Chapitre 3 - Loi de probabilités.

1. Loi de Bernoulli

Soit A un événement d'un univers Ω.

1. Loi de Bernoulli

Soit A un événement d'un univers Ω.

Soit X la variable aléatoire :

1. Loi de Bernoulli

Soit A un événement d'un univers Ω.

Soit X la variable aléatoire :

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0\,;\,1\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon } (\omega \in \overline{A}) \end{cases} \end{array}$$

1. Loi de Bernoulli

Soit A un événement d'un univers Ω.

Soit X la variable aléatoire :

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0\,;\,1\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon } (\omega \in \overline{A}) \end{cases} \end{array}$$

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

1. Loi de Bernoulli

Soit A un événement d'un univers Ω.

Soit X la variable aléatoire :

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0\,;\,1\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon } (\omega \in \overline{A}) \end{cases} \end{array}$$

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ où $p = P(A) = P(X = 1)$:

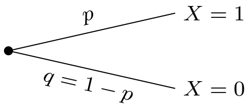
1. Loi de Bernoulli

Soit A un événement d'un univers Ω.

Soit X la variable aléatoire :

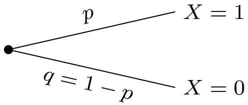
$$X : \quad \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0\,;\,1\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon } (\omega \in \overline{A}) \end{cases} \end{array}$$

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ où $p = P(A) = P(X = 1)$:



(épreuve de Bernoulli)

I. Les lois discrètes.

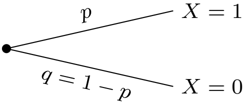


(épreuve de Bernoulli)

$E(X) =$ ....

$E(X^2) =$ ....

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$ .... donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} =$ ....



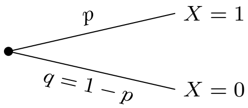
(épreuve de Bernoulli)

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$

$E(X^2) =$ ....

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$ .... donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} =$ ....

I. Les lois discrètes.



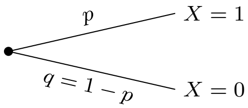
(épreuve de Bernoulli)

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$

$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) = p$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

I. Les lois discrètes.



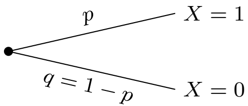
(épreuve de Bernoulli)

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$

$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) = p$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$ donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} =$ ....

I. Les lois discrètes.



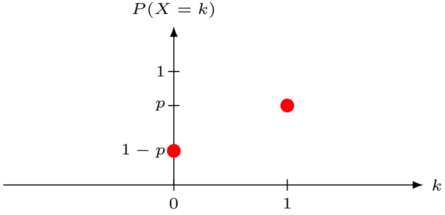
(épreuve de Bernoulli)

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) = p$$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$ donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{pq}$

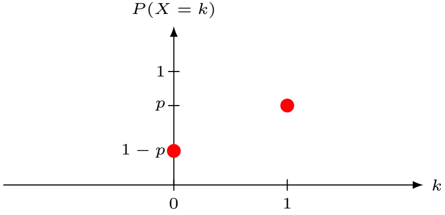
Loi de X



$$P(X = -1) = \ \dots \ \ ; \ P(X = 0) = \ \dots$$

$$P(X = 0,4) = \ \dots \ \ ; \ P(X = 1,3) = \ \dots$$

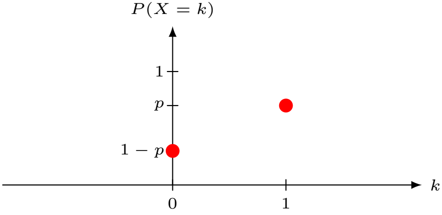
Loi de X



$$P(X = -1) = 0\ ;\ P(X = 0) = \ \ldots$$

$$P(X = 0,4) = \ \ldots\ \ ;\ P(X = 1,3) = \ \ldots$$

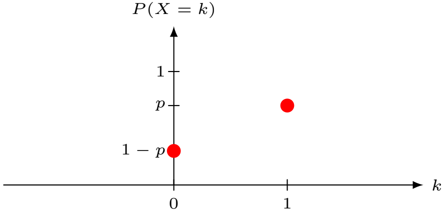
Loi de X



$$P(X=-1)=0\,;\; P(X=0)=1-p$$

$$P(X=0,4)=\ \dots\ ;\; P(X=1,3)=\ \dots$$

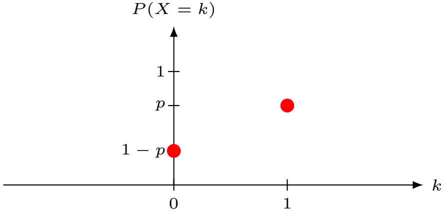
Loi de X



$$P(X = -1) = 0\,;\; P(X = 0) = 1 - p$$

$$P(X = 0,4) = 0\,;\; P(X = 1,3) = \ldots$$

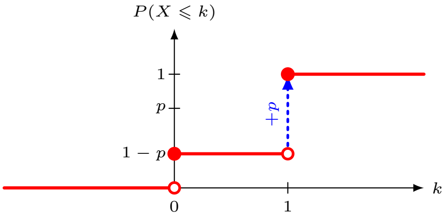
Loi de X



$$P(X = -1) = 0 \,;\; P(X = 0) = 1 - p$$

$$P(X = 0,4) = 0 \,;\; P(X = 1,3) = 0$$

Fonction de répartition F_X

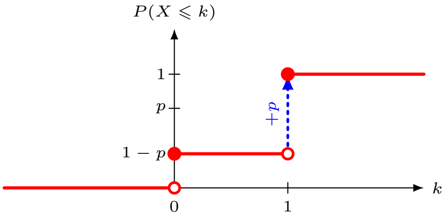


$$F_X(-1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_X(0,3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_X(1,3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Fonction de répartition F_X

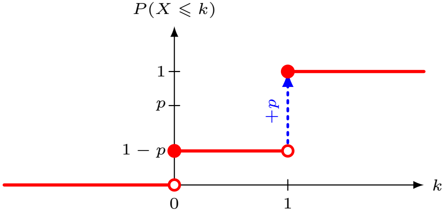


$$F_X(-1) = P(X \leqslant -1) = 0$$

$$F_X(0,3) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F_X(1,3) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Fonction de répartition F_X

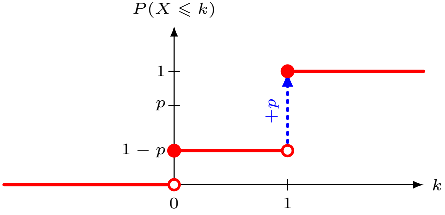


$$F_X(-1) = P(X \leqslant -1) = 0$$

$$F_X(0,3) = P(X \leqslant 0,3) = P(X = 0) = 1 - p$$

$$F_X(1,3) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Fonction de répartition F_X



$$F_X(-1) = P(X \leqslant -1) = 0$$

$$F_X(0,3) = P(X \leqslant 0,3) = P(X = 0) = 1 - p$$

$$F_X(1,3) = P(X \leqslant 1,3) = P(X = 0) + P(X = 1) = (1 - p) + p = 1$$

2. Loi binomiale

On répète successivement

2. Loi binomiale

On répète successivement n épreuves de Bernoulli **indépendantes**

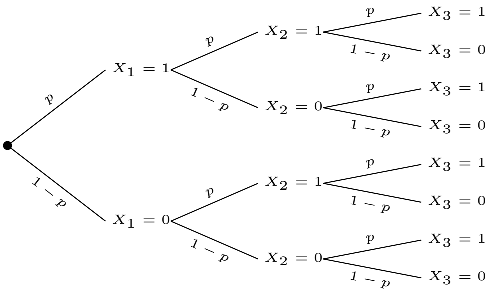
2. Loi binomiale

On répète successivement n épreuves de Bernoulli **indépendantes** où l'on note à chaque fois la réalisation ou pas d'un événement A,

2. Loi binomiale

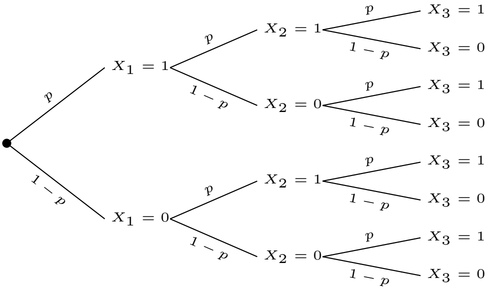
On répète successivement n épreuves de Bernoulli **indépendantes** où l'on note à chaque fois la réalisation ou pas d'un événement A, de probabilité $p = P(A)$. A chaque épreuve de Bernoulli, on associe la variable aléatoire X_i, et on pose $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

Pour $n = 3$ on a :



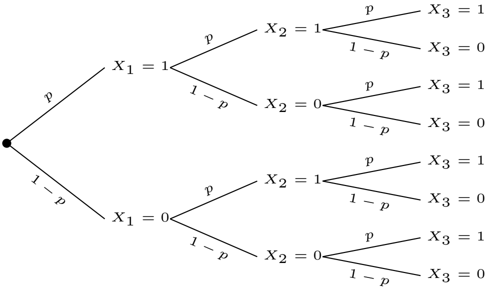
Probabilités des chemins	X
	3

Pour $n = 3$ on a :



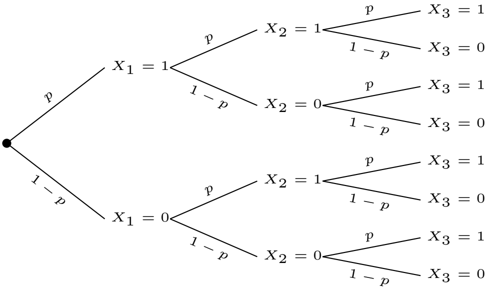
Probabilités des chemins	X
	3
	2

Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X
	3
	2
	2

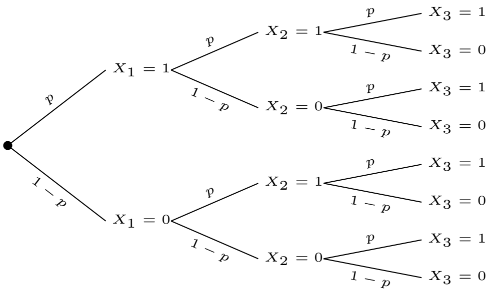
Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X
	3
	2
	2
	1

I. Les lois discrètes.

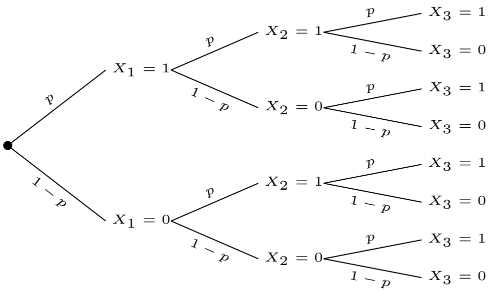
Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X
	3
	2
	2
	1
	2

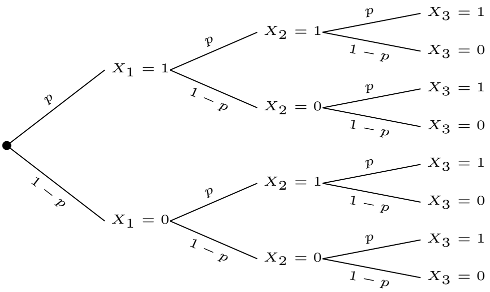
I. Les lois discrètes.

Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X
	3
	2
	2
	1
	2
	1

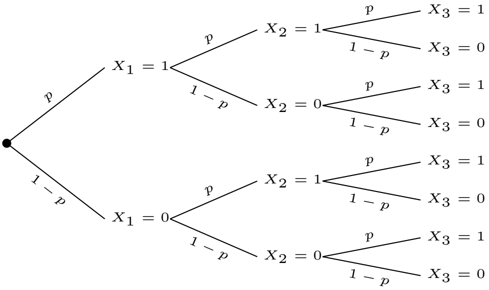
Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X
	3
	2
	2
	1
	2
	1
	1

I. Les lois discrètes.

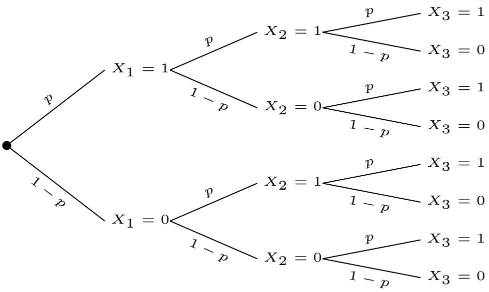
Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X
	3
	2
	2
	1
	2
	1
	1
	0

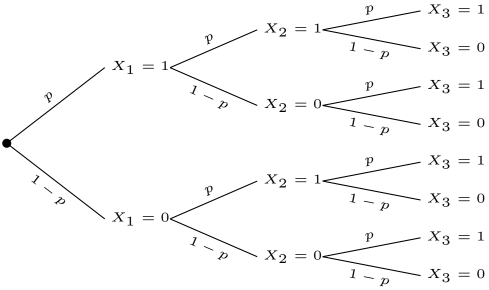
I. Les lois discrètes.

Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X
p^3	3
	2
	2
	1
	2
	1
	1
	0

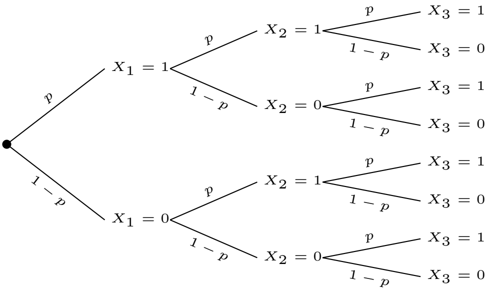
Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X
p^3	**3**
$p^2(1-p)$	**2**
	2
	1
	2
	1
	1
	0

I. Les lois discrètes.

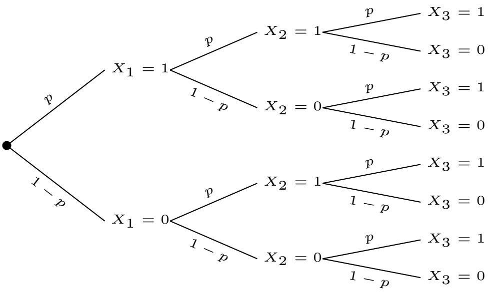
Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X
p^3	**3**
$p^2(1-p)$	**2**
$p^2(1-p)$	**2**
	1
	2
	1
	1
	0

I. Les lois discrètes.

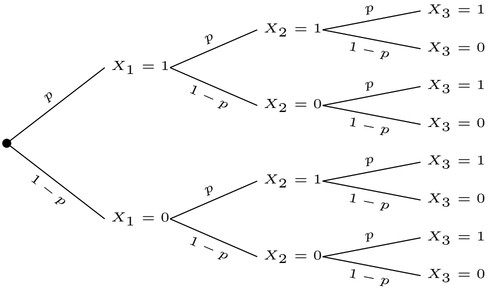
Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X
p^3	**3**
$p^2(1-p)$	**2**
$p^2(1-p)$	**2**
$p(1-p)^2$	**1**
	2
	1
	1
	0

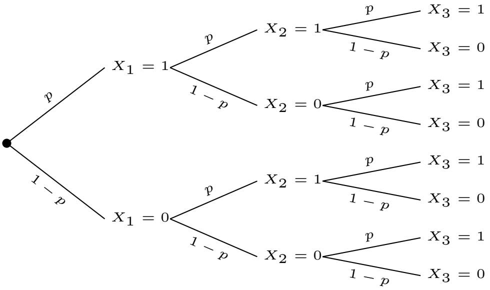
I. Les lois discrètes.

Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X
p^3	**3**
$p^2(1-p)$	**2**
$p^2(1-p)$	**2**
$p(1-p)^2$	**1**
$p^2(1-p)$	**2**
	1
	1
	0

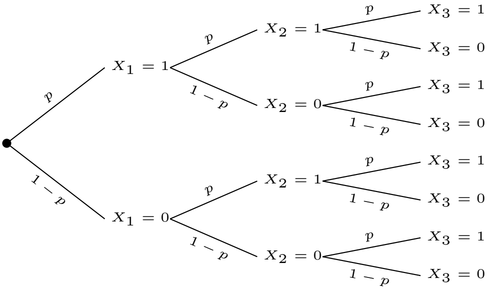
Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X
p^3	3
$p^2(1-p)$	2
$p^2(1-p)$	2
$p(1-p)^2$	1
$p^2(1-p)$	2
$p(1-p)^2$	1
	1
	0

I. Les lois discrètes.

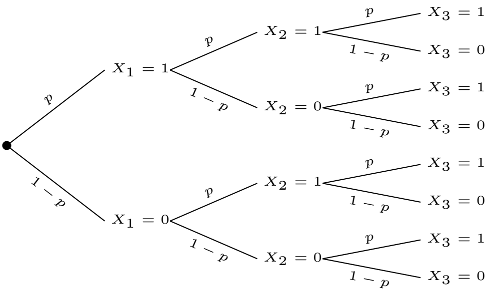
Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X
p^3	**3**
$p^2(1-p)$	**2**
$p^2(1-p)$	**2**
$p(1-p)^2$	**1**
$p^2(1-p)$	**2**
$p(1-p)^2$	**1**
$p(1-p)^2$	**1**
	0

I. Les lois discrètes.

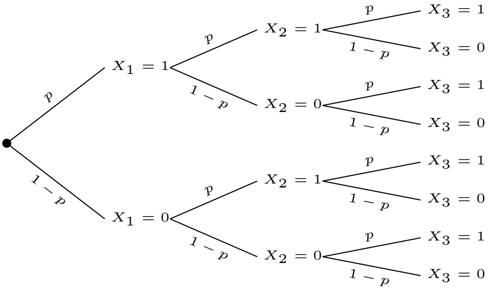
Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X
p^3	3
$p^2(1-p)$	2
$p^2(1-p)$	2
$p(1-p)^2$	1
$p^2(1-p)$	2
$p(1-p)^2$	1
$p(1-p)^2$	1
$(1-p)^3$	0

I. Les lois discrètes.

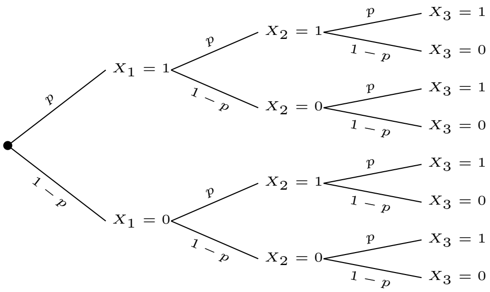
Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X
p^3	3
$p^2(1-p)$	2
$p^2(1-p)$	2
$p(1-p)^2$	1
$p^2(1-p)$	2
$p(1-p)^2$	1
$p(1-p)^2$	1
$(1-p)^3$	0

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$(1-p)^3$			

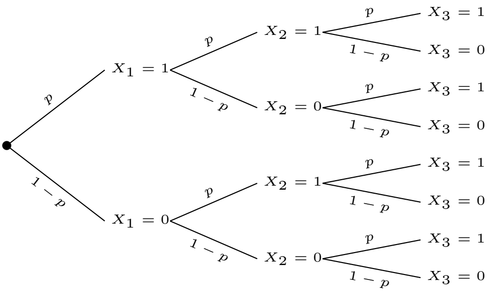
Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X
p^3	**3**
$p^2(1-p)$	**2**
$p^2(1-p)$	**2**
$p(1-p)^2$	**1**
$p^2(1-p)$	**2**
$p(1-p)^2$	**1**
$p(1-p)^2$	**1**
$(1-p)^3$	**0**

k	**0**	**1**	**2**	**3**
$P(X=k)$	$(1-p)^3$	$3 \times p(1-p)^2$		

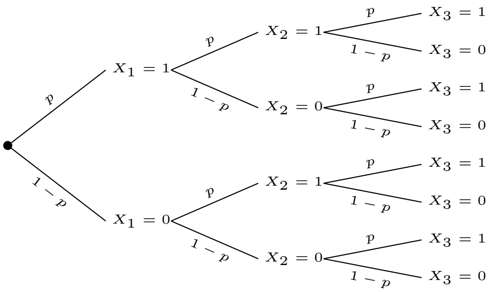
Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X
p^3	**3**
$p^2(1-p)$	**2**
$p^2(1-p)$	**2**
$p(1-p)^2$	**1**
$p^2(1-p)$	**2**
$p(1-p)^2$	**1**
$p(1-p)^2$	**1**
$(1-p)^3$	**0**

k	**0**	**1**	**2**	**3**
$P(X = k)$	$(1-p)^3$	$3 \times p(1-p)^2$	$3 \times p^2(1-p)$	

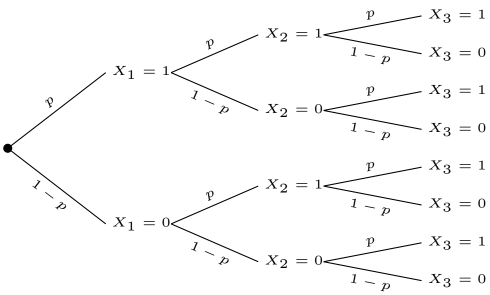
Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X
p^3	3
$p^2(1-p)$	2
$p^2(1-p)$	2
$p(1-p)^2$	1
$p^2(1-p)$	2
$p(1-p)^2$	1
$p(1-p)^2$	1
$(1-p)^3$	0

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$(1-p)^3$	$3 \times p(1-p)^2$	$3 \times p^2(1-p)$	p^3

Pour $n = 3$ on a :



Probabilités des chemins	X
p^3	**3**
$p^2(1-p)$	**2**
$p^2(1-p)$	**2**
$p(1-p)^2$	**1**
$p^2(1-p)$	**2**
$p(1-p)^2$	**1**
$p(1-p)^2$	**1**
$(1-p)^3$	**0**

k	**0**	**1**	**2**	**3**
$P(X = k)$	$(1-p)^3$	$3 \times p(1-p)^2$	$3 \times p^2(1-p)$	p^3

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:

$$P(X=k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\text{nb de façons de} \\ \text{réaliser } k \text{ évenements } A \\ \text{parmi } n \text{ épreuves.}}} \times p^k(1-p)^{n-k}$$

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$P(X = k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\text{nb de façons de} \\ \text{réaliser } k \text{ évenements } A \\ \text{parmi } n \text{ épreuves.}}} \times p^k (1-p)^{n-k}$$

$E(X) =$

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:

$$P(X=k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\text{nb de façons de} \\ \text{réaliser } k \text{ évenements } A \\ \text{parmi } n \text{ épreuves.}}} \times p^k(1-p)^{n-k}$$

$E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) =$

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$P(X = k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\text{nb de façons de} \\ \text{réaliser } k \text{ évenements } A \\ \text{parmi } n \text{ épreuves.}}} \times p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) =$$

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:

$$P(X=k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\text{nb de façons de} \\ \text{réaliser } k \text{ évenements } A \\ \text{parmi } n \text{ épreuves.}}} \times p^k(1-p)^{n-k}$$

$E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = p + p + \ldots + p = np$

$V(X) =$

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:

$$P(X=k) = \underbrace{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}_{\substack{\text{nb de façons de} \\ \text{réaliser } k \text{ évenements } A \\ \text{parmi } n \text{ épreuves.}}} \times p^k(1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = p + p + \ldots + p = np$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = npq$$

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:

$$P(X=k) = \underbrace{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}_{\substack{\text{nb de façons de} \\ \text{réaliser } k \text{ évenements } A \\ \text{parmi } n \text{ épreuves.}}} \times p^k(1-p)^{n-k}$$

$E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = p + p + \ldots + p = np$

$V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = npq$ car les X_i sont

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:

$$P(X=k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\text{nb de façons de} \\ \text{réaliser } k \text{ évenements } A \\ \text{parmi } n \text{ épreuves.}}} \times p^k(1-p)^{n-k}$$

$E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = p + p + \ldots + p = np$

$V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = npq$ car les X_i sont **indépendantes**. Donc $\sigma(X) =$

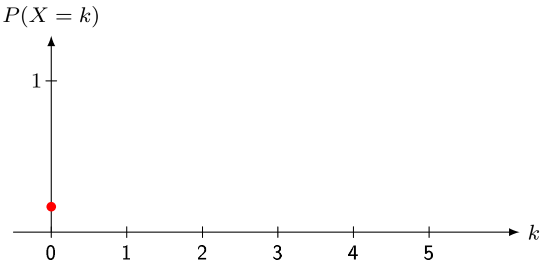
On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:

$$P(X=k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\text{nb de façons de} \\ \text{réaliser } k \text{ évenements } A \\ \text{parmi } n \text{ épreuves.}}} \times p^k(1-p)^{n-k}$$

$E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = p + p + \ldots + p = np$

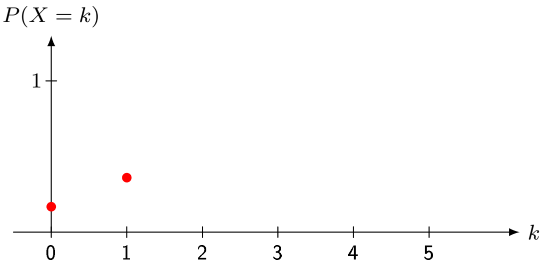
$V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = npq$ car les X_i sont **indépendantes**. Donc $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

Loi de X où $X \sim \mathcal{B}(5;\ 0,3)$



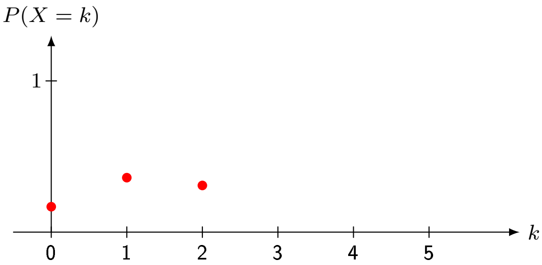
$P(X = 2) =$

Loi de X où $X \sim \mathcal{B}(5;\ 0,3)$



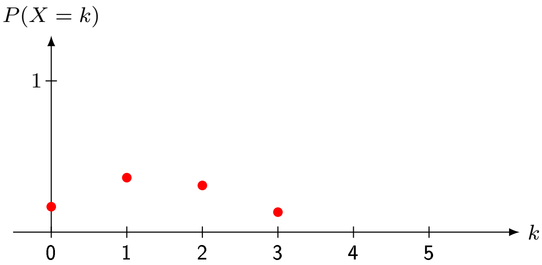
$P(X=2) =$

Loi de X où $X \sim \mathcal{B}(5;\ 0,3)$



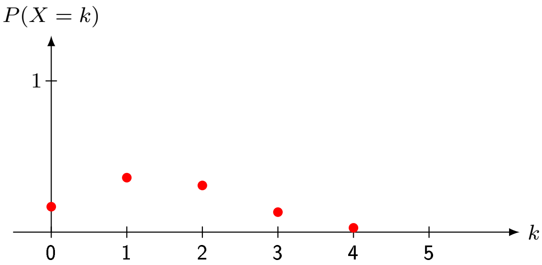
$P(X = 2) =$

Loi de X où $X \sim \mathcal{B}(5;\ 0,3)$



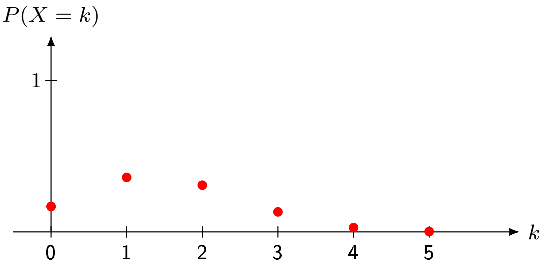
$P(X = 2) =$

Loi de X où $X \sim \mathcal{B}(5;\ 0,3)$



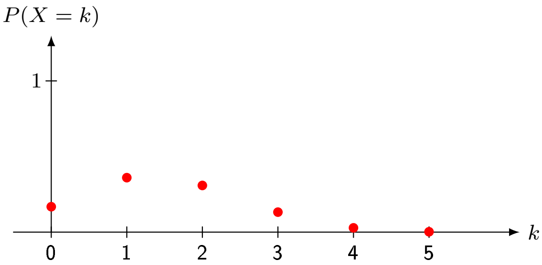
$P(X = 2) =$

Loi de X où $X \sim \mathcal{B}(5;\ 0,3)$

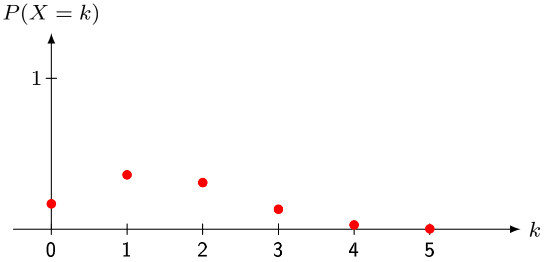


$P(X = 2) =$

Loi de X où $X \sim \mathcal{B}(5;\, 0,3)$

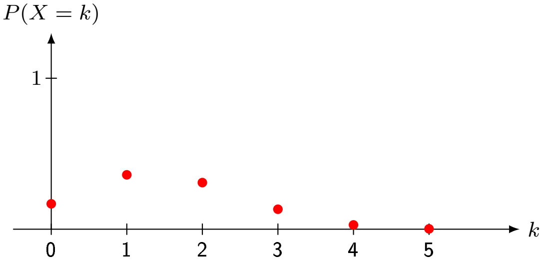


Loi de X où $X \sim \mathcal{B}(5;\ 0,3)$



$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0,3^2 \times 0,343 =$$

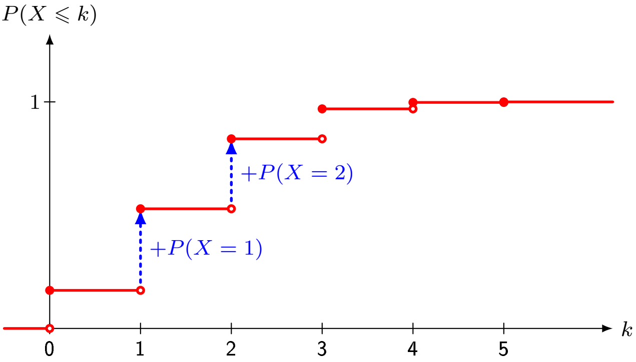
Loi de X où $X \sim \mathcal{B}(5;\, 0,3)$



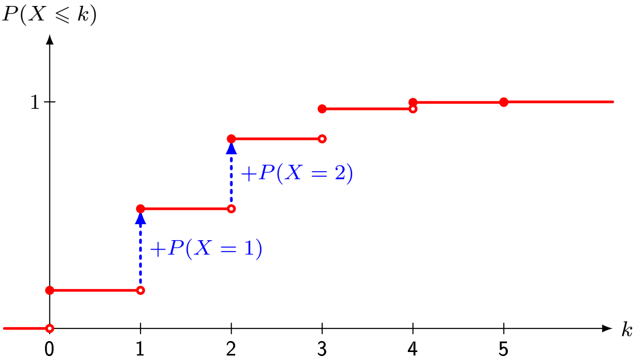
$$P(X=2) = \binom{5}{2} \times 0,3^2 \times 0,343 = \frac{5 \times 4}{2} \times 0,09 \times 0,7^3 = 0,3087$$

Fonction de répartition F_X

Fonction de répartition F_X

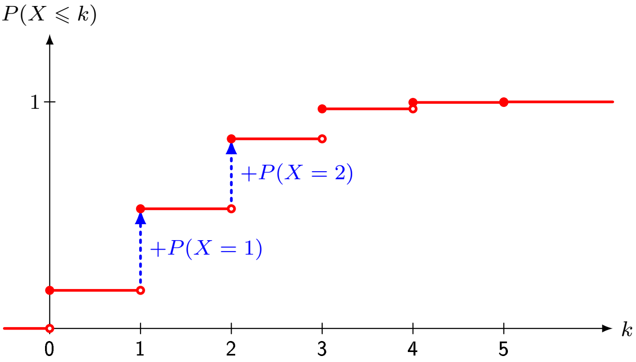


Fonction de répartition F_X



$F_X(2,7) =$

Fonction de répartition F_X



$$F_X(2,7) = P(X \leqslant 2,7) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

Exemple n° 1 : On considère une urne contenant 30 boules vertes et 10 boules rouges. On prélève 8 boules. Pour chacune d'elles, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'ôter la suivante. On dit effectuer un tirage de 8 boules **avec remise**

Exemple n° 1 : On considère une urne contenant 30 boules vertes et 10 boules rouges. On prélève 8 boules. Pour chacune d'elles, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'ôter la suivante. On dit effectuer un tirage de 8 boules **avec remise**. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées.

Exemple n° 1 : On considère une urne contenant 30 boules vertes et 10 boules rouges. On prélève 8 boules. Pour chacune d'elles, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'ôter la suivante. On dit effectuer un tirage de 8 boules **avec remise**. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées.

- Les tirages de chaque boules sont indépendants les uns des autres car :

Exemple n° 1 : On considère une urne contenant 30 boules vertes et 10 boules rouges. On prélève 8 boules. Pour chacune d'elles, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'ôter la suivante. On dit effectuer un tirage de 8 boules **avec remise**. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées.

- Les tirages de chaque boules sont indépendants les uns des autres car : **dans l'urne la proportion des boules vertes par rapport au rouges ne change pas.**

Exemple n° 1 : On considère une urne contenant 30 boules vertes et 10 boules rouges. On prélève 8 boules. Pour chacune d'elles, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'ôter la suivante. On dit effectuer un tirage de 8 boules **avec remise**. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées.

- Les tirages de chaque boules sont indépendants les uns des autres car : **dans l'urne la proportion des boules vertes par rapport au rouges ne change pas.**
- La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(8;\ \frac{30}{40}\right)$

Exemple n° 1 : On considère une urne contenant 30 boules vertes et 10 boules rouges. On prélève 8 boules. Pour chacune d'elles, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'ôter la suivante. On dit effectuer un tirage de 8 boules **avec remise**. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées.

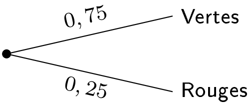
- Les tirages de chaque boules sont indépendants les uns des autres car : **dans l'urne la proportion des boules vertes par rapport au rouges ne change pas.**
- La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(8; \frac{30}{40}\right)$car l'expérience aléatoire consiste à répéter successivement de manière **indépendantes**

Exemple n° 1 : On considère une urne contenant 30 boules vertes et 10 boules rouges. On prélève 8 boules. Pour chacune d'elles, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'ôter la suivante. On dit effectuer un tirage de 8 boules **avec remise**. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées.

- Les tirages de chaque boules sont indépendants les uns des autres car : **dans l'urne la proportion des boules vertes par rapport au rouges ne change pas.**
- La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(8;\ \frac{30}{40}\right)$car l'expérience aléatoire consiste à répéter successivement de manière **indépendantes**l'épreuve de Bernoulli suivante :

Exemple n° 1 : On considère une urne contenant 30 boules vertes et 10 boules rouges. On prélève 8 boules. Pour chacune d'elles, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'ôter la suivante. On dit effectuer un tirage de 8 boules **avec remise**. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées.

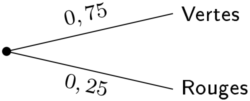
- Les tirages de chaque boules sont indépendants les uns des autres car : **dans l'urne la proportion des boules vertes par rapport au rouges ne change pas.**
- La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(8;\ \frac{30}{40}\right)$car l'expérience aléatoire consiste à répéter successivement de manière **indépendantes**l'épreuve de Bernoulli suivante :



I. Les lois discrètes.

Exemple n° 1 : On considère une urne contenant 30 boules vertes et 10 boules rouges. On prélève 8 boules. Pour chacune d'elles, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'ôter la suivante. On dit effectuer un tirage de 8 boules **avec remise**. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées.

- Les tirages de chaque boules sont indépendants les uns des autres car : **dans l'urne la proportion des boules vertes par rapport au rouges ne change pas.**
- La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(8; \frac{30}{40}\right)$car l'expérience aléatoire consiste à répéter successivement de manière **indépendantes**l'épreuve de Bernoulli suivante :

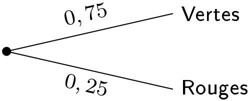


- $P(X = 3) =$

I. Les lois discrètes.

Exemple n° 1 : On considère une urne contenant 30 boules vertes et 10 boules rouges. On prélève 8 boules. Pour chacune d'elles, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'ôter la suivante. On dit effectuer un tirage de 8 boules **avec remise**. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées.

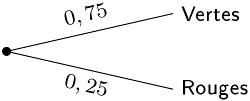
- Les tirages de chaque boules sont indépendants les uns des autres car : **dans l'urne la proportion des boules vertes par rapport au rouges ne change pas.**
- La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(8;\ \frac{30}{40}\right)$car l'expérience aléatoire consiste à répéter successivement de manière **indépendantes**l'épreuve de Bernoulli suivante :



- $P(X=3)=\binom{8}{3}\times 0,75^3\times 0,25^5=$

Exemple n° 1 : On considère une urne contenant 30 boules vertes et 10 boules rouges. On prélève 8 boules. Pour chacune d'elles, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'ôter la suivante. On dit effectuer un tirage de 8 boules **avec remise**. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées.

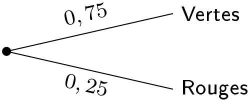
- Les tirages de chaque boules sont indépendants les uns des autres car : **dans l'urne la proportion des boules vertes par rapport au rouges ne change pas.**
- La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(8; \frac{30}{40}\right)$car l'expérience aléatoire consiste à répéter successivement de manière **indépendantes**l'épreuve de Bernoulli suivante :



- $P(X=3) = \binom{8}{3} \times 0,75^3 \times 0,25^5 = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} \times 0,75^3 \times 0,25^5$

Exemple n° 1 : On considère une urne contenant 30 boules vertes et 10 boules rouges. On prélève 8 boules. Pour chacune d'elles, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'ôter la suivante. On dit effectuer un tirage de 8 boules **avec remise**. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées.

- Les tirages de chaque boules sont indépendants les uns des autres car : **dans l'urne la proportion des boules vertes par rapport au rouges ne change pas.**
- La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(8;\ \frac{30}{40}\right)$car l'expérience aléatoire consiste à répéter successivement de manière **indépendantes**l'épreuve de Bernoulli suivante :

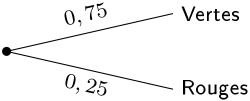


- $P(X=3) = \binom{8}{3} \times 0,75^3 \times 0,25^5 = \dfrac{8\times 7\times 6}{3\times 2} \times 0,75^3 \times 0,25^5 \simeq 0,0231$

I. Les lois discrètes.

Exemple n° 1 : On considère une urne contenant 30 boules vertes et 10 boules rouges. On prélève 8 boules. Pour chacune d'elles, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'ôter la suivante. On dit effectuer un tirage de 8 boules **avec remise**. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées.

- Les tirages de chaque boules sont indépendants les uns des autres car : **dans l'urne la proportion des boules vertes par rapport au rouges ne change pas.**
- La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(8;\ \frac{30}{40}\right)$car l'expérience aléatoire consiste à répéter successivement de manière **indépendantes**l'épreuve de Bernoulli suivante :

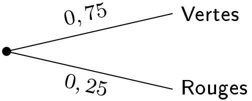


- $P(X=3)=\binom{8}{3}\times 0,75^3\times 0,25^5=\dfrac{8\times 7\times 6}{3\times 2}\times 0,75^3\times 0,25^5\simeq 0,0231$
- $E(X)=$

I. Les lois discrètes.

Exemple n° 1 : On considère une urne contenant 30 boules vertes et 10 boules rouges. On prélève 8 boules. Pour chacune d'elles, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'ôter la suivante. On dit effectuer un tirage de 8 boules **avec remise**. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées.

- Les tirages de chaque boules sont indépendants les uns des autres car : **dans l'urne la proportion des boules vertes par rapport au rouges ne change pas.**
- La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(8;\ \frac{30}{40}\right)$car l'expérience aléatoire consiste à répéter successivement de manière **indépendantes**l'épreuve de Bernoulli suivante :

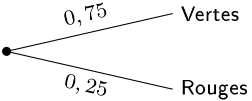


- $P(X=3)=\binom{8}{3}\times 0,75^3\times 0,25^5=\dfrac{8\times 7\times 6}{3\times 2}\times 0,75^3\times 0,25^5\simeq 0,0231$
- $E(X)=np=8\times 0,75=6$,

I. Les lois discrètes.

Exemple n° 1 : On considère une urne contenant 30 boules vertes et 10 boules rouges. On prélève 8 boules. Pour chacune d'elles, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'ôter la suivante. On dit effectuer un tirage de 8 boules **avec remise**. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées.

- Les tirages de chaque boules sont indépendants les uns des autres car : **dans l'urne la proportion des boules vertes par rapport au rouges ne change pas.**
- La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(8;\ \frac{30}{40}\right)$car l'expérience aléatoire consiste à répéter successivement de manière **indépendantes**l'épreuve de Bernoulli suivante :

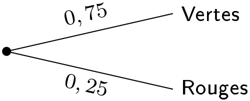


- $P(X = 3) = \binom{8}{3} \times 0,75^3 \times 0,25^5 = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} \times 0,75^3 \times 0,25^5 \simeq 0,0231$
- $E(X) = np = 8 \times 0,75 = 6$, $V(X) =$

I. Les lois discrètes.

Exemple n° 1 : On considère une urne contenant 30 boules vertes et 10 boules rouges. On prélève 8 boules. Pour chacune d'elles, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'ôter la suivante. On dit effectuer un tirage de 8 boules **avec remise**. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées.

- Les tirages de chaque boules sont indépendants les uns des autres car : **dans l'urne la proportion des boules vertes par rapport au rouges ne change pas.**
- La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(8;\ \frac{30}{40}\right)$car l'expérience aléatoire consiste à répéter successivement de manière **indépendantes**l'épreuve de Bernoulli suivante :

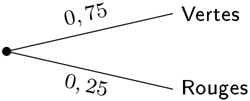


- $P(X=3) = \binom{8}{3} \times 0,75^3 \times 0,25^5 = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} \times 0,75^3 \times 0,25^5 \simeq 0,0231$
- $E(X) = np = 8 \times 0,75 = 6$, $V(X) = npq = 8 \times 0,75 \times 0,25 = 1,5$,

I. Les lois discrètes.

Exemple n° 1 : On considère une urne contenant 30 boules vertes et 10 boules rouges. On prélève 8 boules. Pour chacune d'elles, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'ôter la suivante. On dit effectuer un tirage de 8 boules **avec remise**. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées.

- Les tirages de chaque boules sont indépendants les uns des autres car : **dans l'urne la proportion des boules vertes par rapport au rouges ne change pas.**
- La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(8;\ \frac{30}{40}\right)$car l'expérience aléatoire consiste à répéter successivement de manière **indépendantes**l'épreuve de Bernoulli suivante :

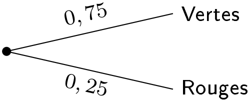


- $P(X = 3) = \binom{8}{3} \times 0,75^3 \times 0,25^5 = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} \times 0,75^3 \times 0,25^5 \simeq 0,0231$
- $E(X) = np = 8 \times 0,75 = 6$, $V(X) = npq = 8 \times 0,75 \times 0,25 = 1,5$, et $\sigma_X =$

I. Les lois discrètes.

Exemple n° 1 : On considère une urne contenant 30 boules vertes et 10 boules rouges. On prélève 8 boules. Pour chacune d'elles, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant d'ôter la suivante. On dit effectuer un tirage de 8 boules **avec remise**. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées.

- Les tirages de chaque boules sont indépendants les uns des autres car : **dans l'urne la proportion des boules vertes par rapport au rouges ne change pas.**
- La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(8;\ \frac{30}{40}\right)$car l'expérience aléatoire consiste à répéter successivement de manière **indépendantes**l'épreuve de Bernoulli suivante :



- $P(X=3) = \binom{8}{3} \times 0,75^3 \times 0,25^5 = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} \times 0,75^3 \times 0,25^5 \simeq 0,0231$
- $E(X) = np = 8 \times 0,75 = 6$, $V(X) = npq = 8 \times 0,75 \times 0,25 = 1,5$, et $\sigma_X = \sqrt{1,5} \simeq 1,225$

Tirage avec remise

Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules avec remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage.

- la proportion de boules blanches dans l'urne est $p = \dfrac{b}{N}$
- la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Tirage avec remise

Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules avec remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage.

- la proportion de boules blanches dans l'urne est $p = \frac{b}{N}$
- la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Remarque : Np est **le nombre de boules blanches contenue dans l'urne.**

Tirage avec remise

Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules avec remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage.

- la proportion de boules blanches dans l'urne est $p = \frac{b}{N}$
- la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Remarque : Np est **le nombre de boules blanches contenue dans l'urne.**

Exercice n° 1: Un avion peut accueillir 20 personnes. Des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : « nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20 » .

Tirage avec remise

Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules avec remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage.

- la proportion de boules blanches dans l'urne est $p = \frac{b}{N}$
- la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Remarque : Np est **le nombre de boules blanches contenue dans l'urne.**

Exercice n° 1: Un avion peut accueillir 20 personnes. Des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : « nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20 » .

1. Quelle est la loi de X ?

Tirage avec remise

Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules avec remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage.

- la proportion de boules blanches dans l'urne est $p = \dfrac{b}{N}$
- la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Remarque : Np est **le nombre de boules blanches contenue dans l'urne.**

Exercice n° 1: Un avion peut accueillir 20 personnes. Des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : « nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20 » .

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est son espérance, son écart-type ?

Tirage avec remise

Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules avec remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage.

- la proportion de boules blanches dans l'urne est $p = \frac{b}{N}$
- la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Remarque : Np est **le nombre de boules blanches contenue dans l'urne.**

Exercice nº 1: Un avion peut accueillir 20 personnes. Des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : « nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20 » .

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est son espérance, son écart-type ?
3. Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

3. Loi hypergéométrique

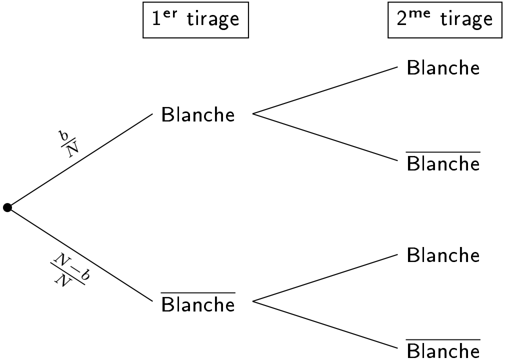
Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules de l'urne, mais cette fois-ci, sans remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage.

3. Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules de l'urne, mais cette fois-ci, sans remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage. On n'est plus dans une répétition d'une même épreuve de Bernoulli :

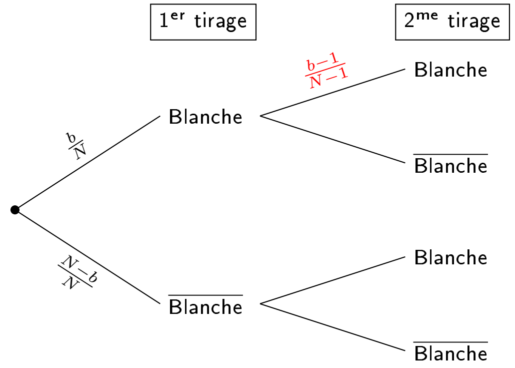
3. Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules de l'urne, mais cette fois-ci, sans remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage. On n'est plus dans une répétition d'une même épreuve de Bernoulli :



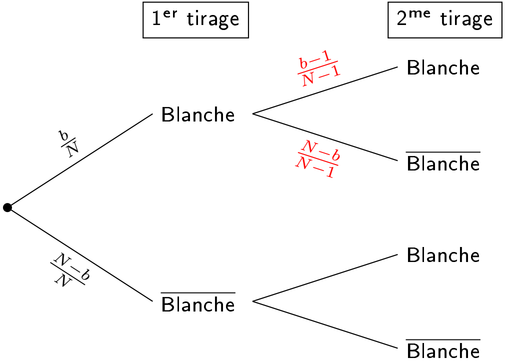
3. Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules de l'urne, mais cette fois-ci, sans remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage. On n'est plus dans une répétition d'une même épreuve de Bernoulli :



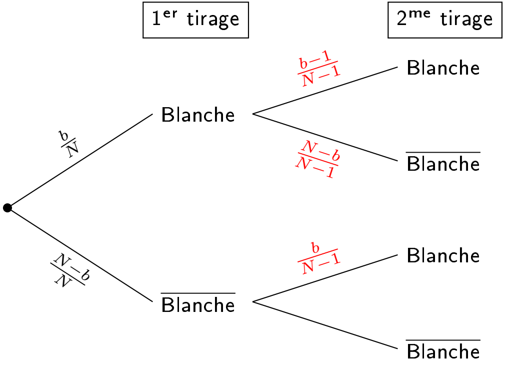
3. Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules de l'urne, mais cette fois-ci, sans remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage. On n'est plus dans une répétition d'une même épreuve de Bernoulli :



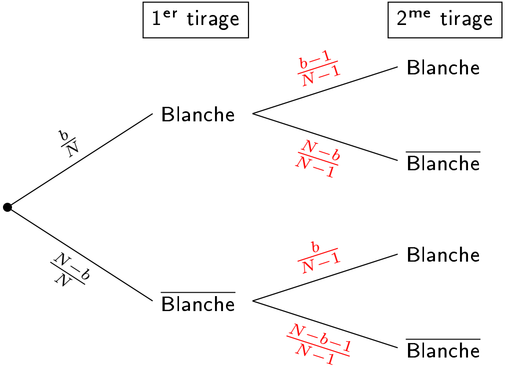
3. Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules de l'urne, mais cette fois-ci, sans remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage. On n'est plus dans une répétition d'une même épreuve de Bernoulli :



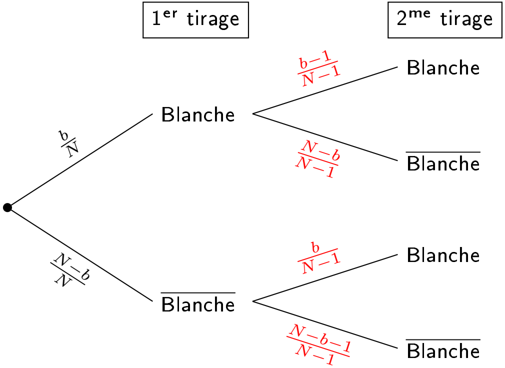
3. Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules de l'urne, mais cette fois-ci, sans remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage. On n'est plus dans une répétition d'une même épreuve de Bernoulli :



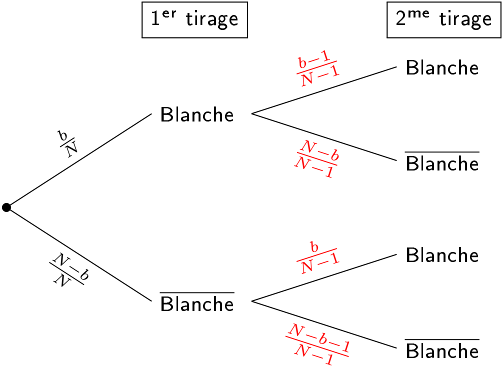
3. Loi hypergéométrique

Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules de l'urne, mais cette fois-ci, sans remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage. On n'est plus dans une répétition d'une même épreuve de Bernoulli :



Les tirages successifs sont ici dépendants puisque la composition de l'urne est différente après chaque tirage.

I. Les lois discrètes.



Notons X le nombre de boule blanches tirées. On démontre que $P(X=k)=\dfrac{\binom{b}{k}\times\binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

Tirage sans remise

Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules **sans** remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage.

- La proportion initiale de boules blanches dans l'urne est $p = \frac{b}{N}$, et $q = 1 - p$ est la proportion initiale des boules qui ne sont pas blanches.
- La variable aléatoire X suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, N, p)$.
- $E(X) = np$ et $Var(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$.

Tirage sans remise

Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules **sans** remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage.

- La proportion initiale de boules blanches dans l'urne est $p = \frac{b}{N}$, et $q = 1 - p$ est la proportion initiale des boules qui ne sont pas blanches.
- La variable aléatoire X suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, N, p)$.
- $E(X) = np$ et $Var(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$.

Exercice n° 2: On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses. On note X le nombre d'ampoules défectueuses.

Tirage sans remise

Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules **sans** remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage.

- La proportion initiale de boules blanches dans l'urne est $p = \frac{b}{N}$, et $q = 1 - p$ est la proportion initiale des boules qui ne sont pas blanches.
- La variable aléatoire X suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, N, p)$.
- $E(X) = np$ et $Var(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$.

Exercice n° 2: On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses. On note X le nombre d'ampoules défectueuses.

1. Calcule la probabilité des événements suivants
   - A : « exactement une ampoule est défectueuse » .
   - B : « au moins une ampoule est défectueuse » ;
   - C : « les 3 ampoules sont défectueuses » ;

Tirage sans remise

Une urne contient N boules dont b boules blanches. On tire n boules **sans** remise, et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches dans ce tirage.

- La proportion initiale de boules blanches dans l'urne est $p = \frac{b}{N}$, et $q = 1 - p$ est la proportion initiale des boules qui ne sont pas blanches.
- La variable aléatoire X suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, N, p)$.
- $E(X) = np$ et $Var(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$.

Exercice n° 2: On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses. On note X le nombre d'ampoules défectueuses.

1. Calcule la probabilité des événements suivants
   - A : « exactement une ampoule est défectueuse » .
   - B : « au moins une ampoule est défectueuse » ;
   - C : « les 3 ampoules sont défectueuses » ;
2. Calcule l'espérance puis l'écart-type de X.

Définition:

Une fonction de **densité** ou de distribution de probabilité est une fonction réelle f qui satisfait aux deux conditions suivantes :

$$f \text{ est positive et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Définition:

Une fonction de **densité** ou de distribution de probabilité est une fonction réelle f qui satisfait aux deux conditions suivantes :

$$f \text{ est positive et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Définition:

On dit qu'une variable aléatoire X a pour densité ou **distribution** de probabilité la fonction f, si pour tous nombres réels a et b tels que $a \leqslant b$:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

On dit alors que la variable aléatoire X est **continue**.

Définition:

Une fonction de **densité** ou de distribution de probabilité est une fonction réelle f qui satisfait aux deux conditions suivantes :

$$f \text{ est positive et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Définition:

On dit qu'une variable aléatoire X a pour densité ou **distribution** de probabilité la fonction f, si pour tous nombres réels a et b tels que $a \leqslant b$:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

On dit alors que la variable aléatoire X est **continue**.

Définition:

L'**espérance** d'une variable aléatoire continue X, notée $E(X)$ est $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$

1. Loi exponentielle.

Définition:

Soit λ un nombre réel **strictement positif.** On dit qu'un variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si sa densité de probabilité est :

1. Loi exponentielle.

Définition:

Soit λ un nombre réel **strictement positif.** On dit qu'un variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si sa densité de probabilité est :

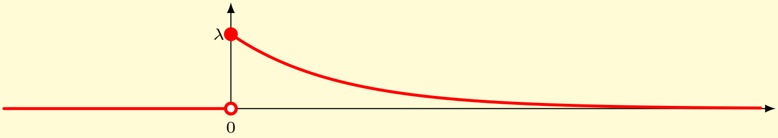
$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Loi exponentielle.

Définition:

Soit λ un nombre réel **strictement positif.** On dit qu'un variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



On calcule l'espérance en intégrant par parties :

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) =$$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x =$$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

On calcule de même en intégrant par parties :

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

On calcule de même en intégrant par parties :

$$E(X^2) =$$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

On calcule de même en intégrant par parties :

$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x =$$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

On calcule de même en intégrant par parties :

$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x =$$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

On calcule de même en intégrant par parties :

$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda}E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

On calcule de même en intégrant par parties :

$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda}E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

D'où $V(X) =$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X)=\lambda\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}$$

On calcule de même en intégrant par parties :

$$E(X^2)=\lambda\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\left[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\lambda}E(X)=\frac{2}{\lambda^2}$$

D'où $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

On calcule de même en intégrant par parties :

$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda}E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

D'où $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda^2} =$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

On calcule de même en intégrant par parties :

$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda}E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

D'où $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

On calcule de même en intégrant par parties :

$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda}E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

D'où $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Théorème

Si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Pour $x \geqslant 0$, la fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x) =$$

Pour $x \geqslant 0$, la fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt =$$

Pour $x \geqslant 0$, la fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

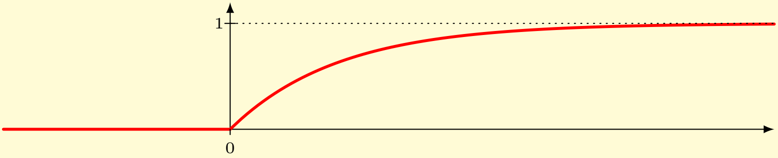
Pour $x \geqslant 0$, la fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Théorème

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Exemple n° 2 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

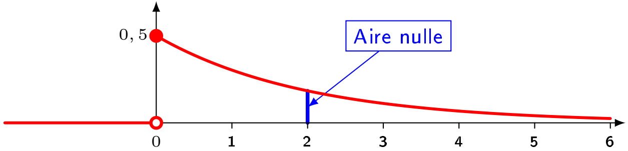
- $P(T = 2) =$

Exemple n° 2 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

- $P(T=2) = \int_2^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = 0$

Exemple n° 2 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

- $P(T=2) = \int_2^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = 0$



Exemple n° 3 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

- $P(T \leqslant 2) =$

Exemple n° 3 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

- $P(T \leqslant 2) = \int_{-\infty}^{2} 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x =$

Exemple n° 3 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

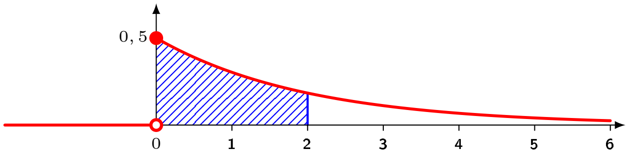
- $P(T \leqslant 2) = \int_{-\infty}^{2} 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = F_T(2) = 1 - \mathrm{e}^{-0,5\times 2} =$

Exemple n° 3 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

- $P(T \leqslant 2) = \int_{-\infty}^{2} 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = F_T(2) = 1 - \mathrm{e}^{-0,5\times 2} = 1 - \mathrm{e}^{-1} \simeq 0,632$

Exemple n° 3 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

- $P(T \leqslant 2) = \int_{-\infty}^{2} 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = F_T(2) = 1 - \mathrm{e}^{-0,5\times 2} = 1 - \mathrm{e}^{-1} \simeq 0,632$



Exemple n° 4 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

- $P(2 \leqslant T \leqslant 4) =$

Exemple n° 4 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

- $P(2 \leqslant T \leqslant 4) = \int_2^4 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x =$

Exemple n° 4 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

- $P(2 \leqslant T \leqslant 4) = \int_2^4 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = F_T(4) - F_T(2) =$

Exemple n° 4 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

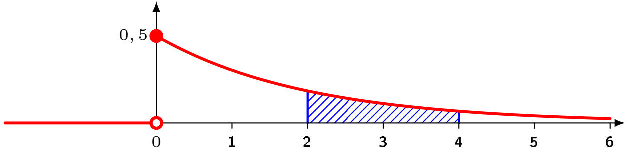
- $P(2 \leqslant T \leqslant 4) = \int_2^4 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = F_T(4) - F_T(2) = 1 - \mathrm{e}^{-2} - \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) =$

Exemple n° 4 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

- $P(2 \leqslant T \leqslant 4) = \int_2^4 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = F_T(4) - F_T(2) = 1 - \mathrm{e}^{-2} - \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} \simeq 0,233$

Exemple n° 4 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

- $P(2 \leqslant T \leqslant 4) = \int_2^4 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = F_T(4) - F_T(2) = 1 - \mathrm{e}^{-2} - \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} \simeq 0,233$



Exemple n° 5 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

- $P(T \geqslant 2) =$

Exemple n° 5 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

- $P(T \geqslant 2) = \int_2^{+\infty} 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x =$

Exemple n° 5 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

- $P(T \geqslant 2) = \int_2^{+\infty} 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = 1 - F_T(2) =$

Exemple n° 5 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

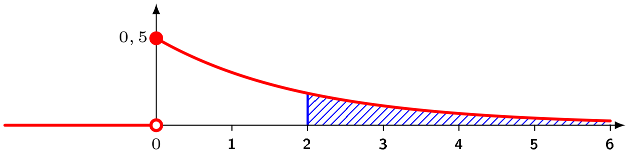
- $P(T \geqslant 2) = \displaystyle\int_2^{+\infty} 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = 1 - F_T(2) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) =$

Exemple n° 5 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

- $P(T \geqslant 2) = \displaystyle\int_2^{+\infty} 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = 1 - F_T(2) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1} \simeq 0,368$

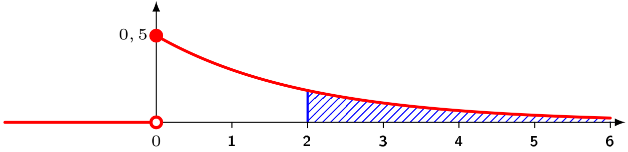
Exemple n° 5 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

- $P(T \geqslant 2) = \int_2^{+\infty} 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = 1 - F_T(2) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1} \simeq 0,368$



Exemple n° 5 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

- $P(T \geqslant 2) = \int_2^{+\infty} 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = 1 - F_T(2) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1} \simeq 0,368$



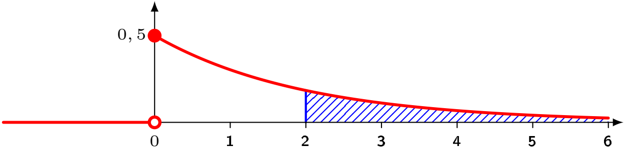
Théorème

La loi exponentielle est l'unique loi continue **sans mémoire** : Si X suit une loi exponentielle :

pour tout $t > 0$ et tout $h > 0$, $P_{(X\geqslant t)}(X \geqslant t+s) = P(X \geqslant s)$

Exemple n° 5 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

- $P(T \geqslant 2) = \int_2^{+\infty} 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = 1 - F_T(2) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1} \simeq 0,368$



Théorème

La loi exponentielle est l'unique loi continue **sans mémoire** : Si X suit une loi exponentielle :

$$\text{pour tout } t > 0 \text{ et tout } h > 0,\ P_{(X \geqslant t)}(X \geqslant t + s) = P(X \geqslant s)$$

Remarque : Si la durée de votre survie, en années, suivait une loi exponentielle, alors, que vous ayez vécu $t = 4$ ans ou $t = 80$ ans, votre probabilité de vivre encore $s = 20$ ans est la même.

Exercice n° 3: La durée de vie, T, d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

Exercice n° 3: La durée de vie, T, d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

1. Quelle est la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années ?

Exercice n° 3: La durée de vie, T, d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

1. Quelle est la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années ? $P(T \geqslant 2) = \mathrm{e}^{-0,2\times 2} = \mathrm{e}^{-0,4} \simeq 0,630$

Exercice n° 3: La durée de vie, T, d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

1. Quelle est la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années ? $P(T \geqslant 2) = \mathrm{e}^{-0,2\times 2} = \mathrm{e}^{-0,4} \simeq 0,630$
2. A quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?

Exercice n° 3: La durée de vie, T, d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

1. Quelle est la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années ? $P(T \geqslant 2) = \mathrm{e}^{-0,2\times 2} = \mathrm{e}^{-0,4} \simeq 0,630$

2. A quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?

   $$P(T \leqslant t) = 0,5 \iff 1 - \mathrm{e}^{-0,2t} = 0,5 \iff t = \frac{\ln(2)}{0,2} \simeq 3,466$$

   $0,46$ année durent $0,46 \times 12 = 5,52$ mois. L'instant t cherché est 3 ans et 5 mois à un mois près.

Exercice n° 3: La durée de vie, T, d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

1. Quelle est la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années ? $P(T \geqslant 2) = \mathrm{e}^{-0,2\times 2} = \mathrm{e}^{-0,4} \simeq 0,630$
2. A quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?

   $$P(T \leqslant t) = 0,5 \iff 1 - \mathrm{e}^{-0,2t} = 0,5 \iff t = \frac{\ln(2)}{0,2} \simeq 3,466$$

   $0,46$ année durent $0,46 \times 12 = 5,52$ mois. L'instant t cherché est 3 ans et 5 mois à un mois près.
3. Quelle est la durée de vie moyenne d'un robot ?

Exercice n° 3: La durée de vie, T, d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

1. Quelle est la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années ? $P(T \geqslant 2) = \mathrm{e}^{-0,2\times 2} = \mathrm{e}^{-0,4} \simeq 0,630$

2. A quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?

   $$P(T \leqslant t) = 0,5 \iff 1 - \mathrm{e}^{-0,2t} = 0,5 \iff t = \frac{\ln(2)}{0,2} \simeq 3,466$$

   $0,46$ année durent $0,46 \times 12 = 5,52$ mois. L'instant t cherché est 3 ans et 5 mois à un mois près.

3. Quelle est la durée de vie moyenne d'un robot ?

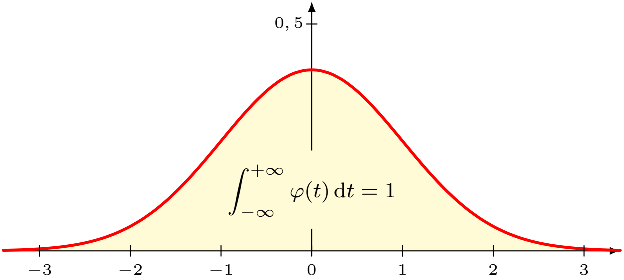
   $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = 5$ ans.

2. La loi normale centrée réduite.

Définition:

On appelle densité de probabilité de **Laplace-Gauss**, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

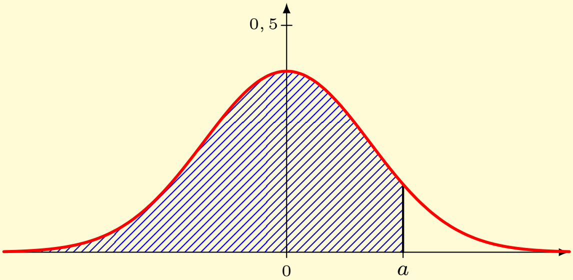


- La fonction φ est paire ;
- son maximum est atteint en 0 ;
- La courbe $\mathcal{C}_\varphi$ est appelée courbe en cloche ou **courbe de Gauss**.

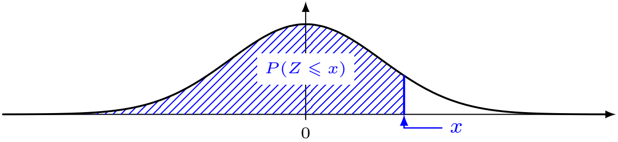
Définition:

On dit que la variable aléatoire Z suit une loi normale **centrée réduite**, notée $\mathcal{N}(0,1)$ si sa densité de probabilité est égale à la fonction φ. Sa fonction de répartition, notée Φ, est définie par :

$$\Phi(a) = P(Z \leqslant a) = \int_{-\infty}^{a} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$



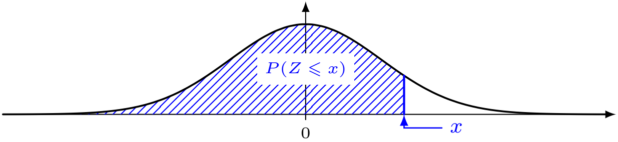
Utilisation de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	**0,07**	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	**0,8980**	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162

$$P(Z \leqslant 1,27) \simeq$$

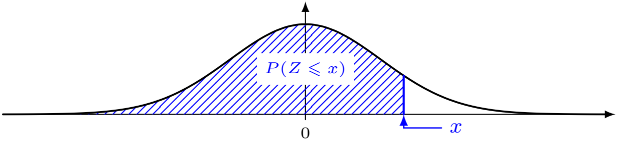
Utilisation de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	**0,07**	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	**0,8980**	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162

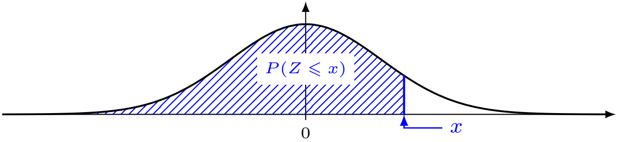
$$P(Z \leqslant 1,27) \simeq \mathbf{0,8980}$$

Utilisation de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :



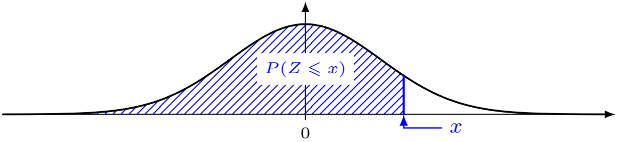
$P(Z \leqslant 1,27) \simeq$ **0, 8980** $\qquad P(Z \leqslant 0,23) \simeq$

Utilisation de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :



$P(Z \leqslant 1,27) \simeq$ $\mathbf{0,8980}$ $\quad P(Z \leqslant 0,23) \simeq$ $\mathbf{0,5910}$ $\quad P(Z \leqslant 0,09) \simeq$

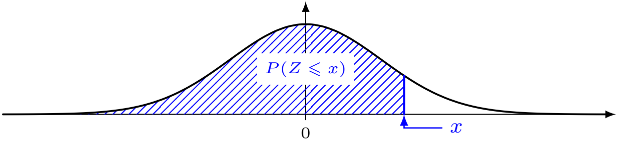
Utilisation de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :



$P(Z \leqslant 1,27) \simeq$ **0,8980** $P(Z \leqslant 0,23) \simeq$ **0,5910** $P(Z \leqslant 0,09) \simeq$ **0,5359**

$P(Z \leqslant 1,5) \simeq$

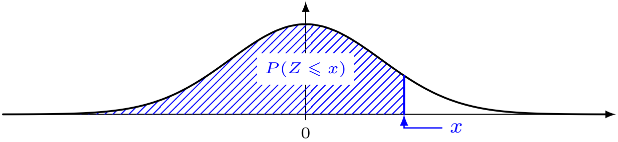
Utilisation de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :



$P(Z \leqslant 1,27) \simeq$ **0,8980** $\quad P(Z \leqslant 0,23) \simeq$ **0,5910** $\quad P(Z \leqslant 0,09) \simeq$ **0,5359**

$P(Z \leqslant 1,5) \simeq$ **0,9332** $\quad P(Z < 1,5) \simeq$

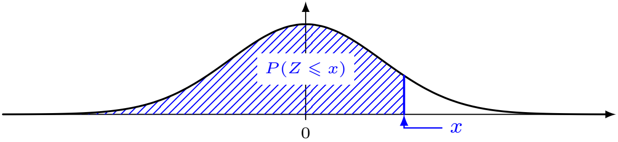
Utilisation de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :



$P(Z \leqslant 1,27) \simeq$ **0,8980** $\quad P(Z \leqslant 0,23) \simeq$ **0,5910** $\quad P(Z \leqslant 0,09) \simeq$ **0,5359**

$P(Z \leqslant 1,5) \simeq$ **0,9332** $\quad P(Z < 1,5) \simeq$ **0,9332** $\quad P(Z \geqslant 1,5) \simeq$

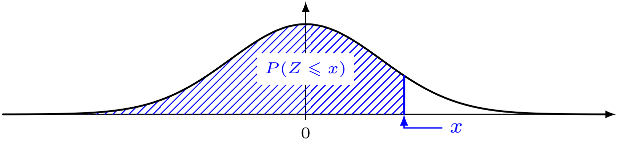
Utilisation de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :



$P(Z \leqslant 1,27) \simeq$ **0,8980** $P(Z \leqslant 0,23) \simeq$ **0,5910** $P(Z \leqslant 0,09) \simeq$ **0,5359**

$P(Z \leqslant 1,5) \simeq$ **0,9332** $P(Z < 1,5) \simeq$ **0,9332** $P(Z \geqslant 1,5) \simeq$ **1 − 0,9332 =**

Utilisation de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :



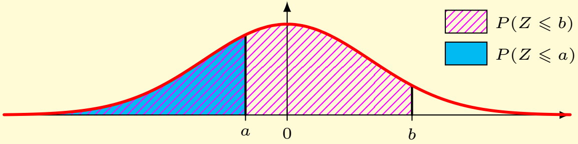
$P(Z \leqslant 1,27) \simeq$ $\mathbf{0,8980}$ $\quad P(Z \leqslant 0,23) \simeq$ $\mathbf{0,5910}$ $\quad P(Z \leqslant 0,09) \simeq$ $\mathbf{0,5359}$

$P(Z \leqslant 1,5) \simeq$ $\mathbf{0,9332}$ $\quad P(Z < 1,5) \simeq$ $\mathbf{0,9332}$ $\quad P(Z \geqslant 1,5) \simeq$ $\mathbf{1 - 0,9332 = 0,0668}$

Théorème

Si une variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite alors pour tout réels a et b, $a < b$ on a :

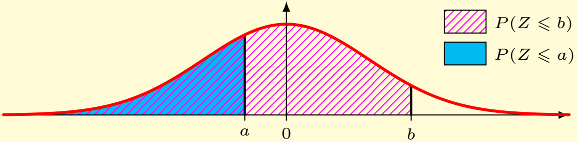
1. $P(a \leqslant Z \leqslant b) = P(Z \leqslant b) - P(Z \leqslant a)$;



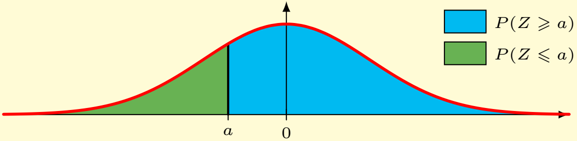
Théorème

Si une variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite alors pour tout réels a et b, $a < b$ on a :

1. $P(a \leqslant Z \leqslant b) = P(Z \leqslant b) - P(Z \leqslant a)$;



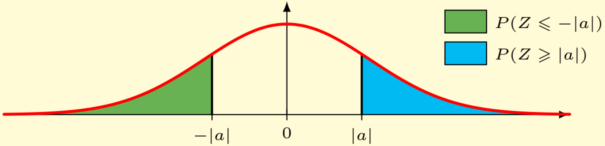
2. $P(Z \geqslant a) = 1 - P(Z \leqslant a)$;



Théorème

Si une variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite alors pour tout réels a et b, $a < b$ on a :

3. $P(Z \leqslant -|a|) = 1 - P(Z \leqslant |a|)$



Exemple n° 6 : Z suit une loi normale centrée réduite.

1. $P(Z \geqslant 1,27)$

Exemple n° 6 : Z suit une loi normale centrée réduite.

1. $P(Z \geqslant 1,27) \underset{ii.}{=} 1 - P(Z \leqslant 1,27) = 1 - \Phi(1,27) \simeq 1 - 0,8980 = 0,102$

Exemple n° 6 : Z suit une loi normale centrée réduite.

1. $P(Z \geqslant 1,27) \underset{ii.}{=} 1 - P(Z \leqslant 1,27) = 1 - \Phi(1,27) \simeq 1 - 0,8980 = 0,102$

2. $P(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$

Exemple n° 6 : Z suit une loi normale centrée réduite.

1. $P(Z \geqslant 1,27) \underset{ii.}{=} 1 - P(Z \leqslant 1,27) = 1 - \Phi(1,27) \simeq 1 - 0,8980 = 0,102$

2. $P(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$

   $\underset{i.}{=} P(Z \leqslant 1) - P(Z \leqslant -1)$

Exemple n° 6 : Z suit une loi normale centrée réduite.

1. $P(Z \geqslant 1,27) \underset{ii.}{=} 1 - P(Z \leqslant 1,27) = 1 - \Phi(1,27) \simeq 1 - 0,8980 = 0,102$

2. $P(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$

   $\underset{i.}{=} P(Z \leqslant 1) - P(Z \leqslant -1)$

   $\underset{iii.}{=} P(Z \leqslant 1) - \big(1 - P(Z \leqslant 1)\big)$

Exemple n° 6 : Z suit une loi normale centrée réduite.

1. $P(Z \geqslant 1,27) \underset{ii.}{=} 1 - P(Z \leqslant 1,27) = 1 - \Phi(1,27) \simeq 1 - 0,8980 = 0,102$

2. $P(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$

$$\underset{i.}{=} P(Z \leqslant 1) - P(Z \leqslant -1)$$

$$\underset{iii.}{=} P(Z \leqslant 1) - \big(1 - P(Z \leqslant 1)\big)$$

$$= 2P(Z \leqslant 1) - 1$$

Exemple n° 6 : Z suit une loi normale centrée réduite.

1. $P(Z \geqslant 1,27) \underset{ii.}{=} 1 - P(Z \leqslant 1,27) = 1 - \Phi(1,27) \simeq 1 - 0,8980 = 0,102$

2. $P(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$

$$\underset{i.}{=} P(Z \leqslant 1) - P(Z \leqslant -1)$$

$$\underset{iii.}{=} P(Z \leqslant 1) - \big(1 - P(Z \leqslant 1)\big)$$

$$= 2P(Z \leqslant 1) - 1$$

$$\simeq 2 \times 0,8413 - 1 = 0,6826$$

3. $P(Z \geqslant -0,74)$

Exemple n° 6 : Z suit une loi normale centrée réduite.

1. $P(Z \geqslant 1,27) \underset{ii.}{=} 1 - P(Z \leqslant 1,27) = 1 - \Phi(1,27) \simeq 1 - 0,8980 = 0,102$

2. $P(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$

   $\underset{i.}{=} P(Z \leqslant 1) - P(Z \leqslant -1)$

   $\underset{iii.}{=} P(Z \leqslant 1) - \big(1 - P(Z \leqslant 1)\big)$

   $= 2P(Z \leqslant 1) - 1$

   $\simeq 2 \times 0,8413 - 1 = 0,6826$

3. $P(Z \geqslant -0,74) \underset{ii.}{=} 1 - P(Z \leqslant -0,74) \underset{iii.}{=}$

Exemple n° 6 : Z suit une loi normale centrée réduite.

1. $P(Z \geqslant 1,27) \underset{ii.}{=} 1 - P(Z \leqslant 1,27) = 1 - \Phi(1,27) \simeq 1 - 0,8980 = 0,102$

2. $P(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$

$$\underset{i.}{=} P(Z \leqslant 1) - P(Z \leqslant -1)$$

$$\underset{iii.}{=} P(Z \leqslant 1) - \big(1 - P(Z \leqslant 1)\big)$$

$$= 2P(Z \leqslant 1) - 1$$

$$\simeq 2 \times 0,8413 - 1 = 0,6826$$

3. $P(Z \geqslant -0,74) \underset{ii.}{=} 1 - P(Z \leqslant -0,74) \underset{iii.}{=} 1 - \big(1 - P(Z \leqslant 0,74)\big) =$

Exemple n° 6 : Z suit une loi normale centrée réduite.

1. $P(Z \geqslant 1,27) \underset{ii.}{=} 1 - P(Z \leqslant 1,27) = 1 - \Phi(1,27) \simeq 1 - 0,8980 = 0,102$

2. $P(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$

$$\underset{i.}{=} P(Z \leqslant 1) - P(Z \leqslant -1)$$

$$\underset{iii.}{=} P(Z \leqslant 1) - \big(1 - P(Z \leqslant 1)\big)$$

$$= 2P(Z \leqslant 1) - 1$$

$$\simeq 2 \times 0,8413 - 1 = 0,6826$$

3. $P(Z \geqslant -0,74) \underset{ii.}{=} 1 - P(Z \leqslant -0,74) \underset{iii.}{=} 1 - \big(1 - P(Z \leqslant 0,74)\big) = P(Z \leqslant 0,74) \simeq 0,7704$

Exemple n° 6 : Z suit une loi normale centrée réduite.

1. $P(Z \geqslant 1,27) \underset{ii.}{=} 1 - P(Z \leqslant 1,27) = 1 - \Phi(1,27) \simeq 1 - 0,8980 = 0,102$

2. $P(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$

$$\underset{i.}{=} P(Z \leqslant 1) - P(Z \leqslant -1)$$

$$\underset{iii.}{=} P(Z \leqslant 1) - \big(1 - P(Z \leqslant 1)\big)$$

$$= 2P(Z \leqslant 1) - 1$$

$$\simeq 2 \times 0,8413 - 1 = 0,6826$$

3. $P(Z \geqslant -0,74) \underset{ii.}{=} 1 - P(Z \leqslant -0,74) \underset{iii.}{=} 1 - \big(1 - P(Z \leqslant 0,74)\big) = P(Z \leqslant 0,74) \simeq 0,7704$

4. $P(Z = 0,85) =$

Exemple n° 6 : Z suit une loi normale centrée réduite.

1. $P(Z \geqslant 1,27) \underset{ii.}{=} 1 - P(Z \leqslant 1,27) = 1 - \Phi(1,27) \simeq 1 - 0,8980 = 0,102$

2. $P(-1 \leqslant Z \leqslant 1)$

$$\underset{i.}{=} P(Z \leqslant 1) - P(Z \leqslant -1)$$

$$\underset{iii.}{=} P(Z \leqslant 1) - \big(1 - P(Z \leqslant 1)\big)$$

$$= 2P(Z \leqslant 1) - 1$$

$$\simeq 2 \times 0,8413 - 1 = 0,6826$$

3. $P(Z \geqslant -0,74) \underset{ii.}{=} 1 - P(Z \leqslant -0,74) \underset{iii.}{=} 1 - \big(1 - P(Z \leqslant 0,74)\big) = P(Z \leqslant 0,74) \simeq 0,7704$

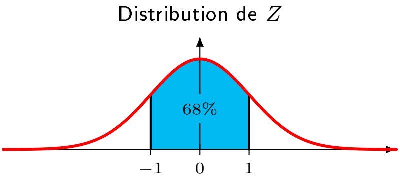
4. $P(Z = 0,85) = 0$

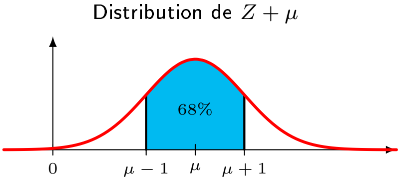
3. La loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

3. La loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

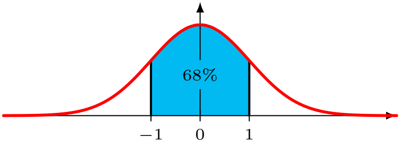




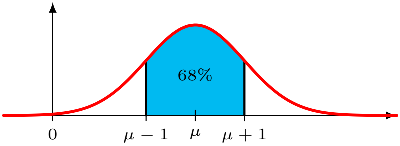
3. La loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

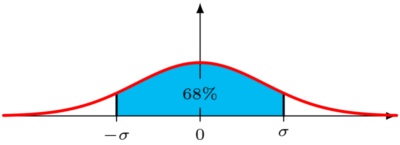
Distribution de Z



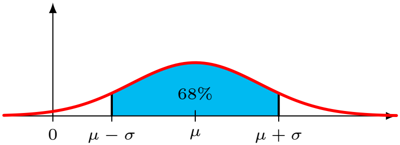
Distribution de $Z + \mu$



Distribution de $Z \times \sigma$



Distribution de $Z \times \sigma + \mu$



II. Les lois continues.

Théorème

Soient Z une variable aléatoire normale centrée et réduite, et σ un nombre réel strictement positif. La variable aléatoire $X = Z \times \sigma + \mu$ suit la loi de densité (distribution) :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Son espérance $E(X) = \mu$ et son écart-type $\sigma_X = \sigma$.

Définition:

Carl Friedrich Gauss

Etant donné un nombre réel σ strictement positif et un réel μ.

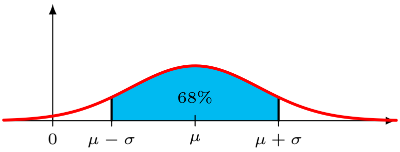
La **loi normale** de centre μ et d'écart-type σ, notée $\mathcal{N}(\mu,\, \sigma)$ est la loi dont la densité de probabilité est

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0\,;\, +\infty] \\ & t & \longmapsto & \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\left(\dfrac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \end{array}$$

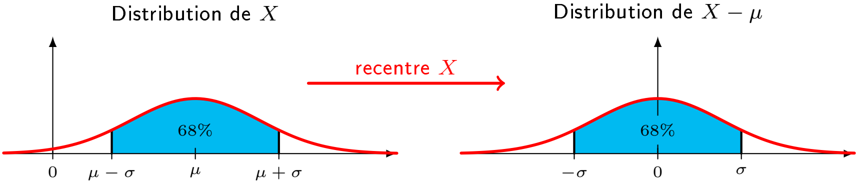
Etant donné une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$:

Etant donné une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$:

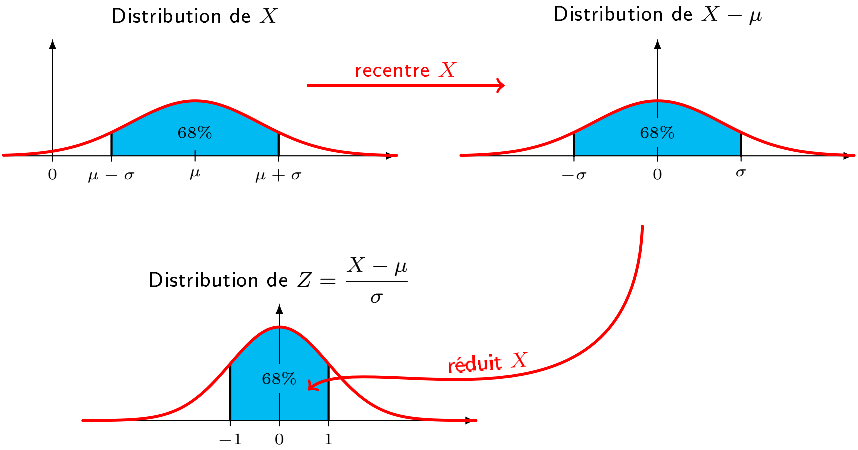
Distribution de X



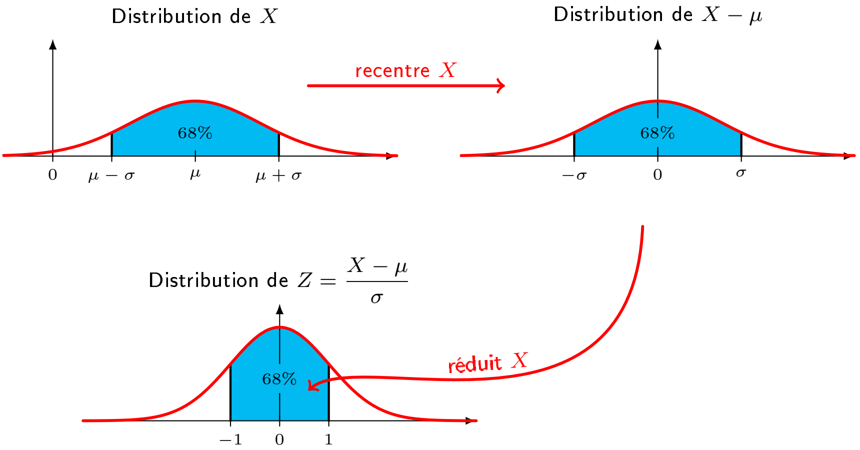
Etant donné une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$:



Etant donné une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$:



Etant donné une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$:



Théorème

Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.

Exemple n° 7 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(5,\, 2)$.

Exemple n° 7 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(5,\, 2)$.

$P(X \leqslant 8) =$

Exemple n° 7 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(5,\, 2)$.

$$P(X \leqslant 8) = P\left(\frac{X-5}{2} \leqslant \frac{8-5}{2}\right) =$$

Exemple n° 7 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(5,\ 2)$.

$$P(X \leqslant 8) = P\left(\frac{X-5}{2} \leqslant \frac{8-5}{2}\right) = P(Z \leqslant 1,5) =$$

Exemple n° 7 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(5,\ 2)$.

$$P(X \leqslant 8) = P\left(\frac{X-5}{2} \leqslant \frac{8-5}{2}\right) = P(Z \leqslant 1,5) = \Phi(1,5) \simeq 0,9332 \text{ **où** } Z \sim \mathcal{N}(0,\ 1).$$

Exemple n° 7 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(5,\ 2)$.

$$P(X \leqslant 8) = P\left(\frac{X-5}{2} \leqslant \frac{8-5}{2}\right) = P(Z \leqslant 1,5) = \Phi(1,5) \simeq 0,9332 \textbf{ où } Z \sim \mathcal{N}(0,\ 1).$$

Théorème

Si les variables aléatoires X_1 et X_2 suivent des lois normales indépendantes alors :

- $X_1 + X_2$ suit une loi normale ;
- pour tout réel a, la variable aléatoire aX_1 suit une loi normale.

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2,\ \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5,\ 1)$, et X et Y sont indépendantes.

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2,\, \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5,\, 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X + Y$:

   - $E\big(X + Y\big) =$

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2, \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5, 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X + Y$:

   - $E(X+Y) = E(X) + E(Y) =$

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2, \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5, 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X + Y$:

   - $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 5 = 7$

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2,\ \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5,\ 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X+Y$:

   - $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2+5 = 7$
   - $V(X+Y) =$

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2, \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5, 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X + Y$:

   - $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 5 = 7$
   - $V(X+Y) =$
     $V(X) + V(Y) =$

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2,\ \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5,\ 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X + Y$:

   - $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 5 = 7$
   - $V(X+Y) =$
     $V(X) + V(Y) = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2, \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5, 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X + Y$:

   - $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 5 = 7$
   - $V(X+Y) =$
     $V(X) + V(Y) = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$

     car X et Y sont

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2, \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5, 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X + Y$:

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 5 = 7$
- $V(X+Y) =$
  $V(X) + V(Y) = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$

  car X et Y sont **indépendantes**
- $\sigma_{X+Y} =$

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2, \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5, 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X + Y$:

   - $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 5 = 7$
   - $V(X+Y) =$
     $V(X) + V(Y) = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$

     car X et Y sont **indépendantes**
   - $\sigma_{X+Y} = \sqrt{4} = 2$

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2, \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5, 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X + Y$:

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 5 = 7$
- $V(X+Y) =$
  $V(X) + V(Y) = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$

  car X et Y sont **indépendantes**
- $\sigma_{X+Y} = \sqrt{4} = 2$
- $(X+Y)$ suit une loi normale

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2,\,\sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5,\,1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X+Y$:

- $E(X+Y) = E(X)+E(Y) = 2+5 = 7$
- $V(X+Y) =$
  $V(X)+V(Y) = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$

  car X et Y sont **indépendantes**
- $\sigma_{X+Y} = \sqrt{4} = 2$
- $(X+Y)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(7,\,2)$

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2, \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5, 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X+Y$:

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 5 = 7$
- $V(X+Y) =$
  $V(X) + V(Y) = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$

  car X et Y sont **indépendantes**
- $\sigma_{X+Y} = \sqrt{4} = 2$
- $(X+Y)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(7, 2)$

  car X et Y sont

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2, \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5, 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X+Y$:

   - $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2+5 = 7$
   - $V(X+Y) =$
     $V(X) + V(Y) = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$

     car X et Y sont **indépendantes**
   - $\sigma_{X+Y} = \sqrt{4} = 2$
   - $(X+Y)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(7, 2)$

     car X et Y sont **indépendantes**

2. La loi de $2X - 3Y$:

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2,\ \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5,\ 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X + Y$:

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 5 = 7$
- $V(X+Y) =$
  $V(X) + V(Y) = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$

  car X et Y sont **indépendantes**
- $\sigma_{X+Y} = \sqrt{4} = 2$
- $(X+Y)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(7,\ 2)$

  car X et Y sont **indépendantes**

2. La loi de $2X - 3Y$:

- $E(2X - 3Y) =$

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2, \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5, 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X + Y$:

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 5 = 7$
- $V(X+Y) =$
  $V(X) + V(Y) = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$

  car X et Y sont **indépendantes**
- $\sigma_{X+Y} = \sqrt{4} = 2$
- $(X+Y)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(7, 2)$

  car X et Y sont **indépendantes**

2. La loi de $2X - 3Y$:

- $E(2X-3Y) = E(2X) + E(-Y) =$

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2,\ \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5,\ 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X+Y$:

   - $E(X+Y) = E(X)+E(Y) = 2+5 = 7$
   - $V(X+Y) =$
     $V(X)+V(Y) = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$

     car X et Y sont **indépendantes**
   - $\sigma_{X+Y} = \sqrt{4} = 2$
   - $(X+Y)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(7,\ 2)$

     car X et Y sont **indépendantes**

2. La loi de $2X-3Y$:

   - $E(2X-3Y) = E(2X)+E(-Y) = 2\times 2 + (-3)\times 5 = -11$

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2,\, \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5,\, 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X+Y$:

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2+5 = 7$
- $V(X+Y) =$
  $V(X) + V(Y) = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$

  car X et Y sont **indépendantes**
- $\sigma_{X+Y} = \sqrt{4} = 2$
- $(X+Y)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(7,\, 2)$

  car X et Y sont **indépendantes**

2. La loi de $2X - 3Y$:

- $E(2X-3Y) = E(2X) + E(-Y) = 2 \times 2 + (-3) \times 5 = -11$
- $V(2X-3Y) =$

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2,\ \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5,\ 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X + Y$:

   - $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 5 = 7$
   - $V(X+Y) =$
     $V(X) + V(Y) = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$

     car X et Y sont **indépendantes**
   - $\sigma_{X+Y} = \sqrt{4} = 2$
   - $(X+Y)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(7,\ 2)$

     car X et Y sont **indépendantes**

2. La loi de $2X - 3Y$:

   - $E(2X - 3Y) = E(2X) + E(-Y) = 2 \times 2 + (-3) \times 5 = -11$
   - $V(2X - 3Y) = (2^2)V(X) + (-3)^2 V(Y) =$

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2,\ \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5,\ 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X+Y$:

   - $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2+5 = 7$
   - $V(X+Y) = V(X) + V(Y) = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$

     car X et Y sont **indépendantes**
   - $\sigma_{X+Y} = \sqrt{4} = 2$
   - $(X+Y)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(7,\ 2)$

     car X et Y sont **indépendantes**

2. La loi de $2X-3Y$:

   - $E(2X-3Y) = E(2X) + E(-Y) = 2\times 2 + (-3)\times 5 = -11$
   - $V(2X-3Y) = (2^2)V(X) + (-3)^2 V(Y) = 4\times 3 + 9\times 1 = 21$ car X et Y sont **indépendantes**

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2, \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5, 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X+Y$:

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 5 = 7$
- $V(X+Y) =$
  $V(X) + V(Y) = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$

  car X et Y sont **indépendantes**
- $\sigma_{X+Y} = \sqrt{4} = 2$
- $(X+Y)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(7, 2)$

  car X et Y sont **indépendantes**

2. La loi de $2X - 3Y$:

- $E(2X - 3Y) = E(2X) + E(-Y) = 2 \times 2 + (-3) \times 5 = -11$
- $V(2X - 3Y) = (2^2)V(X) + (-3)^2V(Y) = 4 \times 3 + 9 \times 1 = 21$ car X et Y sont **indépendantes**
- $\sigma_{2X-3Y} =$

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2,\ \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5,\ 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X+Y$:

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2+5 = 7$
- $V(X+Y) =$
  $V(X) + V(Y) = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$

  car X et Y sont **indépendantes**

- $\sigma_{X+Y} = \sqrt{4} = 2$
- $(X+Y)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(7,\ 2)$

  car X et Y sont **indépendantes**

2. La loi de $2X-3Y$:

- $E(2X-3Y) = E(2X) + E(-Y) = 2 \times 2 + (-3) \times 5 = -11$
- $V(2X-3Y) = (2^2)V(X) + (-3)^2 V(Y) = 4 \times 3 + 9 \times 1 = 21$ car X et Y sont **indépendantes**
- $\sigma_{2X-3Y} = \sqrt{21}$
- $(2X-3Y)$ suit une loi normale

Exemple n° 8 : X suit une loi normale $\mathcal{N}(2,\, \sqrt{3})$, Y suit une loi normale $\mathcal{N}(5,\, 1)$, et X et Y sont indépendantes.

1. La loi de $X + Y$:

   - $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 5 = 7$
   - $V(X+Y) =$
     $V(X) + V(Y) = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$

     car X et Y sont **indépendantes**
   - $\sigma_{X+Y} = \sqrt{4} = 2$
   - $(X+Y)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(7,\, 2)$

     car X et Y sont **indépendantes**

2. La loi de $2X - 3Y$:

   - $E(2X - 3Y) = E(2X) + E(-Y) = 2 \times 2 + (-3) \times 5 = -11$
   - $V(2X - 3Y) = (2^2)V(X) + (-3)^2 V(Y) = 4 \times 3 + 9 \times 1 = 21$ car X et Y sont **indépendantes**
   - $\sigma_{2X-3Y} = \sqrt{21}$
   - $(2X - 3Y)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(-11,\, \sqrt{21})$ car X et Y sont **indépendantes**

4. Loi du χ^2

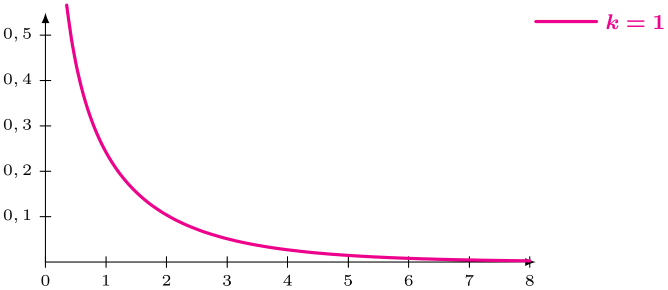
Définition:

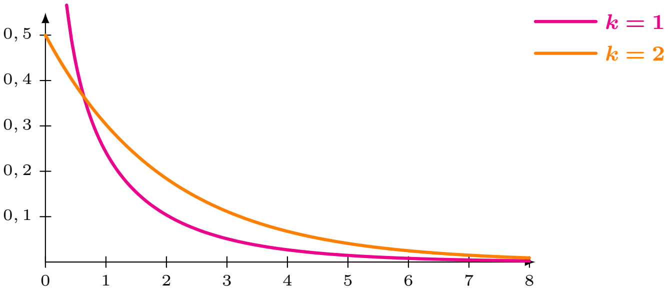
Soient k variables aléatoires indépendantes X_i suivant une loi normale d'espérance μ_i et écart-type σ_i. Par définition la variable aléatoire

$$Y = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$$

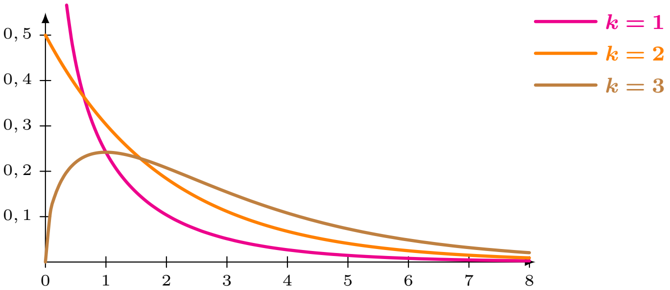
suit une loi du χ^2 à k degrés de liberté.

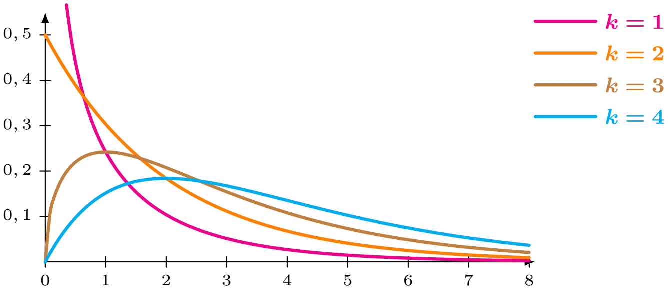
II. Les lois continues.





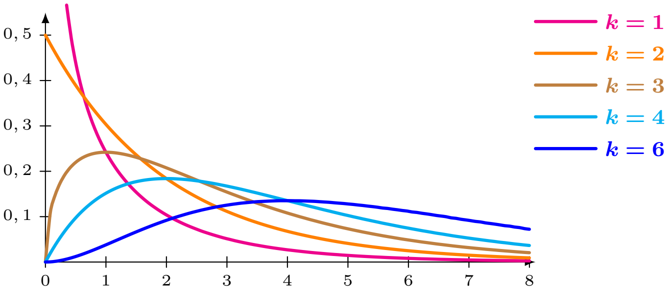
$k = 1$
$k = 2$
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

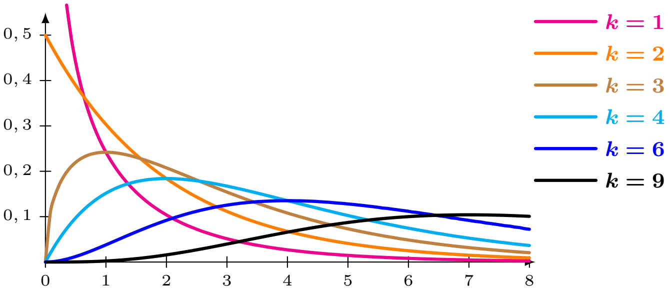

0, 5
0, 4
0, 3
0, 2
0, 1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
$k = 1$
$k = 2$
$k = 3$

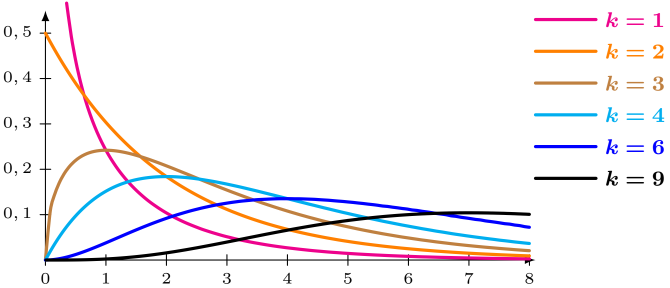


0, 5
0, 4
0, 3
0, 2
0, 1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
$k = 1$
$k = 2$
$k = 3$
$k = 4$

II. Les lois continues.




0, 5
0, 4
0, 3
0, 2
0, 1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
$k = 1$
$k = 2$
$k = 3$
$k = 4$
$k = 6$
$k = 9$



En pratique, lorsque $k \geqslant 100$, on approche la loi du χ^2 à k degré de liberté par la loi normale $\mathcal{N}\left(k,\ \sqrt{2k}\right)$.

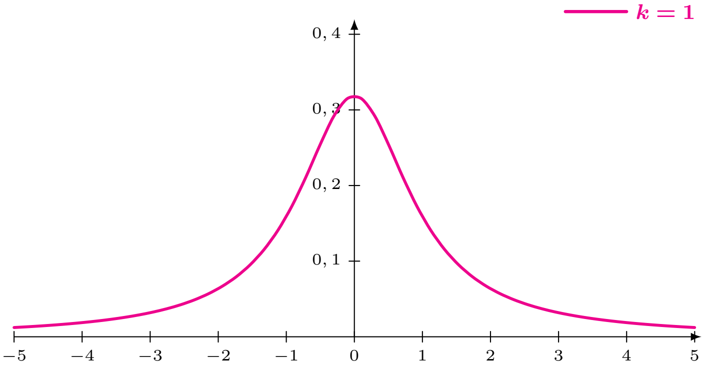
5. Loi de Student

Définition:

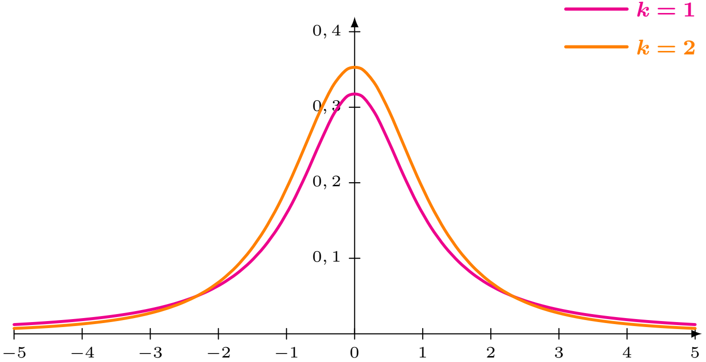
Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite et soit U une variable indépendante de Z et distribuée suivant la loi du χ^2 à k degrés de liberté. Par définition la variable

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/k}}$$

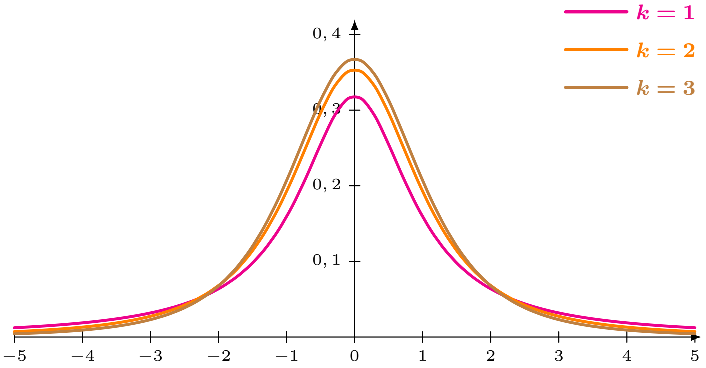
suit une loi de Student à k degrés de liberté.



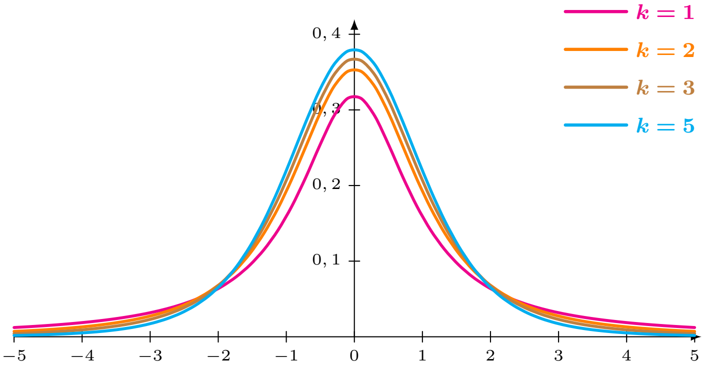
$k = 1$
0, 4
0, 3
0, 2
0, 1
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5

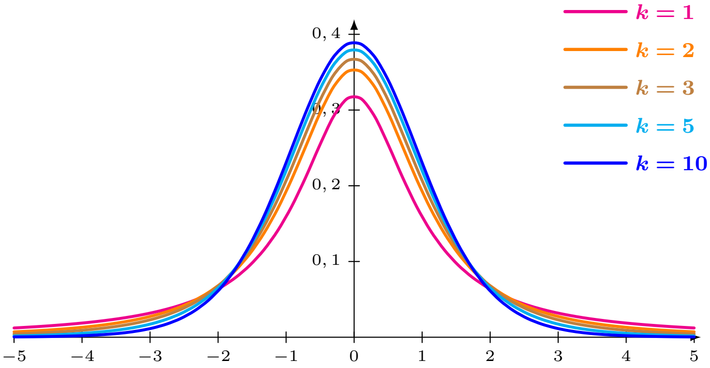


$k = 1$
$k = 2$
0, 4
0, 3
0, 2
0, 1
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5

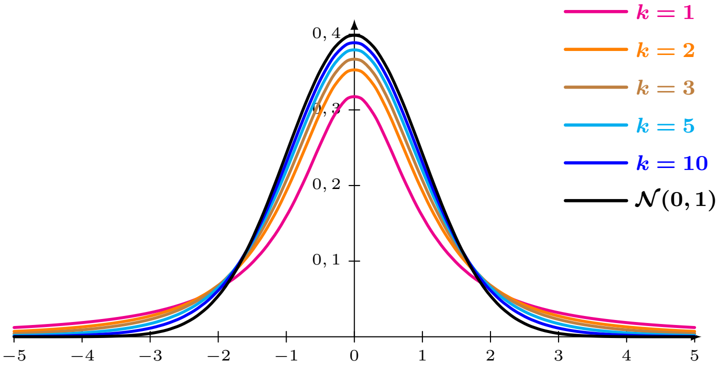

$k = 1$
$k = 2$
$k = 3$
$0,4$
$0,3$
$0,2$
$0,1$
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

II. Les lois continues.

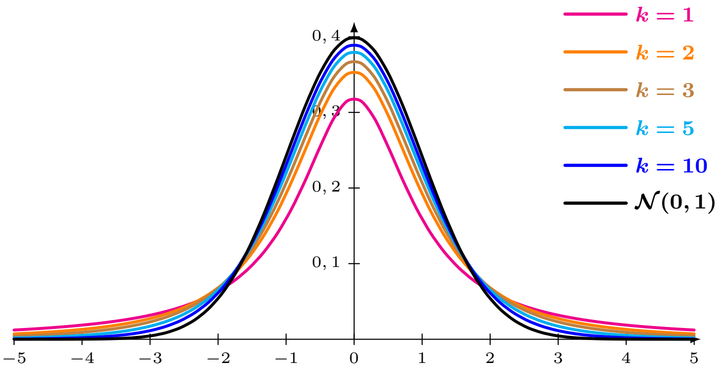




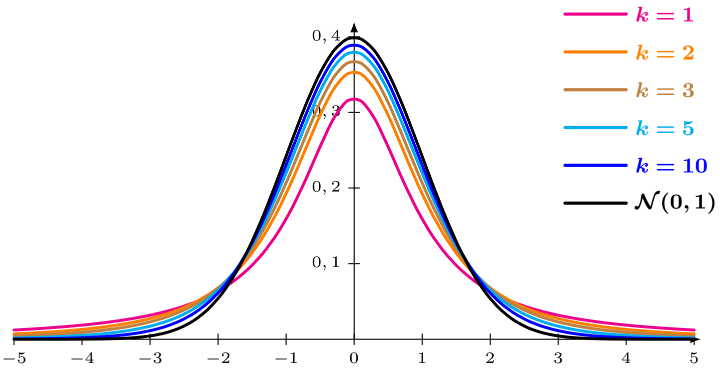
0, 4
0, 3
0, 2
0, 1
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
k = 1
k = 2
k = 3
k = 5
k = 10



0, 4
0, 3
0, 2
0, 1
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
k = 1
k = 2
k = 3
k = 5
k = 10
𝒩(0, 1)

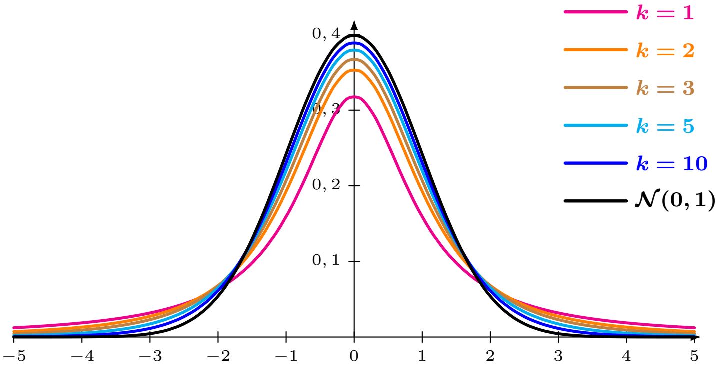


- Son espérance vaut 0 et n'est définie que pour $k \geqslant 2$;
- Sa variance vaut $\dfrac{k}{k-2}$ et n'est définie que pour $k \geqslant 3$.



- Son espérance vaut 0 et n'est définie que pour $k \geqslant 2$;
- Sa variance vaut $\dfrac{k}{k-2}$ et n'est définie que pour $k \geqslant 3$.

Lorsque k tend vers $+\infty$ la loi de Student tend vers la loi normale centrée réduite.



- Son espérance vaut 0 et n'est définie que pour $k \geqslant 2$;
- Sa variance vaut $\dfrac{k}{k-2}$ et n'est définie que pour $k \geqslant 3$.

Lorsque k tend vers $+\infty$ la loi de Student tend vers la loi normale centrée réduite.

Remarque : En pratique, lorsque $k \geqslant 30$, on approche la loi de Student à k degrés de liberté par la loi normale centrée réduite.

William Sealy Gosset

connu sous le pseudonyme **Student** est un statisticien anglais (1876 – 1937) qui inventa la distribution ne portant pas son nom.

Il était un employé de la brasserie Guinness qui lui demanda d'utiliser un pseudonyme pour diverses raisons. *Peut-être prétendait-il que la qualité de leurs produits était improbable...*