$

$$P(Y = 1) =$$

IV. Probabilités et statistiques.

Exemple n° 4 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

| $Y \backslash X$ | -1 | 0 | 1 | Total |
|------------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| -1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| Total | $\frac{5}{16}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | 1 |

$$P((X = -1) \cap (Y = 0)) = \frac{1}{16}$$

$$P((X = 1) \cap (Y = 1)) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = \frac{5}{16}$$

$$P(Y = 1) = \frac{3}{8}$$

Donc :

IV. Probabilités et statistiques.

Exemple n° 4 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

| $Y \backslash X$ | -1 | 0 | 1 | Total |
|------------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| -1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| Total | $\frac{5}{16}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | 1 |

$$P((X = -1) \cap (Y = 0)) = \frac{1}{16}$$

$$P((X = 1) \cap (Y = 1)) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = \frac{5}{16}$$

$$P(Y = 1) = \frac{3}{8}$$

Donc :

$$P((X = 1) \cap (Y = 1)) \neq P(X = 1)P(Y = 1)$$

X et Y

IV. Probabilités et statistiques.

Exemple n° 4 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

| $Y \backslash X$ | -1 | 0 | 1 | Total |
|------------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| -1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| Total | $\frac{5}{16}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | 1 |

$$P((X = -1) \cap (Y = 0)) = \frac{1}{16}$$

$$P((X = 1) \cap (Y = 1)) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = \frac{5}{16}$$

$$P(Y = 1) = \frac{3}{8}$$

Donc :

$$P((X = 1) \cap (Y = 1)) \neq P(X = 1)P(Y = 1)$$

X et Y **ne sont pas indépendantes.**

IV. Probabilités et statistiques.

Exemple n° 5 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

| $Y \backslash X$ | -1 | 0 | 1 | Total |
|------------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| -1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| Total | $\frac{5}{16}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | 1 |

☞ $E(X) =$

IV. Probabilités et statistiques.

Exemple n° 5 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

| $Y \backslash X$ | -1 | 0 | 1 | Total |
|------------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| -1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| Total | $\frac{5}{16}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | 1 |

$$\Rightarrow E(X) = -1 \times \frac{5}{16} + 0 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{5}{16} = 0$$

$$\Rightarrow E(Y) =$$

IV. Probabilités et statistiques.

Exemple n° 5 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

| $Y \backslash X$ | -1 | 0 | 1 | Total |
|------------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| -1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| Total | $\frac{5}{16}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | 1 |

$$\Rightarrow E(X) = -1 \times \frac{5}{16} + 0 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{5}{16} = 0$$

$$\Rightarrow E(Y) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$$

Ces deux espérances sont

IV. Probabilités et statistiques.

Exemple n° 5 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

| $Y \backslash X$ | -1 | 0 | 1 | Total |
|------------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| -1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| Total | $\frac{5}{16}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | 1 |

$$\Rightarrow E(X) = -1 \times \frac{5}{16} + 0 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{5}{16} = 0$$

$$\Rightarrow E(Y) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$$

Ces deux espérances sont **nulles car les lois de X et de Y sont symétriques par rapport à 0.**

IV. Probabilités et statistiques.

Exemple n° 5 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

| $Y \backslash X$ | -1 | 0 | 1 | Total |
|------------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| -1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| Total | $\frac{5}{16}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | 1 |

$$\Rightarrow E(X) = -1 \times \frac{5}{16} + 0 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{5}{16} = 0$$

$$\Rightarrow E(Y) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$$

Ces deux espérances sont **nulles car les lois de X et de Y sont symétriques par rapport à 0.**

$$\Rightarrow E(XY) =$$

IV. Probabilités et statistiques.

Exemple n° 5 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

| $Y \backslash X$ | -1 | 0 | 1 | Total |
|------------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| -1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| Total | $\frac{5}{16}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | 1 |

$$\Rightarrow E(X) = -1 \times \frac{5}{16} + 0 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{5}{16} = 0$$

$$\Rightarrow E(Y) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$$

Ces deux espérances sont **nulles car les lois de X et de Y sont symétriques par rapport à 0.**

$$\Rightarrow E(XY) = (-1)(-1) \times \frac{1}{8} + (1)(-1) \times \frac{1}{8} + (-1)(1) \times \frac{1}{8} + (1)(1) \times \frac{1}{8} = 0$$

IV. Probabilités et statistiques.

Exemple n° 5 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

| $Y \backslash X$ | -1 | 0 | 1 | Total |
|------------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| -1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| Total | $\frac{5}{16}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | 1 |

$$\Rightarrow E(X) = -1 \times \frac{5}{16} + 0 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{5}{16} = 0$$

$$\Rightarrow E(Y) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$$

Ces deux espérances sont **nulles car les lois de X et de Y sont symétriques par rapport à 0.**

$$\Rightarrow E(XY) = (-1)(-1) \times \frac{1}{8} + (1)(-1) \times \frac{1}{8} + (-1)(1) \times \frac{1}{8} + (1)(1) \times \frac{1}{8} = 0$$

$$\Rightarrow Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

Exemple n° 5 : Considérons le couple (X, Y) dont la loi est définie par le tableau ci-dessous :

| $Y \backslash X$ | -1 | 0 | 1 | Total |
|------------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| -1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| Total | $\frac{5}{16}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | 1 |

$$\Rightarrow E(X) = -1 \times \frac{5}{16} + 0 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{5}{16} = 0$$

$$\Rightarrow E(Y) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$$

Ces deux espérances sont **nulles car les lois de X et de Y sont symétriques par rapport à 0.**

$$\Rightarrow E(XY) = (-1)(-1) \times \frac{1}{8} + (1)(-1) \times \frac{1}{8} + (-1)(1) \times \frac{1}{8} + (1)(1) \times \frac{1}{8} = 0$$

$$\Rightarrow Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$



Une covariance nulle n'entraîne pas l'indépendance.