Chap 4 : Estimation par intervalles de confiances.

L' **inférence statistique** est l'ensemble des méthodes mathématiques utilisées lors d'un sondage sur un échantillon afin de prédire le comportement d'une population, et ce, avec un contrôle sur l'erreur.

L' **inférence statistique** est l'ensemble des méthodes mathématiques utilisées lors d'un sondage sur un échantillon afin de prédire le comportement d'une population, et ce, avec un contrôle sur l'erreur.

Ces méthodes se déclinent en deux catégories :

L' **inférence statistique** est l'ensemble des méthodes mathématiques utilisées lors d'un sondage sur un échantillon afin de prédire le comportement d'une population, et ce, avec un contrôle sur l'erreur.

Ces méthodes se déclinent en deux catégories :

- l'estimation par **intervalle de confiance ;**

L' **inférence statistique** est l'ensemble des méthodes mathématiques utilisées lors d'un sondage sur un échantillon afin de prédire le comportement d'une population, et ce, avec un contrôle sur l'erreur.

Ces méthodes se déclinent en deux catégories :

- l'estimation par **intervalle de confiance ;**
- les **tests d'hypothèses.**

L' **inférence statistique** est l'ensemble des méthodes mathématiques utilisées lors d'un sondage sur un échantillon afin de prédire le comportement d'une population, et ce, avec un contrôle sur l'erreur.

Ces méthodes se déclinent en deux catégories :

- l'estimation par **intervalle de confiance ;**
- les **tests d'hypothèses.**

Ces méthodes reposent essentiellement sur le théorème de la LIMITE CENTRALE.

1. Le théorème de la limite centrale

Etude n° 1 : Somme répétée de variables indépendantes suivant une loi $\mathcal{U}(6)$.

1. Le théorème de la limite centrale

Etude n° 1 : Somme répétée de variables indépendantes suivant une loi $\mathcal{U}(6)$.

On lance n dés cubiques, on note pour chacun d'eux X_n le résultat.

1. Le théorème de la limite centrale

Etude nº 1 : Somme répétée de variables indépendantes suivant une loi $\mathcal{U}(6)$.

On lance n dés cubiques, on note pour chacun d'eux X_n le résultat.

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme de tous les résultats.

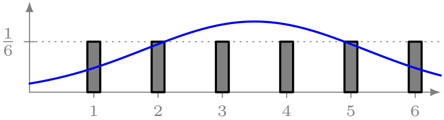
On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 1$:

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 1$:

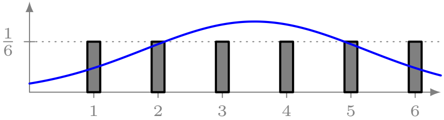
k	1	2	3	4	5	6
$P(S_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 1$:

k	1	2	3	4	5	6
$P(S_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

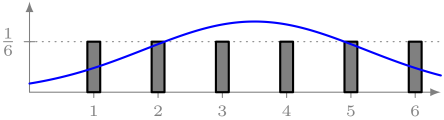


$$E(S_1) = E(X_1) = \left(1 \times \frac{1}{6}\right) + \left(2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(3 \times \frac{1}{6}\right) + \left(4 \times \frac{1}{6}\right) + \left(5 \times \frac{1}{6}\right) + \left(6 \times \frac{1}{6}\right)$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 1$:

k	1	2	3	4	5	6
$P(S_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



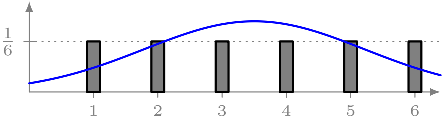
$$E(S_1) = E(X_1) = (1 \times \tfrac{1}{6}) + (2 \times \tfrac{1}{6}) + (3 \times \tfrac{1}{6}) + (4 \times \tfrac{1}{6}) + (5 \times \tfrac{1}{6}) + (6 \times \tfrac{1}{6})$$

$$= \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 1$:

k	1	2	3	4	5	6
$P(S_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



$$E(S_1) = E(X_1) = (1 \times \tfrac{1}{6}) + (2 \times \tfrac{1}{6}) + (3 \times \tfrac{1}{6}) + (4 \times \tfrac{1}{6}) + (5 \times \tfrac{1}{6}) + (6 \times \tfrac{1}{6})$$

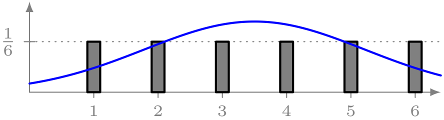
$$= \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$V(S_1) = V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 1$:

k	1	2	3	4	5	6
$P(S_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



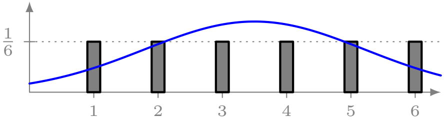
$$E(S_1) = E(X_1) = (1 \times \tfrac{1}{6}) + (2 \times \tfrac{1}{6}) + (3 \times \tfrac{1}{6}) + (4 \times \tfrac{1}{6}) + (5 \times \tfrac{1}{6}) + (6 \times \tfrac{1}{6})$$
$$= \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$V(S_1) = V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2$$
$$= (1^2 \times \tfrac{1}{6}) + (2^2 \times \tfrac{1}{6}) + (3^2 \times \tfrac{1}{6}) + (4^2 \times \tfrac{1}{6}) + (5^2 \times \tfrac{1}{6}) + (6^2 \times \tfrac{1}{6}) - \left(\tfrac{7}{2}\right)^2$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

<u>**Pour $n = 1$**</u> :

k	1	2	3	4	5	6
$P(S_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



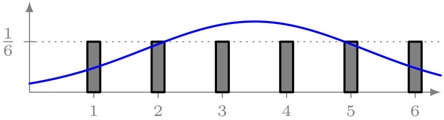
$$E(S_1) = E(X_1) = (1 \times \tfrac{1}{6}) + (2 \times \tfrac{1}{6}) + (3 \times \tfrac{1}{6}) + (4 \times \tfrac{1}{6}) + (5 \times \tfrac{1}{6}) + (6 \times \tfrac{1}{6})$$
$$= \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$V(S_1) = V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2$$
$$= (1^2 \times \tfrac{1}{6}) + (2^2 \times \tfrac{1}{6}) + (3^2 \times \tfrac{1}{6}) + (4^2 \times \tfrac{1}{6}) + (5^2 \times \tfrac{1}{6}) + (6^2 \times \tfrac{1}{6}) - (\tfrac{7}{2})^2$$
$$= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} \simeq 2,917$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 1$:

k	1	2	3	4	5	6
$P(S_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



$$E(S_1) = E(X_1) = (1 \times \tfrac{1}{6}) + (2 \times \tfrac{1}{6}) + (3 \times \tfrac{1}{6}) + (4 \times \tfrac{1}{6}) + (5 \times \tfrac{1}{6}) + (6 \times \tfrac{1}{6})$$
$$= \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$V(S_1) = V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2$$
$$= (1^2 \times \tfrac{1}{6}) + (2^2 \times \tfrac{1}{6}) + (3^2 \times \tfrac{1}{6}) + (4^2 \times \tfrac{1}{6}) + (5^2 \times \tfrac{1}{6}) + (6^2 \times \tfrac{1}{6}) - (\tfrac{7}{2})^2$$
$$= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} \simeq 2,917$$

$$\sigma(S_1) = \sqrt{V(S_1)} \simeq 1,708$$

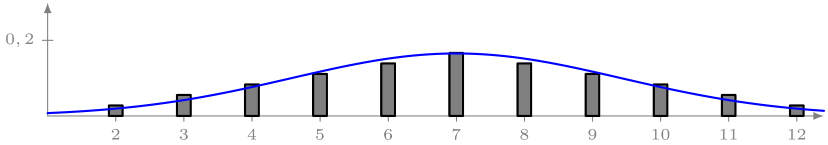
On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 2$:

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

<u>Pour $n = 2$</u> :

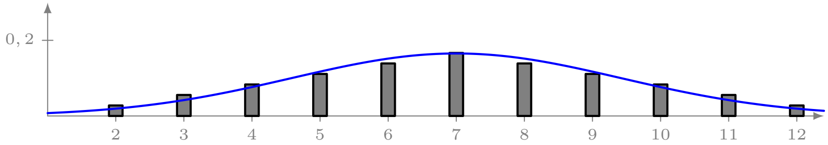
k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S_2 = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

<u>Pour $n = 2$</u> :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S_2 = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

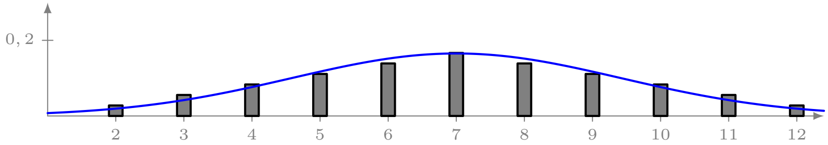


$E(S_2) =$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 2$:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S_2 = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

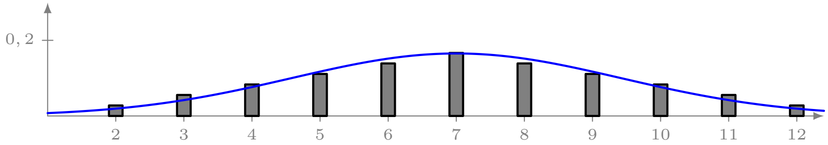


$$E(S_2) = E(X_1 + X_2) =$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 2$:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S_2 = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

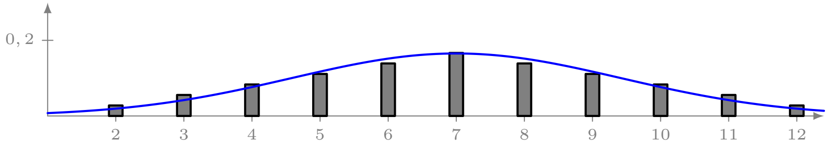


$$E(S_2) = E(X_1 + X_2) = 3,5 + 3,5 = 7$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 2$:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S_2 = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



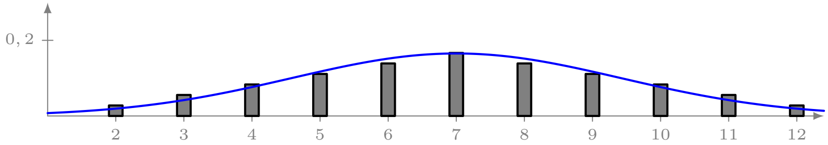
$E(S_2) = E(X_1 + X_2) = 3,5 + 3,5 = 7$

$V(S_2) =$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 2$:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S_2 = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



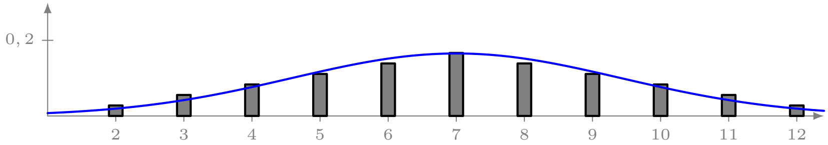
$$E(S_2) = E(X_1 + X_2) = 3,5 + 3,5 = 7$$

$$V(S_2) = V(X_1 + X_2) =$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 2$:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S_2 = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



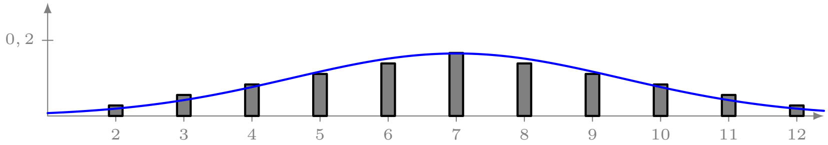
$$E(S_2) = E(X_1 + X_2) = 3,5 + 3,5 = 7$$

$$V(S_2) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) =$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 2$:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S_2 = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



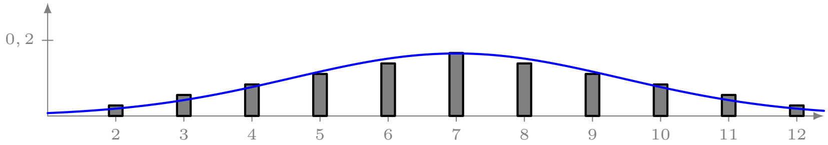
$$E(S_2) = E(X_1 + X_2) = 3,5 + 3,5 = 7$$

$$V(S_2) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = 2 \times \frac{35}{12} \simeq 5,833$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 2$:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S_2 = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



$$E(S_2) = E(X_1 + X_2) = 3,5 + 3,5 = 7$$

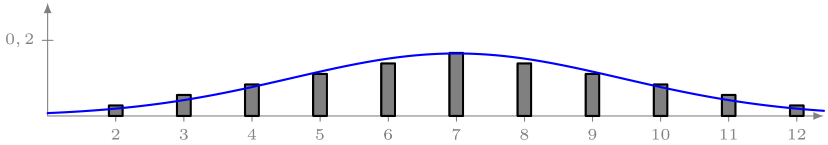
$$V(S_2) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = 2 \times \frac{35}{12} \simeq 5,833$$

$$\sigma(S_2) =$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 2$:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S_2 = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



$$E(S_2) = E(X_1 + X_2) = 3,5 + 3,5 = 7$$

$$V(S_2) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = 2 \times \frac{35}{12} \simeq 5,833$$

$$\sigma(S_2) = \sqrt{V(S_2)} \simeq 2,415$$

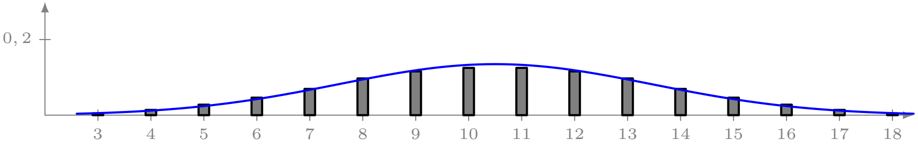
On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 3$:

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 3$:

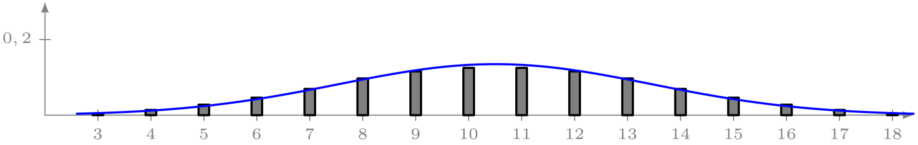
k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(S_3 = k)$	$\frac{1}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$



On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 3$:

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(S_3 = k)$	$\frac{1}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$

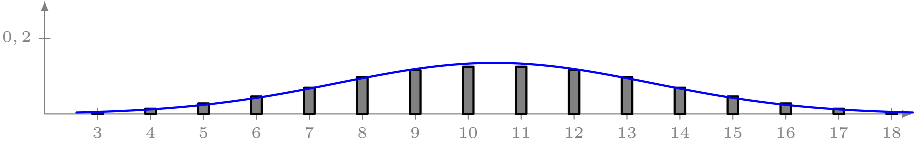


$E(S_3) =$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 3$:

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(S_3 = k)$	$\frac{1}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$

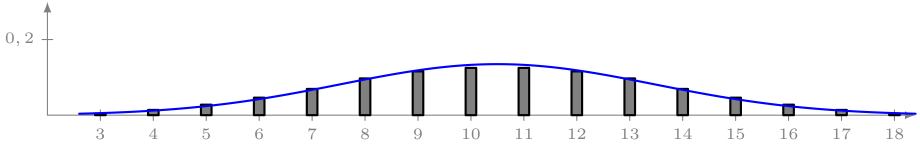


$E(S_3) = E(X_1 + X_2 + X_3) = 3 \times 3,5 = 10,5$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 3$:

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(S_3 = k)$	$\frac{1}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$



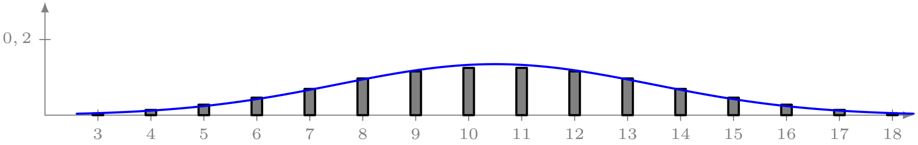
$E(S_3) = E(X_1 + X_2 + X_3) = 3 \times 3,5 = 10,5$

$V(S_3) =$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 3$:

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(S_3 = k)$	$\frac{1}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$



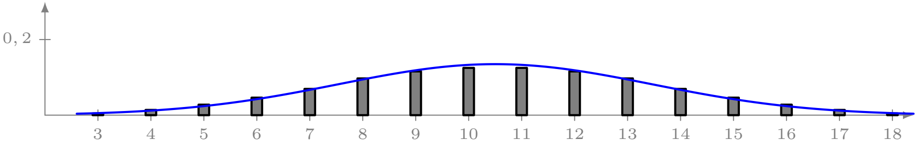
$E(S_3) = E(X_1 + X_2 + X_3) = 3 \times 3,5 = 10,5$

$V(S_3) = V(X_1 + X_2 + X_3) =$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 3$:

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(S_3 = k)$	$\frac{1}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$



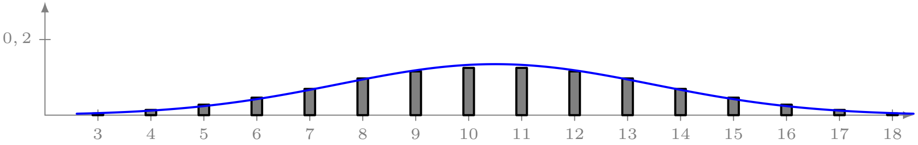
$E(S_3) = E(X_1 + X_2 + X_3) = 3 \times 3,5 = 10,5$

$V(S_3) = V(X_1 + X_2 + X_3) = 3 \times V(X_1) =$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 3$:

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(S_3 = k)$	$\frac{1}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$



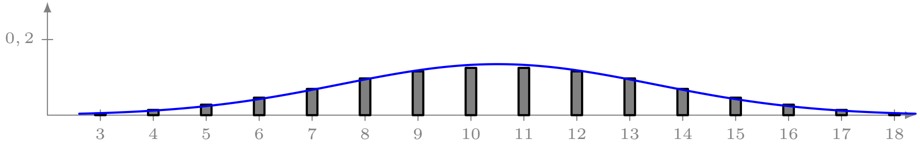
$E(S_3) = E(X_1 + X_2 + X_3) = 3 \times 3,5 = 10,5$

$V(S_3) = V(X_1 + X_2 + X_3) = 3 \times V(X_1) = 3 \times \frac{35}{12} = 8,75$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 3$:

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(S_3 = k)$	$\frac{1}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$



$E(S_3) = E(X_1 + X_2 + X_3) = 3 \times 3,5 = 10,5$

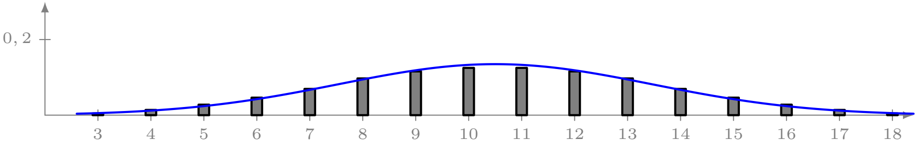
$V(S_3) = V(X_1 + X_2 + X_3) = 3 \times V(X_1) = 3 \times \dfrac{35}{12} = 8,75$

$\sigma(S_3) =$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 3$:

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(S_3 = k)$	$\frac{1}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$



$E(S_3) = E(X_1 + X_2 + X_3) = 3 \times 3,5 = 10,5$

$V(S_3) = V(X_1 + X_2 + X_3) = 3 \times V(X_1) = 3 \times \frac{35}{12} = 8,75$

$\sigma(S_3) = \sqrt{V(S_3)} \simeq 2,958$

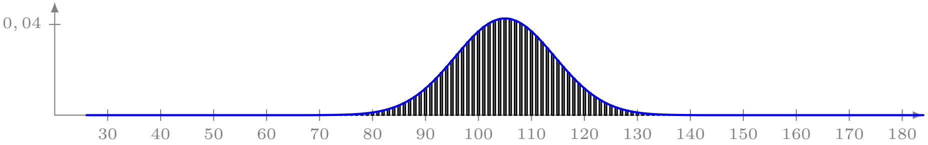
On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 30$:

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 30$:

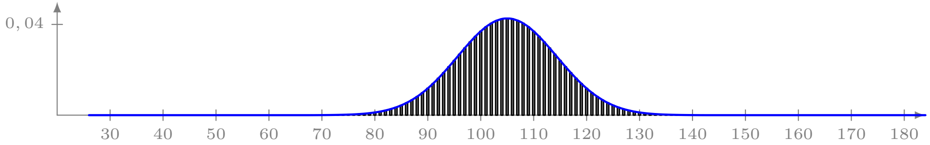
k	30	31	32	33	34	$\cdots$	90	$\cdots$	100	$\cdots$	105	$\cdots$	110	$\cdots$	140	$\cdots$	180
$P(S_{30} = k)$	$\frac{1}{6^{30}}$	$\frac{30}{6^{30}}$	$\frac{465}{6^{30}}$	$\frac{4960}{6^{30}}$	$\frac{40920}{6^{30}}$	$\cdots$	0,0119	$\cdots$	0,03688	$\cdots$	0,04242	$\cdots$	0,03688	$\cdots$	0,000031025	$\cdots$	$\frac{1}{6^{30}}$



On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 30$:

k	30	31	32	33	34	$\cdots$	90	$\cdots$	100	$\cdots$	105	$\cdots$	110	$\cdots$	140	$\cdots$	180
$P(S_{30} = k)$	$\frac{1}{6^{30}}$	$\frac{30}{6^{30}}$	$\frac{465}{6^{30}}$	$\frac{4960}{6^{30}}$	$\frac{40920}{6^{30}}$	$\cdots$	0,0119	$\cdots$	0,03688	$\cdots$	0,04242	$\cdots$	0,03688	$\cdots$	0,000031025	$\cdots$	$\frac{1}{6^{30}}$

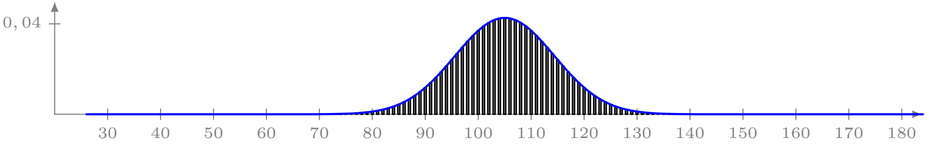


$E(S_{30}) =$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

<u>**Pour $n = 30$**</u> :

k	30	31	32	33	34	$\cdots$	90	$\cdots$	100	$\cdots$	105	$\cdots$	110	$\cdots$	140	$\cdots$	180
$P(S_{30} = k)$	$\frac{1}{6^{30}}$	$\frac{30}{6^{30}}$	$\frac{465}{6^{30}}$	$\frac{4960}{6^{30}}$	$\frac{40920}{6^{30}}$	$\cdots$	0,0119	$\cdots$	0,03688	$\cdots$	0,04242	$\cdots$	0,03688	$\cdots$	0,000031025	$\cdots$	$\frac{1}{6^{30}}$

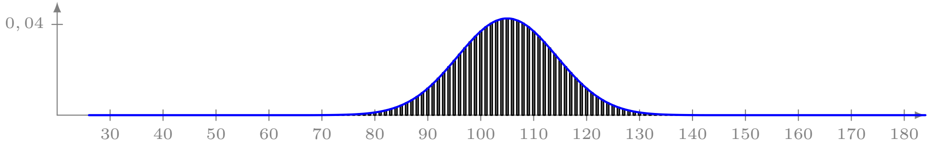


$$E(S_{30}) = E(X_1 + \ldots + X_{30}) = 30 \times 3,5 = 105$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 30$:

k	30	31	32	33	34	$\cdots$	90	$\cdots$	100	$\cdots$	105	$\cdots$	110	$\cdots$	140	$\cdots$	180
$P(S_{30} = k)$	$\frac{1}{6^{30}}$	$\frac{30}{6^{30}}$	$\frac{465}{6^{30}}$	$\frac{4960}{6^{30}}$	$\frac{40920}{6^{30}}$	$\cdots$	0,0119	$\cdots$	0,03688	$\cdots$	0,04242	$\cdots$	0,03688	$\cdots$	0,000031025	$\cdots$	$\frac{1}{6^{30}}$



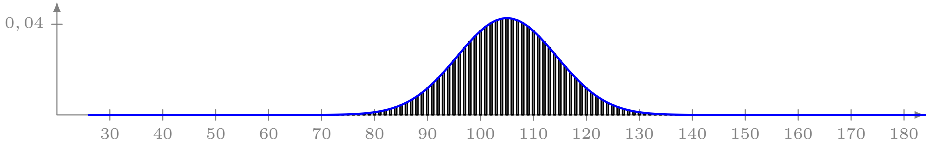
$E(S_{30}) = E(X_1 + \ldots + X_{30}) = 30 \times 3,5 = 105$

$V(S_{30}) =$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 30$:

k	30	31	32	33	34	$\cdots$	90	$\cdots$	100	$\cdots$	105	$\cdots$	110	$\cdots$	140	$\cdots$	180
$P(S_{30} = k)$	$\frac{1}{6^{30}}$	$\frac{30}{6^{30}}$	$\frac{465}{6^{30}}$	$\frac{4960}{6^{30}}$	$\frac{40920}{6^{30}}$	$\cdots$	0,0119	$\cdots$	0,03688	$\cdots$	0,04242	$\cdots$	0,03688	$\cdots$	0,000031025	$\cdots$	$\frac{1}{6^{30}}$



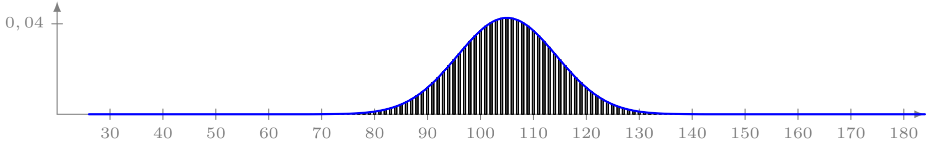
$$E(S_{30}) = E(X_1 + \ldots + X_{30}) = 30 \times 3,5 = 105$$

$$V(S_{30}) = V(X_1 + \ldots + X_{30}) = 30 \times V(X_1) = 30 \times \frac{35}{12} = 87,5$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

Pour $n = 30$:

k	30	31	32	33	34	$\cdots$	90	$\cdots$	100	$\cdots$	105	$\cdots$	110	$\cdots$	140	$\cdots$	180
$P(S_{30}=k)$	$\frac{1}{6^{30}}$	$\frac{30}{6^{30}}$	$\frac{465}{6^{30}}$	$\frac{4960}{6^{30}}$	$\frac{40920}{6^{30}}$	$\cdots$	0,0119	$\cdots$	0,03688	$\cdots$	0,04242	$\cdots$	0,03688	$\cdots$	0,000031025	$\cdots$	$\frac{1}{6^{30}}$



$E(S_{30}) = E(X_1 + \ldots + X_{30}) = 30 \times 3,5 = 105$

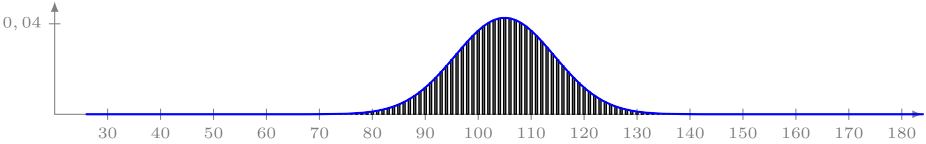
$V(S_{30}) = V(X_1 + \ldots + X_{30}) = 30 \times V(X_1) = 30 \times \frac{35}{12} = 87,5$

$\sigma(S_{30}) =$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme des n dés.

<u>Pour $n = 30$</u> :

k	30	31	32	33	34	$\cdots$	90	$\cdots$	100	$\cdots$	105	$\cdots$	110	$\cdots$	140	$\cdots$	180
$P(S_{30} = k)$	$\frac{1}{6^{30}}$	$\frac{30}{6^{30}}$	$\frac{465}{6^{30}}$	$\frac{4960}{6^{30}}$	$\frac{40920}{6^{30}}$	$\cdots$	0,0119	$\cdots$	0,03688	$\cdots$	0,04242	$\cdots$	0,03688	$\cdots$	0,000031025	$\cdots$	$\frac{1}{6^{30}}$



$$E(S_{30}) = E(X_1 + \ldots + X_{30}) = 30 \times 3,5 = 105$$

$$V(S_{30}) = V(X_1 + \ldots + X_{30}) = 30 \times V(X_1) = 30 \times \frac{35}{12} = 87,5$$

$$\sigma(S_{30}) = \sqrt{V(S_{30})} \simeq 9,354$$

Théorème de la limite centrale

Pierre-Simon de Laplace publie en 1812, le théorème de Laplace, appelé aujourd'hui théorème central limite...

Théorème de la limite centrale

Pierre-Simon de Laplace publie en 1812, le théorème de Laplace, appelé aujourd'hui théorème central limite...

Soient X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires **indépendantes**, suivants toutes la **même loi**, admettant une moyenne μ et un écart-type $\sigma \neq 0$ alors pour n **suffisamment grand** :

Théorème de la limite centrale

Pierre-Simon de Laplace publie en 1812, le théorème de Laplace, appelé aujourd'hui théorème central limite...

Soient X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires **indépendantes**, suivants toutes la **même loi**, admettant une moyenne μ et un écart-type $\sigma \neq 0$ alors pour n **suffisamment grand** :

- la loi normale $\mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})$ est une bonne approximation de la variable aléatoire

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n \;;$$

Théorème de la limite centrale

Pierre-Simon de Laplace publie en 1812, le théorème de Laplace, appelé aujourd'hui théorème central limite...

Soient X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires **indépendantes**, suivants toutes la **même loi**, admettant une moyenne μ et un écart-type $\sigma \neq 0$ alors pour n **suffisamment grand** :

- la loi normale $\mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})$ est une bonne approximation de la variable aléatoire

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n \, ;$$

- la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ est une bonne approximation de la variable aléatoire

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_n .$$

Remarque :

i. « n suffisamment grand » sera précisé par la suite, en général, $n \geqslant 30$ est suffisant.

Remarque :

i. « n suffisamment grand » sera précisé par la suite, en général, $n \geqslant 30$ est suffisant.

ii. A défaut de démontrer ce théorème, on peut en expliquer les paramètres :

Remarque :

i. « n suffisamment grand » sera précisé par la suite, en général, $n \geqslant 30$ est suffisant.

ii. A défaut de démontrer ce théorème, on peut en expliquer les paramètres :

- $E(S_n) =$

Remarque :

i. « n suffisamment grand » sera précisé par la suite, en général, $n \geqslant 30$ est suffisant.

ii. A défaut de démontrer ce théorème, on peut en expliquer les paramètres :

- $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$

Remarque :

i. « n suffisamment grand » sera précisé par la suite, en général, $n \geqslant 30$ est suffisant.

ii. A défaut de démontrer ce théorème, on peut en expliquer les paramètres :

- $E\left(S_n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) =$

Remarque :

i. « n suffisamment grand » sera précisé par la suite, en général, $n \geqslant 30$ est suffisant.

ii. A défaut de démontrer ce théorème, on peut en expliquer les paramètres :

- $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu =$

Remarque :

i. « n suffisamment grand » sera précisé par la suite, en général, $n \geqslant 30$ est suffisant.

ii. A défaut de démontrer ce théorème, on peut en expliquer les paramètres :

- $E\left(S_n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\mu$;

Remarque :

i. « n suffisamment grand » sera précisé par la suite, en général, $n \geqslant 30$ est suffisant.

ii. A défaut de démontrer ce théorème, on peut en expliquer les paramètres :

- $E\left(S_n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\mu\,;$

  Et donc, $E\left(\overline{X_n}\right) =$

Remarque :

i. « n suffisamment grand » sera précisé par la suite, en général, $n \geqslant 30$ est suffisant.

ii. A défaut de démontrer ce théorème, on peut en expliquer les paramètres :

- $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\mu\,;$

  Et donc, $E\left(\overline{X_n}\right) = E\left(\frac{1}{n} S_n\right) =$

Remarque :

i. « n suffisamment grand » sera précisé par la suite, en général, $n \geqslant 30$ est suffisant.

ii. A défaut de démontrer ce théorème, on peut en expliquer les paramètres :

- $E\left(S_n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\mu\,;$

  Et donc, $E\left(\overline{X_n}\right) = E\left(\frac{1}{n} S_n\right) = \mu.$

Remarque :

i. « n suffisamment grand » sera précisé par la suite, en général, $n \geqslant 30$ est suffisant.

ii. A défaut de démontrer ce théorème, on peut en expliquer les paramètres :

- $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\mu$;

  Et donc, $E\left(\overline{X_n}\right) = E\left(\frac{1}{n} S_n\right) = \mu$.

- $V(S_n) =$

Remarque :

i. « n suffisamment grand » sera précisé par la suite, en général, $n \geqslant 30$ est suffisant.

ii. A défaut de démontrer ce théorème, on peut en expliquer les paramètres :

- $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\mu\,;$

  Et donc, $E\left(\overline{X_n}\right) = E\left(\frac{1}{n} S_n\right) = \mu$.

- $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{\textbf{indépendance}}{=}$

Remarque :

i. « n suffisamment grand » sera précisé par la suite, en général, $n \geqslant 30$ est suffisant.

ii. A défaut de démontrer ce théorème, on peut en expliquer les paramètres :

- $E\left(S_n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\mu$;

  Et donc, $E\left(\overline{X_n}\right) = E\left(\frac{1}{n} S_n\right) = \mu$.

- $V\left(S_n\right) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{\textbf{indépendance}}{=} \sum_{i=1}^{n} V\left(X_i\right) =$

Remarque :

i. « n suffisamment grand » sera précisé par la suite, en général, $n \geqslant 30$ est suffisant.

ii. A défaut de démontrer ce théorème, on peut en expliquer les paramètres :

- $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\mu$;

  Et donc, $E\left(\overline{X_n}\right) = E\left(\frac{1}{n} S_n\right) = \mu$.

- $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{\textbf{indépendance}}{=} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n\sigma^2$.

Remarque :

i. « n suffisamment grand » sera précisé par la suite, en général, $n \geqslant 30$ est suffisant.

ii. A défaut de démontrer ce théorème, on peut en expliquer les paramètres :

- $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\mu$;

  Et donc, $E\left(\overline{X_n}\right) = E\left(\frac{1}{n} S_n\right) = \mu$.

- $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{\textbf{indépendance}}{=} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n\sigma^2$.

  Donc l'écart-type de S_n est $\sqrt{n}\sigma$.

Remarque :

i. « n suffisamment grand » sera précisé par la suite, en général, $n \geqslant 30$ est suffisant.

ii. A défaut de démontrer ce théorème, on peut en expliquer les paramètres :

- $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\mu$;

  Et donc, $E\left(\overline{X_n}\right) = E\left(\frac{1}{n} S_n\right) = \mu$.

- $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{\textbf{indépendance}}{=} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n\sigma^2$.

  Donc l'écart-type de S_n est $\sqrt{n}\sigma$.

  Ainsi, $V\left(\overline{X_n}\right) =$

Remarque :

i. « n suffisamment grand » sera précisé par la suite, en général, $n \geqslant 30$ est suffisant.

ii. A défaut de démontrer ce théorème, on peut en expliquer les paramètres :

- $$E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\mu\,;$$

  Et donc, $E\left(\overline{X_n}\right) = E\left(\frac{1}{n} S_n\right) = \mu$.

- $$V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{\textbf{indépendance}}{=} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n\sigma^2.$$

  Donc l'écart-type de S_n est $\sqrt{n}\sigma$.

  Ainsi, $V\left(\overline{X_n}\right) = V\left(\frac{1}{n} S_n\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 V(S_n) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$.

Remarque :

i. « n suffisamment grand » sera précisé par la suite, en général, $n \geqslant 30$ est suffisant.

ii. A défaut de démontrer ce théorème, on peut en expliquer les paramètres :

- $$E\left(S_n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\mu\,;$$

  Et donc, $E\left(\overline{X_n}\right) = E\left(\frac{1}{n} S_n\right) = \mu$.

- $$V\left(S_n\right) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{\textbf{indépendance}}{=} \sum_{i=1}^{n} V\left(X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n\sigma^2.$$

  Donc l'écart-type de S_n est $\sqrt{n}\sigma$.

  Ainsi, $V\left(\overline{X_n}\right) = V\left(\frac{1}{n} S_n\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 V(S_n) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$.

  L'écart-type de $\overline{X_n}$ est $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

2. Application à la loi binomiale.

Etude n° 2 : A la sortie d'une machine-outil, 30% des pièces sont trop chaudes pour être assemblées.

2. Application à la loi binomiale.

Etude n° 2 : A la sortie d'une machine-outil, 30% des pièces sont trop chaudes pour être assemblées. Sur un échantillon de 30 pièces, on note S la variable aléatoire donnant le nombre de pièces trop chaudes.

2. Application à la loi binomiale.

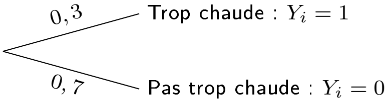
Etude n^o 2 : A la sortie d'une machine-outil, 30% des pièces sont trop chaudes pour être assemblées. Sur un échantillon de 30 pièces, on note S la variable aléatoire donnant le nombre de pièces trop chaudes.

A chacune des 30 pièces, on peut associer une variable aléatoire Y_i et l'épreuve de Bernoulli suivante :

2. Application à la loi binomiale.

Etude n° 2 : A la sortie d'une machine-outil, 30% des pièces sont trop chaudes pour être assemblées. Sur un échantillon de 30 pièces, on note S la variable aléatoire donnant le nombre de pièces trop chaudes.

A chacune des 30 pièces, on peut associer une variable aléatoire Y_i et l'épreuve de Bernoulli suivante :



2. Application à la loi binomiale.

Etude n° 2 : A la sortie d'une machine-outil, 30% des pièces sont trop chaudes pour être assemblées. Sur un échantillon de 30 pièces, on note S la variable aléatoire donnant le nombre de pièces trop chaudes.

A chacune des 30 pièces, on peut associer une variable aléatoire Y_i et l'épreuve de Bernoulli suivante :

- $0,3$ — Trop chaude : $Y_i = 1$
- $0,7$ — Pas trop chaude : $Y_i = 0$

☞ $E(Y_i) = 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0 = 0,3 \quad (= p)$

2. Application à la loi binomiale.

Etude n° 2 : A la sortie d'une machine-outil, 30% des pièces sont trop chaudes pour être assemblées. Sur un échantillon de 30 pièces, on note S la variable aléatoire donnant le nombre de pièces trop chaudes.
A chacune des 30 pièces, on peut associer une variable aléatoire Y_i et l'épreuve de Bernoulli suivante :

$0,3$ — Trop chaude : $Y_i = 1$

$0,7$ — Pas trop chaude : $Y_i = 0$

☞ $E(Y_i) = 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0 = 0,3 \quad (= p)$

☞ $V(Y_i) = pq = p(1-p) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$

2. Application à la loi binomiale.

Etude n° 2 : A la sortie d'une machine-outil, 30% des pièces sont trop chaudes pour être assemblées. Sur un échantillon de 30 pièces, on note S la variable aléatoire donnant le nombre de pièces trop chaudes.
A chacune des 30 pièces, on peut associer une variable aléatoire Y_i et l'épreuve de Bernoulli suivante :

$0,3$ — Trop chaude : $Y_i = 1$

$0,7$ — Pas trop chaude : $Y_i = 0$

☞ $E(Y_i) = 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0 = 0,3 \quad (= p)$

☞ $V(Y_i) = pq = p(1-p) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$

Comme les Y_i sont indépendants, la variable S suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p) = \mathcal{B}(30;\ 0,3)$:

2. Application à la loi binomiale.

Etude n° 2 : A la sortie d'une machine-outil, 30% des pièces sont trop chaudes pour être assemblées. Sur un échantillon de 30 pièces, on note S la variable aléatoire donnant le nombre de pièces trop chaudes.
A chacune des 30 pièces, on peut associer une variable aléatoire Y_i et l'épreuve de Bernoulli suivante :

$0,3$ — Trop chaude : $Y_i = 1$

$0,7$ — Pas trop chaude : $Y_i = 0$

☞ $E(Y_i) = 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0 = 0,3 \quad (= p)$

☞ $V(Y_i) = pq = p(1-p) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$

Comme les Y_i sont indépendants, la variable S suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p) = \mathcal{B}(30;\, 0,3)$:

- Son espérance est

2. Application à la loi binomiale.

Etude n° 2 : A la sortie d'une machine-outil, 30% des pièces sont trop chaudes pour être assemblées. Sur un échantillon de 30 pièces, on note S la variable aléatoire donnant le nombre de pièces trop chaudes.
A chacune des 30 pièces, on peut associer une variable aléatoire Y_i et l'épreuve de Bernoulli suivante :

$0,3$ — Trop chaude : $Y_i = 1$

$0,7$ — Pas trop chaude : $Y_i = 0$

☞ $E(Y_i) = 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0 = 0,3 \quad (= p)$

☞ $V(Y_i) = pq = p(1-p) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$

Comme les Y_i sont indépendants, la variable S suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p) = \mathcal{B}(30;\ 0,3)$:

- Son espérance est $np =$

2. Application à la loi binomiale.

Etude n° 2 : A la sortie d'une machine-outil, 30% des pièces sont trop chaudes pour être assemblées. Sur un échantillon de 30 pièces, on note S la variable aléatoire donnant le nombre de pièces trop chaudes.

A chacune des 30 pièces, on peut associer une variable aléatoire Y_i et l'épreuve de Bernoulli suivante :

- $0,3$ — Trop chaude : $Y_i = 1$
- $0,7$ — Pas trop chaude : $Y_i = 0$

☞ $E(Y_i) = 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0 = 0,3 \quad (= p)$

☞ $V(Y_i) = pq = p(1-p) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$

Comme les Y_i sont indépendants, la variable S suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p) = \mathcal{B}(30;\ 0,3)$:

- Son espérance est $np = 30 \times 0,3 = 9$;
- Sa variance est

2. Application à la loi binomiale.

Etude n° 2 : A la sortie d'une machine-outil, 30% des pièces sont trop chaudes pour être assemblées. Sur un échantillon de 30 pièces, on note S la variable aléatoire donnant le nombre de pièces trop chaudes.

A chacune des 30 pièces, on peut associer une variable aléatoire Y_i et l'épreuve de Bernoulli suivante :

$0,3$ — Trop chaude : $Y_i = 1$

$0,7$ — Pas trop chaude : $Y_i = 0$

☞ $E(Y_i) = 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0 = 0,3 \quad (= p)$

☞ $V(Y_i) = pq = p(1-p) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$

Comme les Y_i sont indépendants, la variable S suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p) = \mathcal{B}(30;\, 0,3)$:

- Son espérance est $np = 30 \times 0,3 = 9$;
- Sa variance est $npq =$

2. Application à la loi binomiale.

Etude n° 2 : A la sortie d'une machine-outil, 30% des pièces sont trop chaudes pour être assemblées. Sur un échantillon de 30 pièces, on note S la variable aléatoire donnant le nombre de pièces trop chaudes.
A chacune des 30 pièces, on peut associer une variable aléatoire Y_i et l'épreuve de Bernoulli suivante :

$0,3$ — Trop chaude : $Y_i = 1$

$0,7$ — Pas trop chaude : $Y_i = 0$

☞ $E(Y_i) = 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0 = 0,3 \quad (= p)$

☞ $V(Y_i) = pq = p(1-p) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$

Comme les Y_i sont indépendants, la variable S suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p) = \mathcal{B}(30;\ 0,3)$:

- Son espérance est $np = 30 \times 0,3 = 9$;
- Sa variance est $npq = 9 \times 0,7 = 6,3$;
- Son écart-type est

2. Application à la loi binomiale.

Etude n° 2 : A la sortie d'une machine-outil, 30% des pièces sont trop chaudes pour être assemblées. Sur un échantillon de 30 pièces, on note S la variable aléatoire donnant le nombre de pièces trop chaudes.
A chacune des 30 pièces, on peut associer une variable aléatoire Y_i et l'épreuve de Bernoulli suivante :

- $0,3$: Trop chaude : $Y_i = 1$
- $0,7$: Pas trop chaude : $Y_i = 0$

☞ $E(Y_i) = 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0 = 0,3 \quad (= p)$

☞ $V(Y_i) = pq = p(1-p) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$

Comme les Y_i sont indépendants, la variable S suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p) = \mathcal{B}(30;\ 0,3)$:

- Son espérance est $np = 30 \times 0,3 = 9$;
- Sa variance est $npq = 9 \times 0,7 = 6,3$;
- Son écart-type est $\sqrt{npq} =$

2. Application à la loi binomiale.

Etude n° 2 : A la sortie d'une machine-outil, 30% des pièces sont trop chaudes pour être assemblées. Sur un échantillon de 30 pièces, on note S la variable aléatoire donnant le nombre de pièces trop chaudes.

A chacune des 30 pièces, on peut associer une variable aléatoire Y_i et l'épreuve de Bernoulli suivante :

$0,3$: Trop chaude : $Y_i = 1$

$0,7$: Pas trop chaude : $Y_i = 0$

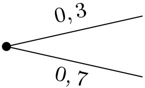
☞ $E(Y_i) = 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0 = 0,3 \quad (= p)$

☞ $V(Y_i) = pq = p(1-p) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$

Comme les Y_i sont indépendants, la variable S suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p) = \mathcal{B}(30;\ 0,3)$:

- Son espérance est $np = 30 \times 0,3 = 9$;
- Sa variance est $npq = 9 \times 0,7 = 6,3$;
- Son écart-type est $\sqrt{npq} = \sqrt{6,3} \simeq 2,510$.

I. Variables d'échantillonnages



Trop chaude : $Y_i = 1$

Pas trop chaude : $Y_i = 0$

☞ $E(Y_i) = 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0 = 0,3 \quad (= p)$

☞ $V(Y_i) = pq = p(1-p) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$

Comme les Y_i sont indépendants, la variable S suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p) = \mathcal{B}(30;\, 0,3)$:

- Son espérance est $np = 30 \times 0,3 = 9$;
- Sa variance est $npq = 9 \times 0,7 = 6,3$;
- Son écart-type est $\sqrt{npq} = \sqrt{6,3} \simeq 2,510$.

$0,3$ — Trop chaude : $Y_i = 1$

$0,7$ — Pas trop chaude : $Y_i = 0$

☞ $E(Y_i) = 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0 = 0,3 \quad (= p)$

☞ $V(Y_i) = pq = p(1-p) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$

Comme les Y_i sont indépendants, la variable S suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p) = \mathcal{B}(30;\,0,3)$:

- Son espérance est $np = 30 \times 0,3 = 9$;
- Sa variance est $npq = 9 \times 0,7 = 6,3$;
- Son écart-type est $\sqrt{npq} = \sqrt{6,3} \simeq 2,510$.

Or, S est une somme de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi :

$$S = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

I. Variables d'échantillonnages

$0,3$ — Trop chaude : $Y_i = 1$

$0,7$ — Pas trop chaude : $Y_i = 0$

☞ $E(Y_i) = 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0 = 0,3 \quad (= p)$

☞ $V(Y_i) = pq = p(1-p) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$

Comme les Y_i sont indépendants, la variable S suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p) = \mathcal{B}(30;\, 0,3)$:

- Son espérance est $np = 30 \times 0,3 = 9$;
- Sa variance est $npq = 9 \times 0,7 = 6,3$;
- Son écart-type est $\sqrt{npq} = \sqrt{6,3} \simeq 2,510$.

Or, S est une somme de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi :

$$S = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

Donc, d'après le théorème de la limite centrale,

I. Variables d'échantillonnages

$0,3$ — Trop chaude : $Y_i = 1$

$0,7$ — Pas trop chaude : $Y_i = 0$

☞ $E(Y_i) = 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0 = 0,3 \quad (= p)$

☞ $V(Y_i) = pq = p(1-p) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$

Comme les Y_i sont indépendants, la variable S suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p) = \mathcal{B}(30;\ 0,3)$:

- Son espérance est $np = 30 \times 0,3 = 9$;
- Sa variance est $npq = 9 \times 0,7 = 6,3$;
- Son écart-type est $\sqrt{npq} = \sqrt{6,3} \simeq 2,510$.

Or, S est une somme de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi :

$$S = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

Donc, d'après le théorème de la limite centrale, S peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(9;\ 2,510)$.

I. Variables d'échantillonnages

$0,3$ — Trop chaude : $Y_i = 1$

$0,7$ — Pas trop chaude : $Y_i = 0$

☞ $E(Y_i) = 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0 = 0,3 \quad (= p)$

☞ $V(Y_i) = pq = p(1-p) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$

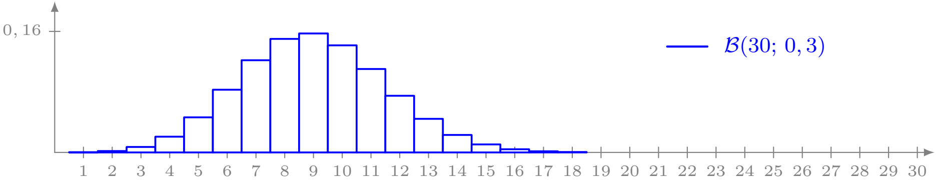
Comme les Y_i sont indépendants, la variable S suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p) = \mathcal{B}(30;\ 0,3)$:

- Son espérance est $np = 30 \times 0,3 = 9$;
- Sa variance est $npq = 9 \times 0,7 = 6,3$;
- Son écart-type est $\sqrt{npq} = \sqrt{6,3} \simeq 2,510$.

Or, S est une somme de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi :

$$S = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

Donc, d'après le théorème de la limite centrale, S peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(9;\ 2,510)$.



- $0,3$ — Trop chaude : $Y_i = 1$
- $0,7$ — Pas trop chaude : $Y_i = 0$

☞ $E(Y_i) = 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0 = 0,3 \quad (= p)$

☞ $V(Y_i) = pq = p(1-p) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$

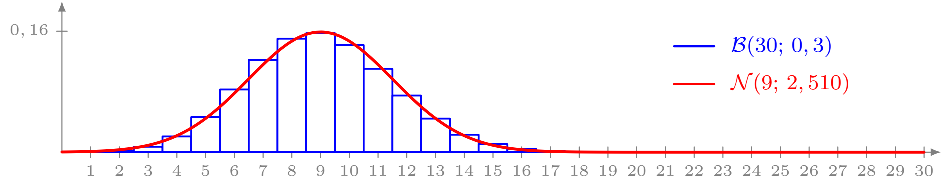
Comme les Y_i sont indépendants, la variable S suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p) = \mathcal{B}(30;\ 0,3)$:

- Son espérance est $np = 30 \times 0,3 = 9$;
- Sa variance est $npq = 9 \times 0,7 = 6,3$;
- Son écart-type est $\sqrt{npq} = \sqrt{6,3} \simeq 2,510$.

Or, S est une somme de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi :

$$S = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

Donc, d'après le théorème de la limite centrale, S peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(9;\ 2,510)$.



Calculons $P(10 \leqslant S \leqslant 13)$

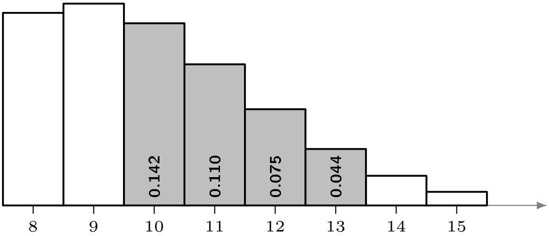
Avec la loi binomiale $\mathcal{B}(30;\, 0,3)$:

k	10	11	12	13
$P(S=k)$	0,142	0,110	0,075	0,044

Calculons $P(10 \leqslant S \leqslant 13)$

Avec la loi binomiale $\mathcal{B}(30;\, 0,3)$:

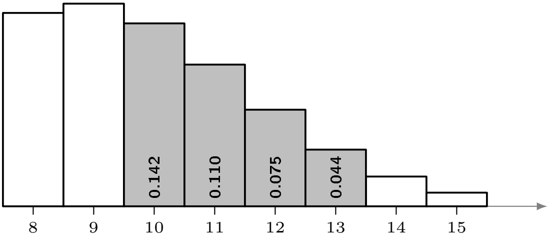
k	10	11	12	13
$P(S=k)$	0,142	0,110	0,075	0,044



Calculons $P(10 \leqslant S \leqslant 13)$

Avec la loi binomiale $\mathcal{B}(30; 0,3)$:

k	10	11	12	13
$P(S = k)$	0,142	0,110	0,075	0,044

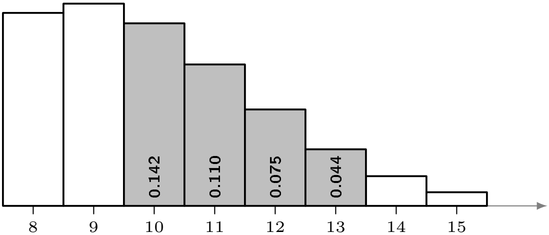


$P(10 \leqslant S \leqslant 13) =$

Calculons $P(10 \leqslant S \leqslant 13)$

Avec la loi binomiale $\mathcal{B}(30;\, 0,3)$:

k	10	11	12	13
$P(S = k)$	0,142	0,110	0,075	0,044

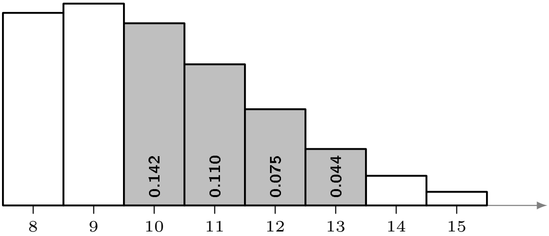


$P(10 \leqslant S \leqslant 13) = 0,142 +$

Calculons $P(10 \leqslant S \leqslant 13)$

Avec la loi binomiale $\mathcal{B}(30; 0,3)$:

k	10	11	12	13
$P(S=k)$	0,142	0,110	0,075	0,044

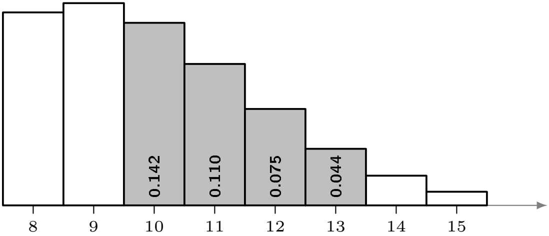


$P(10 \leqslant S \leqslant 13) = 0,142 + 0,11 +$

Calculons $P(10 \leqslant S \leqslant 13)$

Avec la loi binomiale $\mathcal{B}(30;\, 0,3)$:

k	10	11	12	13
$P(S = k)$	0,142	0,110	0,075	0,044

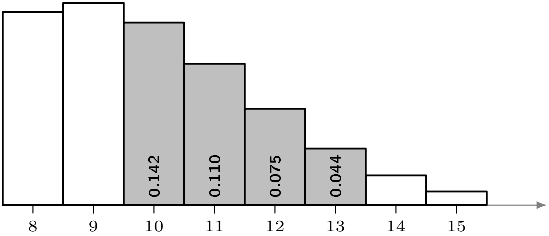


$P(10 \leqslant S \leqslant 13) = 0,142 + 0,11 + 0,075 +$

Calculons $P(10 \leqslant S \leqslant 13)$

Avec la loi binomiale $\mathcal{B}(30;\, 0,3)$:

k	10	11	12	13
$P(S=k)$	0,142	0,110	0,075	0,044

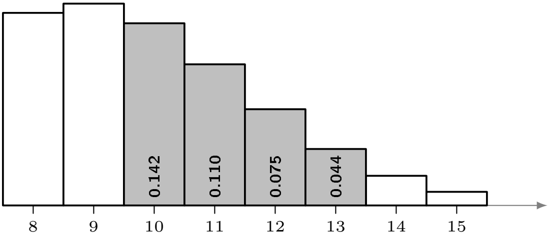


$P(10 \leqslant S \leqslant 13) = 0,142 + 0,11 + 0,075 + 0,044 =$

Calculons $P(10 \leqslant S \leqslant 13)$

Avec la loi binomiale $\mathcal{B}(30;\, 0,3)$:

k	10	11	12	13
$P(S=k)$	0,142	0,110	0,075	0,044

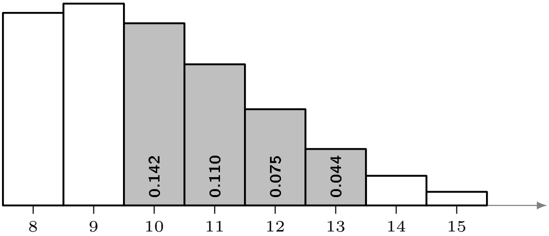


$P(10 \leqslant S \leqslant 13) = 0,142 + 0,11 + 0,075 + 0,044 = 0,371$

Calculons $P(10 \leqslant S \leqslant 13)$

Avec la loi binomiale $\mathcal{B}(30;\, 0,3)$:

k	10	11	12	13
$P(S=k)$	0,142	0,110	0,075	0,044



$P(10 \leqslant S \leqslant 13) = 0,142 + 0,11 + 0,075 + 0,044 = 0,371$

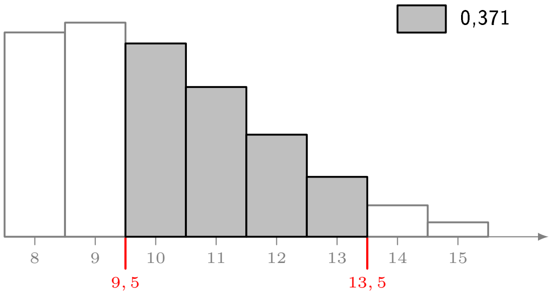
Les rectangles étant le largeur 1, $P(10 \leqslant S \leqslant 13)$ est l'aire grisée.

Calculons $P(10 \leqslant S \leqslant 13)$

Avec l'approximation normale $\mathcal{N}(9;\ 2,510)$:

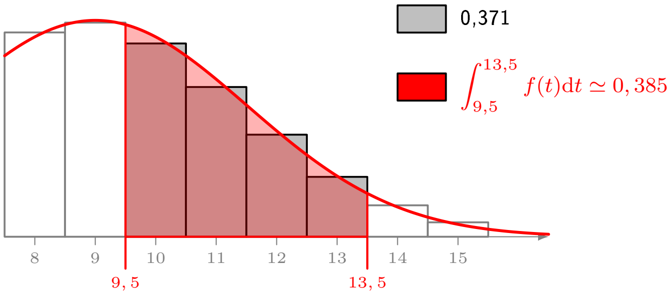
Calculons $P(10 \leqslant S \leqslant 13)$

Avec l'approximation normale $\mathcal{N}(9;\, 2,510)$:



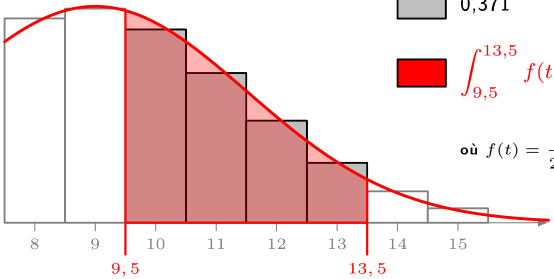
Calculons $P(10 \leqslant S \leqslant 13)$

Avec l'approximation normale $\mathcal{N}(9;\ 2,510)$:



Calculons $P(10 \leqslant S \leqslant 13)$

Avec l'approximation normale $\mathcal{N}(9;\, 2,510)$:



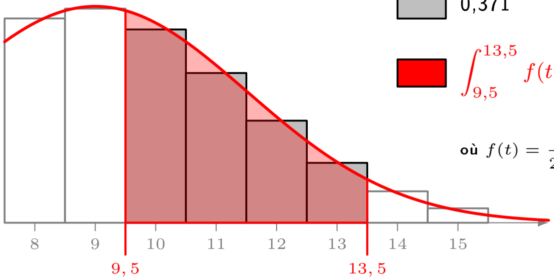
0,371

$$\int_{9,5}^{13,5} f(t)\mathrm{d}t \simeq 0,385$$

où $f(t) = \dfrac{1}{2,51\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-9}{2,51}\right)^2}$

Calculons $P(10 \leqslant S \leqslant 13)$

Avec l'approximation normale $\mathcal{N}(9; 2,510)$:



0,371

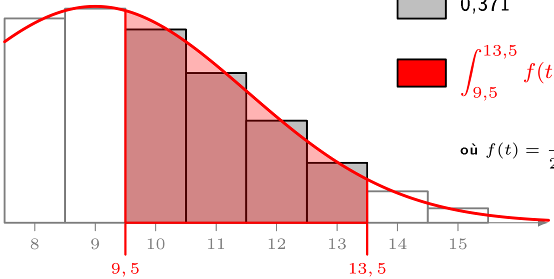
$$\int_{9,5}^{13,5} f(t)\mathrm{d}t \simeq 0,385$$

où $f(t) = \dfrac{1}{2,51\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-9}{2,51}\right)^2}$

$P(10 \leqslant S \leqslant 13) \simeq 0,385$

Calculons $P(10 \leqslant S \leqslant 13)$

Avec l'approximation normale $\mathcal{N}(9;\, 2,510)$:



0,371

$\int_{9,5}^{13,5} f(t)\mathrm{d}t \simeq 0,385$

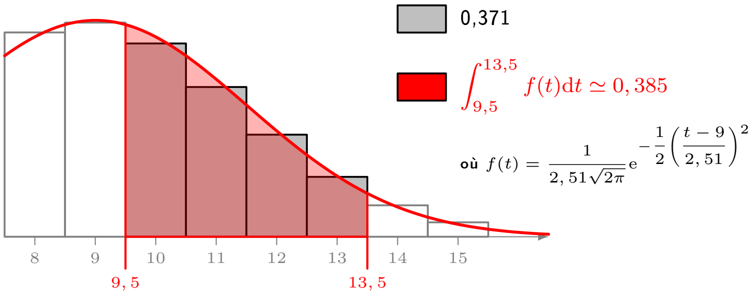
où $f(t) = \dfrac{1}{2,51\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-9}{2,51}\right)^2}$

$P(10 \leqslant S \leqslant 13) \simeq 0,385$

Remarque : L'erreur d'approximation est

Calculons $P(10 \leqslant S \leqslant 13)$

Avec l'approximation normale $\mathcal{N}(9;\, 2,510)$:



$P(10 \leqslant S \leqslant 13) \simeq 0,385$

Remarque : L'erreur d'approximation est $\left|0,385 - 0,371\right| = 0,014 = 1,4\%$.

Correction de continuité

Si X suit une loi binomiale et Z une loi normale de même espérance et de même écart-type (non nul), alors, on peut approcher :

Correction de continuité

Si X suit une loi binomiale et Z une loi normale de même espérance et de même écart-type (non nul), alors, on peut approcher :

- $P(X=k)$ par $P\left(k-\frac{1}{2}\leqslant Z\leqslant k+\frac{1}{2}\right)$;

Correction de continuité

Si X suit une loi binomiale et Z une loi normale de même espérance et de même écart-type (non nul), alors, on peut approcher :

- $P(X = k)$ par $P\left(k - \frac{1}{2} \leqslant Z \leqslant k + \frac{1}{2}\right)$;
- $P(a \leqslant X \leqslant b)$ par $P\left(a - \frac{1}{2} \leqslant Z \leqslant b + \frac{1}{2}\right)$;

Correction de continuité

Si X suit une loi binomiale et Z une loi normale de même espérance et de même écart-type (non nul), alors, on peut approcher :

- $P(X = k)$ par $P\left(k - \frac{1}{2} \leqslant Z \leqslant k + \frac{1}{2}\right)$;
- $P(a \leqslant X \leqslant b)$ par $P\left(a - \frac{1}{2} \leqslant Z \leqslant b + \frac{1}{2}\right)$;
- $P(a \leqslant X)$ par $P\left(a - \frac{1}{2} \leqslant Z\right)$;

Correction de continuité

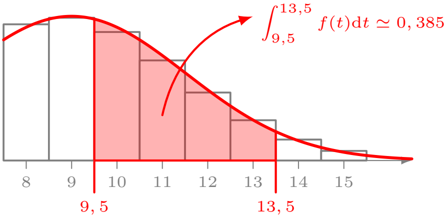
Si X suit une loi binomiale et Z une loi normale de même espérance et de même écart-type (non nul), alors, on peut approcher :

- $P(X = k)$ par $P\left(k - \frac{1}{2} \leqslant Z \leqslant k + \frac{1}{2}\right)$;
- $P(a \leqslant X \leqslant b)$ par $P\left(a - \frac{1}{2} \leqslant Z \leqslant b + \frac{1}{2}\right)$;
- $P(a \leqslant X)$ par $P\left(a - \frac{1}{2} \leqslant Z\right)$;
- $P(X \leqslant b)$ par $P\left(Z \leqslant b + \frac{1}{2}\right)$.

Rappel : La valeur exacte est donnée par la loi binomiale : $P(10 \leqslant S \leqslant 13) = 0,371$

Rappel : La valeur exacte est donnée par la loi binomiale : $P(10 \leqslant S \leqslant 13) = 0,371$

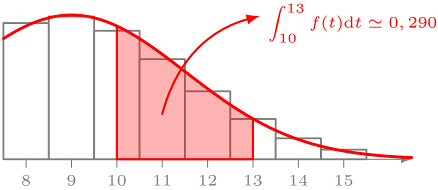
Avec correction de continuité :



L'erreur d'approximation est de :

$$|0,385 - 0,371| = 0,014 = 1,4\%.$$

Sans correction de continuité :



L'erreur d'approximation est de :

$$|0,290 - 0,371| = 0,81 = 8,1\%.$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

En pratique, on pourra faire l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale de même espérance et de même écart-type, lorsque l'on aura les conditions suivantes sont satisfaites :

$$n \geqslant 30 \text{ , } np \geqslant 5 \text{ , et } nq \geqslant 5$$

De Moivre est le premier, en 1733, à faire apparaître la loi normale comme loi limite d'une loi binomiale.

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

En pratique, on pourra faire l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale de même espérance et de même écart-type, lorsque l'on aura les conditions suivantes sont satisfaites :

$$n \geqslant 30 \text{ , } np \geqslant 5 \text{ , et } nq \geqslant 5$$

De Moivre est le premier, en 1733, à faire apparaître la loi normale comme loi limite d'une loi binomiale.

Remarque : dans notre étude, les conditions sont satisfaites :

$$n = 30 \geqslant 30,$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

En pratique, on pourra faire l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale de même espérance et de même écart-type, lorsque l'on aura les conditions suivantes sont satisfaites :

$$n \geqslant 30 \text{ , } np \geqslant 5 \text{ , et } nq \geqslant 5$$

De Moivre est le premier, en 1733, à faire apparaître la loi normale comme loi limite d'une loi binomiale.

Remarque : dans notre étude, les conditions sont satisfaites :

$$n = 30 \geqslant 30,\ np = 30 \times 0,3 = 9 \geqslant 5 \text{ et}$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

En pratique, on pourra faire l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale de même espérance et de même écart-type, lorsque l'on aura les conditions suivantes sont satisfaites :

$$n \geqslant 30 \text{ , } np \geqslant 5 \text{ , et } nq \geqslant 5$$

De Moivre est le premier, en 1733, à faire apparaître la loi normale comme loi limite d'une loi binomiale.

Remarque : dans notre étude, les conditions sont satisfaites :

$$n = 30 \geqslant 30,\ np = 30 \times 0,3 = 9 \geqslant 5 \text{ et } nq = 30 \times 0,7 = 21 \geqslant 5$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

En pratique, on pourra faire l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale de même espérance et de même écart-type, lorsque l'on aura les conditions suivantes sont satisfaites :

$$n \geqslant 30 \text{ , } np \geqslant 5 \text{ , et } nq \geqslant 5$$

De Moivre est le premier, en 1733, à faire apparaître la loi normale comme loi limite d'une loi binomiale.

Remarque : dans notre étude, les conditions sont satisfaites :

$$n = 30 \geqslant 30,\ np = 30 \times 0,3 = 9 \geqslant 5 \text{ et } nq = 30 \times 0,7 = 21 \geqslant 5$$

Mais que signifie $np = 9$?

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

En pratique, on pourra faire l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale de même espérance et de même écart-type, lorsque l'on aura les conditions suivantes sont satisfaites :

$$n \geqslant 30 \text{ , } np \geqslant 5 \text{ , et } nq \geqslant 5$$

De Moivre est le premier, en 1733, à faire apparaître la loi normale comme loi limite d'une loi binomiale.

Remarque : dans notre étude, les conditions sont satisfaites :

$$n = 30 \geqslant 30, \; np = 30 \times 0,3 = 9 \geqslant 5 \text{ et } nq = 30 \times 0,7 = 21 \geqslant 5$$

Mais que signifie $np = 9$? np est l'espérance de S.

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

En pratique, on pourra faire l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale de même espérance et de même écart-type, lorsque l'on aura les conditions suivantes sont satisfaites :

$$n \geqslant 30 \text{ , } np \geqslant 5 \text{ , et } nq \geqslant 5$$

De Moivre est le premier, en 1733, à faire apparaître la loi normale comme loi limite d'une loi binomiale.

Remarque : dans notre étude, les conditions sont satisfaites :

$$n = 30 \geqslant 30,\ np = 30 \times 0,3 = 9 \geqslant 5 \text{ et } nq = 30 \times 0,7 = 21 \geqslant 5$$

Mais que signifie $np = 9$? np est l'espérance de S. Donc, si on répète 30 fois l'expérience aléatoire de l'étude n° 2,

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

En pratique, on pourra faire l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale de même espérance et de même écart-type, lorsque l'on aura les conditions suivantes sont satisfaites :

$$n \geqslant 30 \ , \ np \geqslant 5 \ , \text{ et } nq \geqslant 5$$

De Moivre est le premier, en 1733, à faire apparaître la loi normale comme loi limite d'une loi binomiale.

Remarque : dans notre étude, les conditions sont satisfaites :

$$n = 30 \geqslant 30, \ np = 30 \times 0,3 = 9 \geqslant 5 \text{ et } nq = 30 \times 0,7 = 21 \geqslant 5$$

Mais que signifie $np = 9$? np est l'espérance de S. Donc, si on répète 30 fois l'expérience aléatoire de l'étude n° 2, ou si on prend un échantillons de 30 expériences aléatoires de l'étude n° 2,

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

En pratique, on pourra faire l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale de même espérance et de même écart-type, lorsque l'on aura les conditions suivantes sont satisfaites :

$$n \geqslant 30 \text{ , } np \geqslant 5 \text{ , et } nq \geqslant 5$$

De Moivre est le premier, en 1733, à faire apparaître la loi normale comme loi limite d'une loi binomiale.

Remarque : dans notre étude, les conditions sont satisfaites :

$$n = 30 \geqslant 30,\ np = 30 \times 0,3 = 9 \geqslant 5 \text{ et } nq = 30 \times 0,7 = 21 \geqslant 5$$

Mais que signifie $np = 9$? np est l'espérance de S. Donc, si on répète 30 fois l'expérience aléatoire de l'étude n° 2, ou si on prend un échantillons de 30 expériences aléatoires de l'étude n° 2, alors en moyenne $np = 9$ pièces seront trop chaudes, et $nq = 21$ ne le seront pas.

Objectif : Nous cherchons des informations sur une population à partir de l'étude d'un échantillon.

Objectif : Nous cherchons des informations sur une population à partir de l'étude d'un échantillon. Ce type de situation se rencontre fréquemment dans l'industrie.

Objectif : Nous cherchons des informations sur une population à partir de l'étude d'un échantillon. Ce type de situation se rencontre fréquemment dans l'industrie. Il n'est pas possible en général d'étudier la population entière,

Objectif : Nous cherchons des informations sur une population à partir de l'étude d'un échantillon. Ce type de situation se rencontre fréquemment dans l'industrie. Il n'est pas possible en général d'étudier la population entière, car cela pourrait prendre trop de temps,

Objectif : Nous cherchons des informations sur une population à partir de l'étude d'un échantillon. Ce type de situation se rencontre fréquemment dans l'industrie. Il n'est pas possible en général d'étudier la population entière, car cela pourrait prendre trop de temps, reviendrait trop cher, ou serait aberrant dans le cas de contrôle de qualité entraînant la destruction des pièces.

Objectif : Nous cherchons des informations sur une population à partir de l'étude d'un échantillon. Ce type de situation se rencontre fréquemment dans l'industrie. Il n'est pas possible en général d'étudier la population entière, car cela pourrait prendre trop de temps, reviendrait trop cher, ou serait aberrant dans le cas de contrôle de qualité entraînant la destruction des pièces.

Les statistiques descriptives donnent une réponse ponctuelle à cet objectif.

Objectif : Nous cherchons des informations sur une population à partir de l'étude d'un échantillon. Ce type de situation se rencontre fréquemment dans l'industrie. Il n'est pas possible en général d'étudier la population entière, car cela pourrait prendre trop de temps, reviendrait trop cher, ou serait aberrant dans le cas de contrôle de qualité entraînant la destruction des pièces.

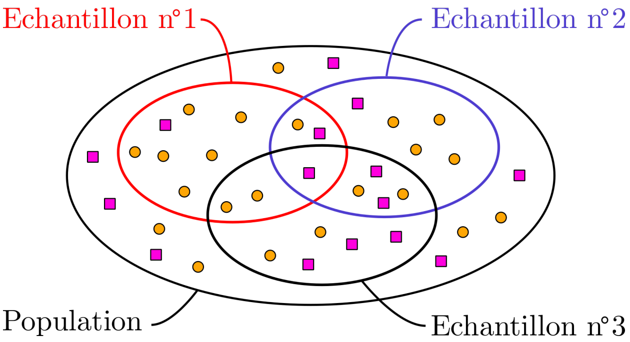
Les statistiques descriptives donnent une réponse ponctuelle à cet objectif. On calcule, par exemple, la moyenne sur l'échantillon, et on estime qu'il est à peu près le même sur la population.

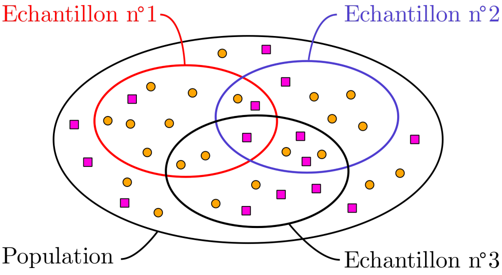
Objectif : Nous cherchons des informations sur une population à partir de l'étude d'un échantillon. Ce type de situation se rencontre fréquemment dans l'industrie. Il n'est pas possible en général d'étudier la population entière, car cela pourrait prendre trop de temps, reviendrait trop cher, ou serait aberrant dans le cas de contrôle de qualité entraînant la destruction des pièces.

Les statistiques descriptives donnent une réponse ponctuelle à cet objectif. On calcule, par exemple, la moyenne sur l'échantillon, et on estime qu'il est à peu près le même sur la population.

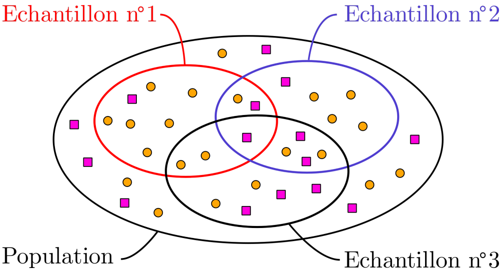
Les statistiques inférentielles offrent une réponse plus rigoureuse avec un contrôle sur l'erreur.

Etude n° 3 : Regardons cela de plus près. Considérons une population de carrés et de ronds, dont on cherche la proportion p de ronds à partir d'échantillons :

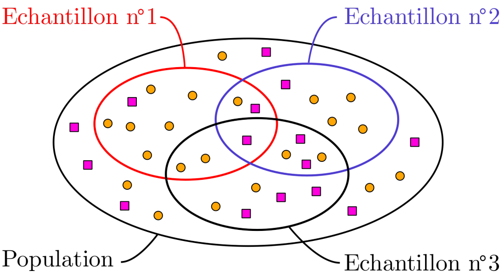




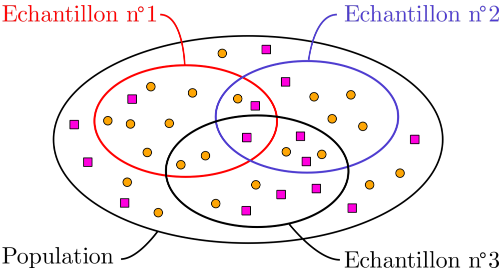
	Ronds	Carrés	Total	Proportion de ronds
Echantillon n° 1	9	3	12	0,75
Echantillon n° 2	7			
Echantillon n° 3				
Population				



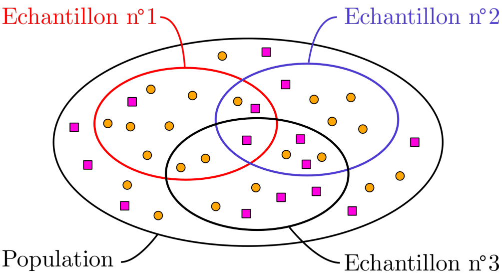
	Ronds	Carrés	Total	Proportion de ronds
Echantillon n° 1	9	3	12	0,75
Echantillon n° 2	7	**5**		
Echantillon n° 3				
Population				



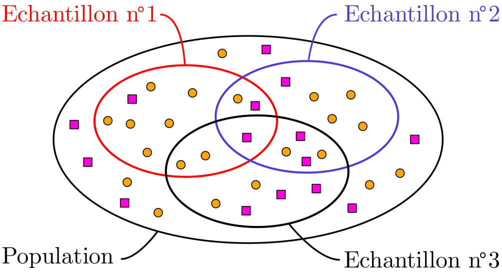
	Ronds	Carrés	Total	Proportion de ronds
Echantillon n° 1	9	3	12	0,75
Echantillon n° 2	7	**5**	**12**	
Echantillon n° 3				
Population				



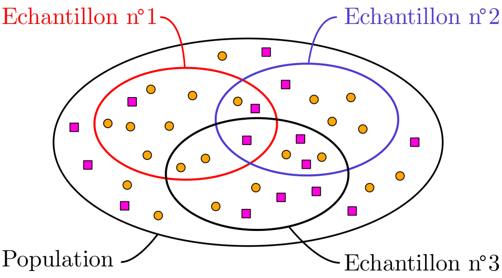
	Ronds	Carrés	Total	Proportion de ronds
Echantillon n° 1	9	3	12	0,75
Echantillon n° 2	7	**5**	**12**	**0,58**
Echantillon n° 3				
Population				



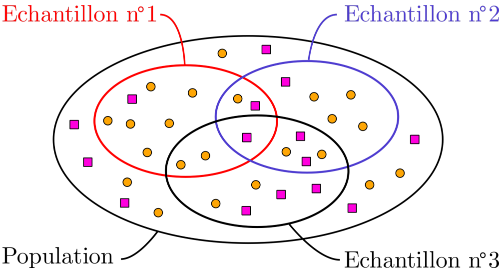
	Ronds	Carrés	Total	Proportion de ronds
Echantillon n° 1	9	3	12	0,75
Echantillon n° 2	7	**5**	**12**	**0,58**
Echantillon n° 3	**6**			
Population				



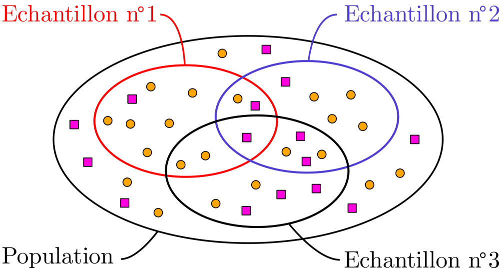
	Ronds	Carrés	Total	Proportion de ronds
Echantillon n° 1	9	3	12	0,75
Echantillon n° 2	7	**5**	**12**	**0,58**
Echantillon n° 3	**6**	**6**		
Population				



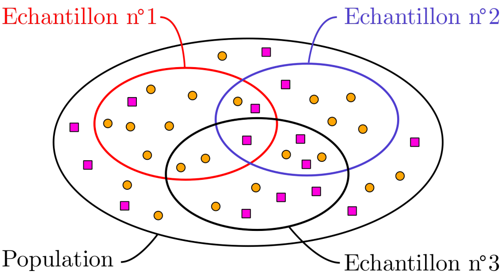
	Ronds	Carrés	Total	Proportion de ronds
Echantillon n° 1	9	3	12	0,75
Echantillon n° 2	7	**5**	**12**	**0,58**
Echantillon n° 3	**6**	**6**	**12**	
Population				



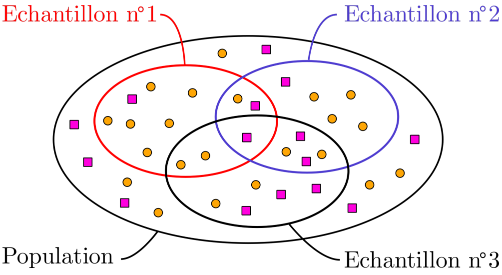
	Ronds	Carrés	Total	Proportion de ronds
Echantillon n° 1	9	3	12	0,75
Echantillon n° 2	7	**5**	**12**	**0,58**
Echantillon n° 3	**6**	**6**	**12**	**0,50**
Population				



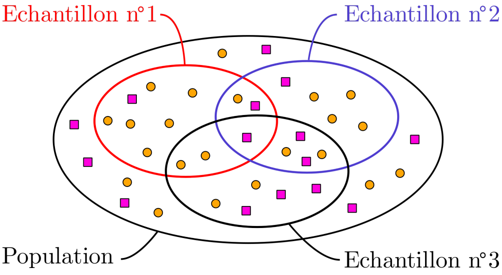
	Ronds	Carrés	Total	Proportion de ronds
Echantillon n° 1	9	3	12	0,75
Echantillon n° 2	7	**5**	**12**	**0,58**
Echantillon n° 3	**6**	**6**	**12**	**0,50**
Population	**22**			



	Ronds	Carrés	Total	Proportion de ronds
Echantillon n° 1	9	3	12	0,75
Echantillon n° 2	7	5	12	0,58
Echantillon n° 3	6	6	12	0,50
Population	22	15		



	Ronds	Carrés	Total	Proportion de ronds
Echantillon n° 1	9	3	12	0,75
Echantillon n° 2	7	**5**	**12**	**0,58**
Echantillon n° 3	**6**	**6**	**12**	**0,50**
Population	**22**	**15**	**37**	



	Ronds	Carrés	Total	Proportion de ronds
Echantillon n° 1	9	3	12	0,75
Echantillon n° 2	7	**5**	**12**	**0,58**
Echantillon n° 3	**6**	**6**	**12**	**0,50**
Population	**22**	**15**	**37**	**0,59**

	Ronds	Carrés	Total	Proportion de ronds
Echantillon n° 1	9	3	12	0,75
Echantillon n° 2	7	**5**	**12**	**0,58**
Echantillon n° 3	**6**	**6**	**12**	**0,50**
Population	**22**	**15**	**37**	**0,59**

On constate qu'aucun des échantillons ne donne la proportion exacte de ronds. En particulier, l'échantillon n° 1 n'est pas **représentatif** de la population.

1. Modélisation de la situation

On suppose que les échantillons aient tous **le même** nombre $n = 50$ d'individus et que les conditions soient réunies pour utiliser le théorème de la limite centrale, en particulier $n \geqslant$

1. Modélisation de la situation

On suppose que les échantillons aient tous **le même** nombre $n = 50$ d'individus et que les conditions soient réunies pour utiliser le théorème de la limite centrale, en particulier $n \geqslant \mathbf{30}$.

1. Modélisation de la situation

On suppose que les échantillons aient tous **le même** nombre $n = 50$ d'individus et que les conditions soient réunies pour utiliser le théorème de la limite centrale, en particulier $n \geqslant \mathbf{30}$.

Notre objectif est d'estimer la proportion p de la population.

1. Modélisation de la situation

On suppose que les échantillons aient tous **le même** nombre $n = 50$ d'individus et que les conditions soient réunies pour utiliser le théorème de la limite centrale, en particulier $n \geqslant \mathbf{30}$.

Notre objectif est d'estimer la proportion p de la population.

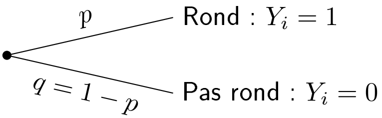
Dans un échantillon de n individus, chacun d'eux se comporte comme l'épreuve de Bernoulli suivante :

1. Modélisation de la situation

On suppose que les échantillons aient tous **le même** nombre $n = 50$ d'individus et que les conditions soient réunies pour utiliser le théorème de la limite centrale, en particulier $n \geqslant \mathbf{30}$.

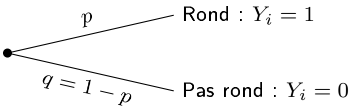
Notre objectif est d'estimer la proportion p de la population.

Dans un échantillon de n individus, chacun d'eux se comporte comme l'épreuve de Bernoulli suivante :



☞ $E(Y_i) = p$

☞ $V(Y_i) = pq$



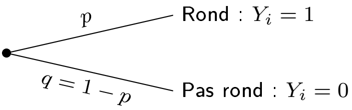
☞ $E(Y_i) = p$

☞ $V(Y_i) = pq$

Le nombre d'individus ronds dans un échantillon est la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

S suit une loi

II. Intervalles de confiances pour une proportion.



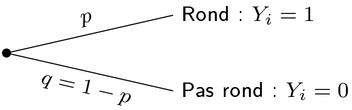
☞ $E(Y_i) = p$

☞ $V(Y_i) = pq$

Le nombre d'individus ronds dans un échantillon est la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

S suit une loi $\boldsymbol{\mathcal{B}(n, p)}$

.



☞ $E(Y_i) = p$

☞ $V(Y_i) = pq$

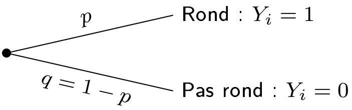
Le nombre d'individus ronds dans un échantillon est la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

S suit une loi $\boldsymbol{\mathcal{B}(n, p)}$

.

La proportion d'individus ronds dans un échantillon est la variable aléatoire $\overline{P} = \dfrac{S}{n} =$

II. Intervalles de confiances pour une proportion.



☞ $E(Y_i) = p$

☞ $V(Y_i) = pq$

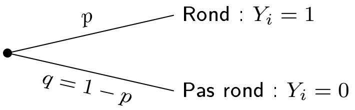
Le nombre d'individus ronds dans un échantillon est la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

S suit une loi $\boldsymbol{\mathcal{B}(n,p)}$

.

La proportion d'individus ronds dans un échantillon est la variable aléatoire $\overline{P} = \frac{S}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

II. Intervalles de confiances pour une proportion.



☞ $E(Y_i) = p$

☞ $V(Y_i) = pq$

Le nombre d'individus ronds dans un échantillon est la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

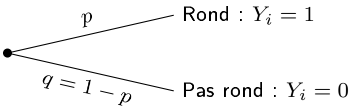
$$S \text{ suit une loi } \boldsymbol{\mathcal{B}(n, p)}$$

.

La proportion d'individus ronds dans un échantillon est la variable aléatoire $\overline{P} = \frac{S}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

☞ $E(\overline{P}) = \frac{1}{n}E(S) = \frac{np}{n} = p$

II. Intervalles de confiances pour une proportion.



☞ $E(Y_i) = p$

☞ $V(Y_i) = pq$

Le nombre d'individus ronds dans un échantillon est la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

S suit une loi $\boldsymbol{\mathcal{B}(n, p)}$

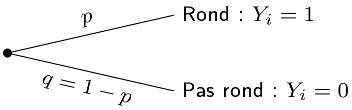
.

La proportion d'individus ronds dans un échantillon est la variable aléatoire $\overline{P} = \dfrac{S}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

☞ $E(\overline{P}) = \dfrac{1}{n}E(S) = \dfrac{np}{n} = p$

☞ $V(\overline{P}) = \dfrac{1}{n^2}V(S) = \dfrac{npq}{n^2} = \dfrac{pq}{n}$

II. Intervalles de confiances pour une proportion.



☞ $E(Y_i) = p$

☞ $V(Y_i) = pq$

Le nombre d'individus ronds dans un échantillon est la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

$$S \text{ suit une loi } \boldsymbol{\mathcal{B}(n,p)}$$

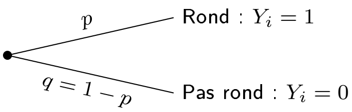
.

La proportion d'individus ronds dans un échantillon est la variable aléatoire $\overline{P} = \dfrac{S}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

☞ $E(\overline{P}) = \dfrac{1}{n}E(S) = \dfrac{np}{n} = p$

☞ $V(\overline{P}) = \dfrac{1}{n^2}V(S) = \dfrac{npq}{n^2} = \dfrac{pq}{n}$

Ainsi, d'après le théorème de la limite centrale, $\overline{P}$ suit approximativement une loi



☞ $E(Y_i) = p$

☞ $V(Y_i) = pq$

Le nombre d'individus ronds dans un échantillon est la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

S suit une loi $\boldsymbol{\mathcal{B}(n,p)}$

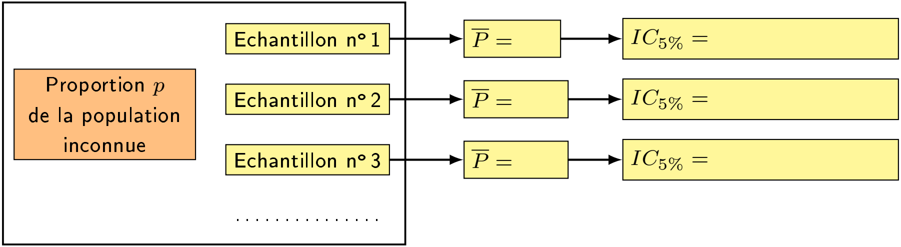
.

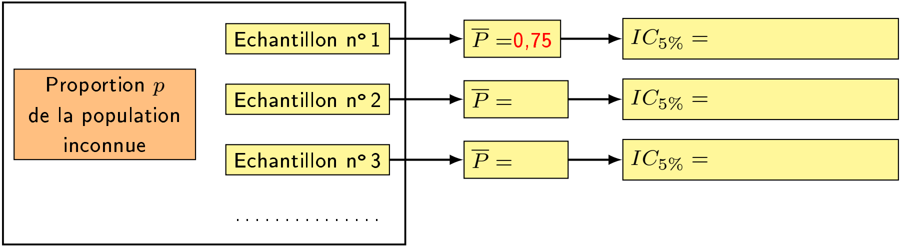
La proportion d'individus ronds dans un échantillon est la variable aléatoire $\overline{P} = \dfrac{S}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

☞ $E(\overline{P}) = \dfrac{1}{n}E(S) = \dfrac{np}{n} = p$

☞ $V(\overline{P}) = \dfrac{1}{n^2}V(S) = \dfrac{npq}{n^2} = \dfrac{pq}{n}$

Ainsi, d'après le théorème de la limite centrale, $\overline{P}$ suit approximativement une loi $\mathcal{N}\left(p; \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)$


Proportion p
de la population
inconnue
Echantillon n° 1
Echantillon n° 2
Echantillon n° 3
....
$\overline{P} =$
$\overline{P} =$
$\overline{P} =$
$IC_{5\%} =$
$IC_{5\%} =$
$IC_{5\%} =$


Proportion p
de la population
inconnue
Echantillon n° 1
Echantillon n° 2
Echantillon n° 3
. . . .
$\overline{P}$ =0,75
$\overline{P} =$
$\overline{P} =$
$IC_{5\%} =$
$IC_{5\%} =$
$IC_{5\%} =$

II. Intervalles de confiances pour une proportion.

Proportion p de la population inconnue

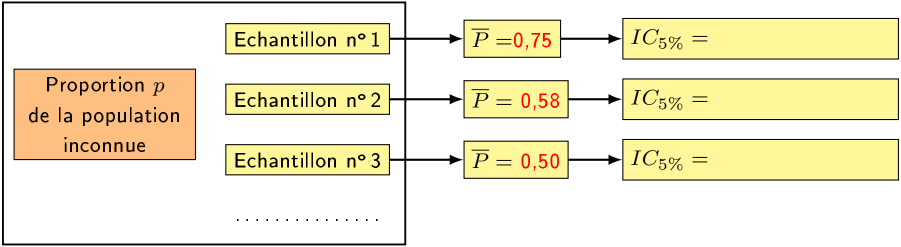
Echantillon n° 1 → $\overline{P}$ =0,75 → $IC_{5\%} =$

Echantillon n° 2 → $\overline{P} =$ 0,58 → $IC_{5\%} =$

Echantillon n° 3 → $\overline{P} =$ → $IC_{5\%} =$

. . . .

II. Intervalles de confiances pour une proportion.

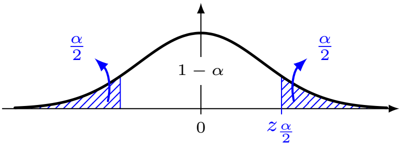


La variable aléatoire $Z = \dfrac{\overline{P} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0;\, 1)$.

La variable aléatoire $Z = \dfrac{\overline{P} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0; 1)$. Pour un α donné, il existe un $z_{\frac{\alpha}{2}}$ tel que :

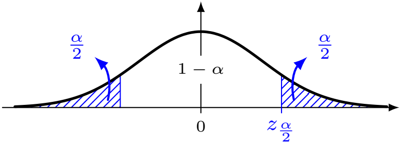
La variable aléatoire $Z = \dfrac{\overline{P} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0; 1)$. Pour un α donné, il existe un $z_{\frac{\alpha}{2}}$ tel que :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{P}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \geqslant 1 - \alpha$$



La variable aléatoire $Z = \dfrac{\overline{P} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0;\,1)$. Pour un α donné, il existe un $z_{\frac{\alpha}{2}}$ tel que :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{P}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \geqslant 1-\alpha$$

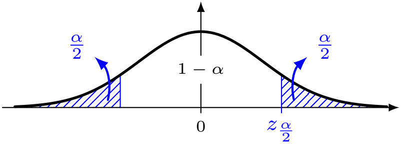


$$P\left(\overline{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \leqslant p \leqslant \overline{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \geqslant 1-\alpha$$

Prenons $\alpha = 5\%$, on sait que $z_{\frac{\alpha}{2}} =$

La variable aléatoire $Z = \dfrac{\overline{P} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0;\,1)$. Pour un α donné, il existe un $z_{\frac{\alpha}{2}}$ tel que :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{P}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \geqslant 1-\alpha$$

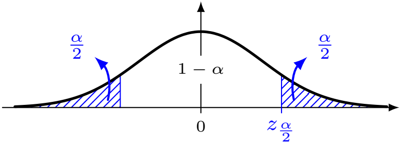


$$P\left(\overline{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \leqslant p \leqslant \overline{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \geqslant 1-\alpha$$

Prenons $\alpha = 5\%$, on sait que $z_{\frac{\alpha}{2}}$ =1,96 et on calcule $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} =$

La variable aléatoire $Z = \dfrac{\overline{P} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0;\,1)$. Pour un α donné, il existe un $z_{\frac{\alpha}{2}}$ tel que :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{P}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \geqslant 1-\alpha$$

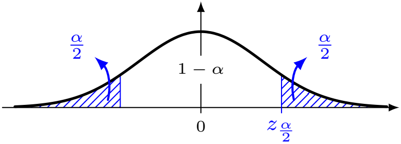


$$P\left(\overline{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \leqslant p \leqslant \overline{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \geqslant 1-\alpha$$

Prenons $\alpha = 5\%$, on sait que $z_{\frac{\alpha}{2}}$ =1,96 et on calcule $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,59\times 0,41}{50}} \simeq$

La variable aléatoire $Z = \dfrac{\overline{P} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0;\, 1)$. Pour un α donné, il existe un $z_{\frac{\alpha}{2}}$ tel que :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{P}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \geqslant 1 - \alpha$$

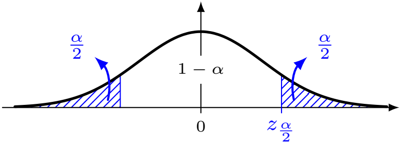


$$P\left(\overline{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \leqslant p \leqslant \overline{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \geqslant 1 - \alpha$$

Prenons $\alpha = 5\%$, on sait que $z_{\frac{\alpha}{2}}$ =1,96 et on calcule $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,59\times 0,41}{50}} \simeq 0,14$

La variable aléatoire $Z = \dfrac{\overline{P} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0;\, 1)$. Pour un α donné, il existe un $z_{\frac{\alpha}{2}}$ tel que :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{P}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \geqslant 1 - \alpha$$



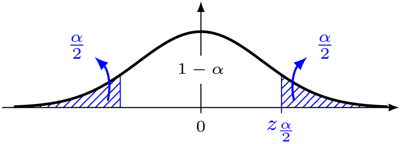
$$P\left(\overline{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \leqslant p \leqslant \overline{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \geqslant 1 - \alpha$$

Prenons $\alpha = 5\%$, on sait que $z_{\frac{\alpha}{2}}$ =1,96 et on calcule $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0{,}59\times 0{,}41}{50}} \simeq 0,14$

$$IC_{5\%} = \left[\overline{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\ ,\ \overline{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right] \simeq$$

La variable aléatoire $Z = \dfrac{\overline{P} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0;\, 1)$. Pour un α donné, il existe un $z_{\frac{\alpha}{2}}$ tel que :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{P}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \geqslant 1-\alpha$$



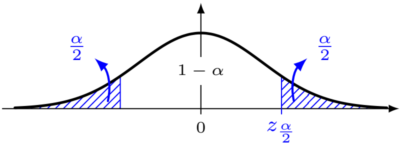
$$P\left(\overline{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \leqslant p \leqslant \overline{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \geqslant 1-\alpha$$

Prenons $\alpha = 5\%$, on sait que $z_{\frac{\alpha}{2}}$ =1,96 et on calcule $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0{,}59\times 0{,}41}{50}} \simeq 0,14$

$$IC_{5\%} = \left[\overline{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\ ,\ \overline{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right] \simeq \left[\overline{P} - 0,14\ ,\ \overline{P} + 0,14\right]$$

La variable aléatoire $Z = \dfrac{\overline{P} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0;\,1)$. Pour un α donné, il existe un $z_{\frac{\alpha}{2}}$ tel que :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{P}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \geqslant 1 - \alpha$$



$$P\left(\overline{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \leqslant p \leqslant \overline{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \geqslant 1 - \alpha$$

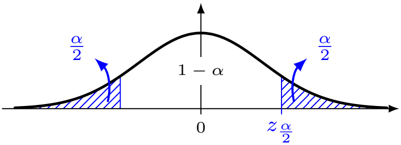
Prenons $\alpha = 5\%$, on sait que $z_{\frac{\alpha}{2}}$ =1,96 et on calcule $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0{,}59\times 0{,}41}{50}} \simeq 0,14$

$$IC_{5\%} = \left[\overline{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\ ,\ \overline{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right] \simeq \left[\overline{P} - 0,14\ ,\ \overline{P} + 0,14\right]$$

$IC_{5\%}$ est un

La variable aléatoire $Z = \dfrac{\overline{P} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0;\,1)$. Pour un α donné, il existe un $z_{\frac{\alpha}{2}}$ tel que :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{P}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \geqslant 1-\alpha$$



$$P\left(\overline{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \leqslant p \leqslant \overline{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \geqslant 1-\alpha$$

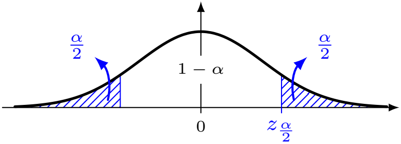
Prenons $\alpha = 5\%$, on sait que $z_{\frac{\alpha}{2}}$ =1,96 et on calcule $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0{,}59\times 0{,}41}{50}} \simeq 0,14$

$$IC_{5\%} = \left[\overline{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\ ,\ \overline{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right] \simeq [\overline{P} - 0,14\ ,\ \overline{P} + 0,14]$$

$IC_{5\%}$ est un **intervalle de confiance**.

La variable aléatoire $Z = \dfrac{\overline{P} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0;\, 1)$. Pour un α donné, il existe un $z_{\frac{\alpha}{2}}$ tel que :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{P}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \geqslant 1 - \alpha$$

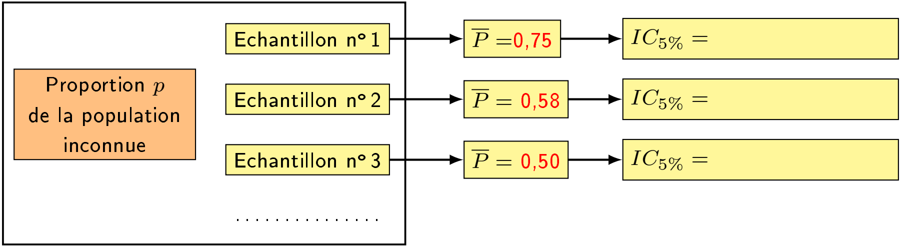


$$P\left(\overline{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \leqslant p \leqslant \overline{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \geqslant 1 - \alpha$$

Prenons $\alpha = 5\%$, on sait que $z_{\frac{\alpha}{2}}$ =1,96 et on calcule $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,59\times 0,41}{50}} \simeq 0,14$

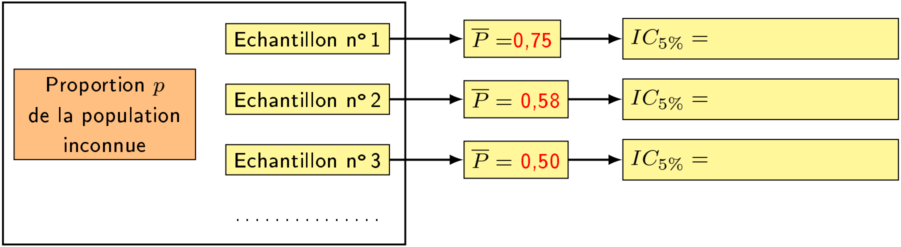
$$IC_{5\%} = \left[\overline{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\ ,\ \overline{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right] \simeq \left[\overline{P} - 0,14\ ,\ \overline{P} + 0,14\right]$$

$IC_{5\%}$ est un **intervalle de confiance**. Ce n'est plus une estimation ponctuelle, mais par intervalle.



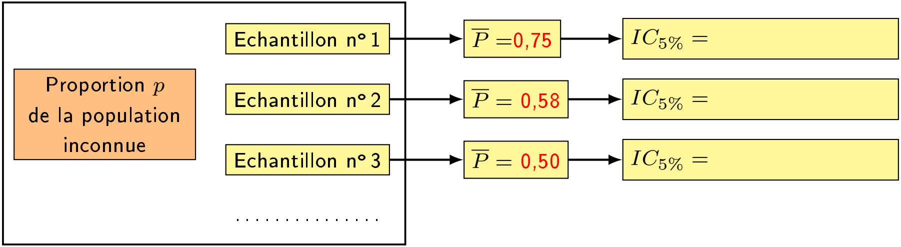
- Si $\overline{P} = 0,75$ alors

II. Intervalles de confiances pour une proportion.

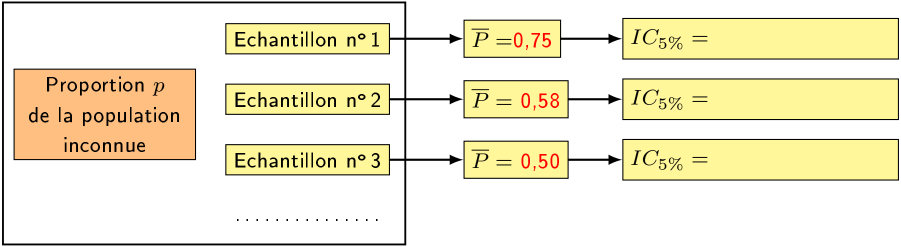


- Si $\overline{P} = 0,75$ alors $IC_{5\%} = \left[0,75 - 0,14\,;\,0,75 + 0,14\right] =$

II. Intervalles de confiances pour une proportion.



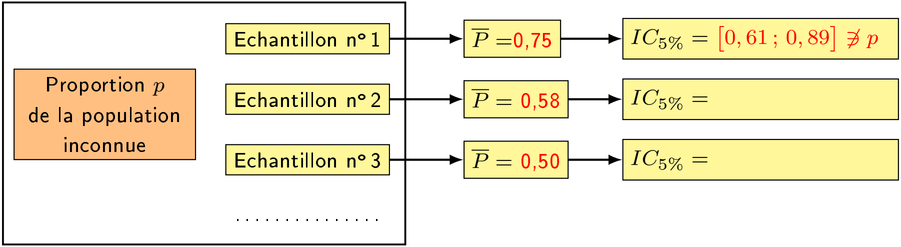
- Si $\overline{P} = 0,75$ alors $IC_{5\%} = [0,75 - 0,14\,;\, 0,75 + 0,14] = [0,61\,;\, 0,89]$



- Si $\overline{P} = 0,75$ alors $IC_{5\%} = \left[0,75 - 0,14\,;\, 0,75 + 0,14\right] = \left[0,61\,;\, 0,89\right]$

  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59 \notin \left[0,61\,;\, 0,89\right]$.

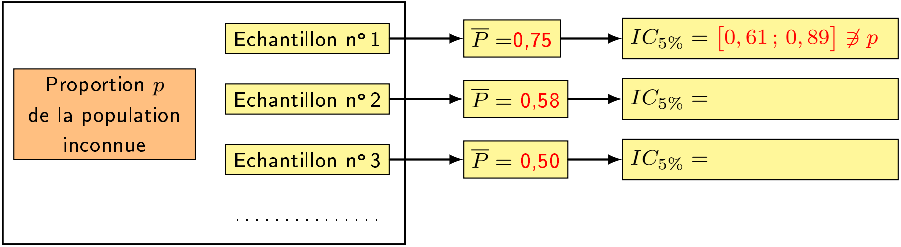
II. Intervalles de confiances pour une proportion.



- Si $\overline{P} = 0,75$ alors $IC_{5\%} = [0,75 - 0,14\,;\,0,75 + 0,14] = [0,61\,;\,0,89]$

  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59 \notin [0,61\,;\,0,89]$.

  L'échantillon n° 1 n'est pas représentatif de la population.



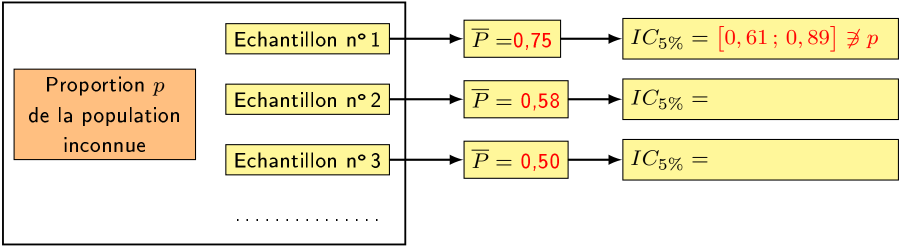
- Si $\overline{P} = 0,75$ alors $IC_{5\%} = [0,75 - 0,14\,;\,0,75 + 0,14] = [0,61\,;\,0,89]$

  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59 \notin [0,61\,;\,0,89]$.

  L'échantillon n° 1 n'est pas représentatif de la population.

- Si $\overline{P} = 0,58$ alors

II. Intervalles de confiances pour une proportion.

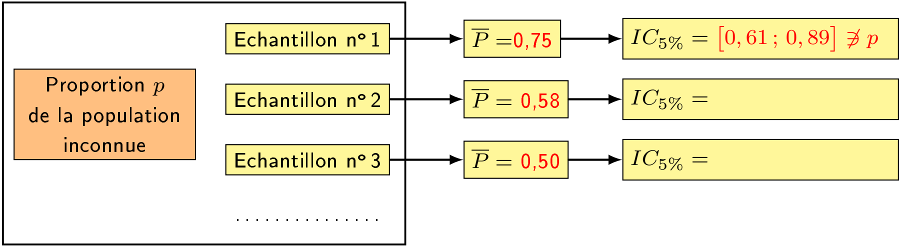


- Si $\overline{P} = 0,75$ alors $IC_{5\%} = [0,75 - 0,14\,;\,0,75 + 0,14] = [0,61\,;\,0,89]$

  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59 \notin [0,61\,;\,0,89]$.
  L'échantillon n° 1 n'est pas représentatif de la population.

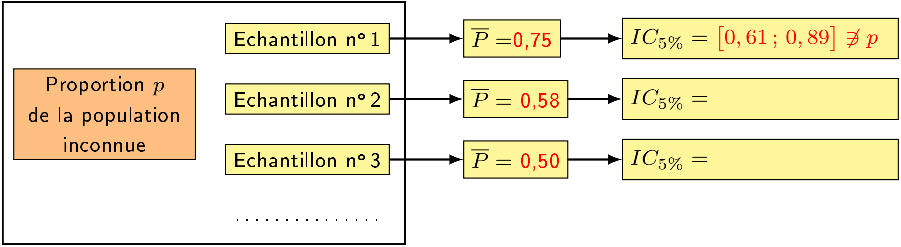
- Si $\overline{P} = 0,58$ alors $IC_{5\%} = [0,58 - 0,14\,;\,0,58 + 0,14] =$

II. Intervalles de confiances pour une proportion.



- Si $\overline{P} = 0,75$ alors $IC_{5\%} = \left[0,75 - 0,14\,;\,0,75 + 0,14\right] = \left[0,61\,;\,0,89\right]$
  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59 \notin \left[0,61\,;\,0,89\right]$.
  L'échantillon n° 1 n'est pas représentatif de la population.
- Si $\overline{P} = 0,58$ alors $IC_{5\%} = \left[0,58 - 0,14\,;\,0,58 + 0,14\right] = \left[0,44\,;\,0,72\right]$

II. Intervalles de confiances pour une proportion.



- Si $\overline{P} = 0,75$ alors $IC_{5\%} = \left[0,75 - 0,14\,;\,0,75 + 0,14\right] = \left[0,61\,;\,0,89\right]$

  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59 \notin \left[0,61\,;\,0,89\right]$.
  L'échantillon n° 1 n'est pas représentatif de la population.

- Si $\overline{P} = 0,58$ alors $IC_{5\%} = \left[0,58 - 0,14\,;\,0,58 + 0,14\right] = \left[0,44\,;\,0,72\right]$

  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59 \in \left[0,44\,;\,0,72\right]$.

II. Intervalles de confiances pour une proportion.

Proportion p de la population inconnue

Echantillon n° 1 → $\overline{P}$ =0,75 → $IC_{5\%} = [0,61\,;\,0,89] \not\ni p$

Echantillon n° 2 → $\overline{P}$ = 0,58 → $IC_{5\%} =$

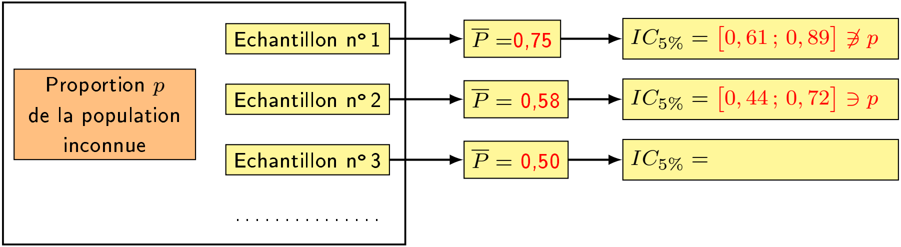
Echantillon n° 3 → $\overline{P}$ = 0,50 → $IC_{5\%} =$

. . . .

- Si $\overline{P} = 0,75$ alors $IC_{5\%} = [0,75 - 0,14\,;\,0,75 + 0,14] = [0,61\,;\,0,89]$
  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59 \notin [0,61\,;\,0,89]$.
  L'échantillon n° 1 n'est pas représentatif de la population.

- Si $\overline{P} = 0,58$ alors $IC_{5\%} = [0,58 - 0,14\,;\,0,58 + 0,14] = [0,44\,;\,0,72]$
  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59 \in [0,44\,;\,0,72]$.
  L'échantillon n° 2 est représentatif de la population.

II. Intervalles de confiances pour une proportion.



- Si $\overline{P} = 0,75$ alors $IC_{5\%} = [0,75 - 0,14\,;\,0,75 + 0,14] = [0,61\,;\,0,89]$

  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59 \notin [0,61\,;\,0,89]$.
  L'échantillon n° 1 n'est pas représentatif de la population.

- Si $\overline{P} = 0,58$ alors $IC_{5\%} = [0,58 - 0,14\,;\,0,58 + 0,14] = [0,44\,;\,0,72]$

  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59 \in [0,44\,;\,0,72]$.
  L'échantillon n° 2 est représentatif de la population.

II. Intervalles de confiances pour une proportion.

Proportion p de la population inconnue

Echantillon n° 1 → $\overline{P}$ =0,75 → $IC_{5\%} = [0,61\,;\,0,89] \not\ni p$

Echantillon n° 2 → $\overline{P}$ = 0,58 → $IC_{5\%} = [0,44\,;\,0,72] \ni p$

Echantillon n° 3 → $\overline{P}$ = 0,50 → $IC_{5\%} =$

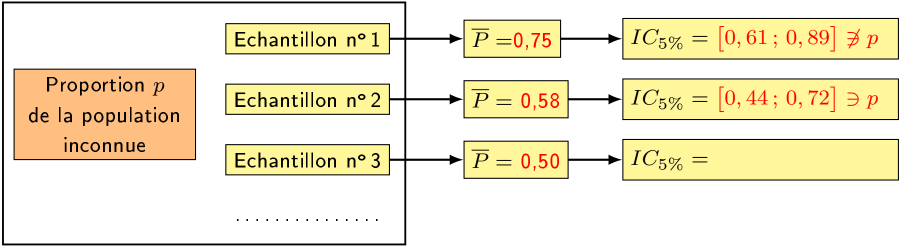
. . . .

- Si $\overline{P} = 0,75$ alors $IC_{5\%} = [0,75 - 0,14\,;\,0,75 + 0,14] = [0,61\,;\,0,89]$
  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59 \notin [0,61\,;\,0,89]$.
  L'échantillon n° 1 n'est pas représentatif de la population.

- Si $\overline{P} = 0,58$ alors $IC_{5\%} = [0,58 - 0,14\,;\,0,58 + 0,14] = [0,44\,;\,0,72]$
  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59 \in [0,44\,;\,0,72]$.
  L'échantillon n° 2 est représentatif de la population.

- Si $\overline{P} = 0,50$ alors

II. Intervalles de confiances pour une proportion.



- Si $\overline{P} = 0,75$ alors $IC_{5\%} = [0,75 - 0,14\,;\,0,75 + 0,14] = [0,61\,;\,0,89]$

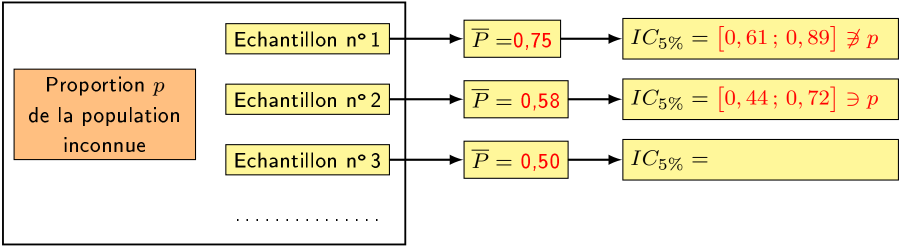
  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59 \notin [0,61\,;\,0,89]$.
  L'échantillon n° 1 n'est pas représentatif de la population.

- Si $\overline{P} = 0,58$ alors $IC_{5\%} = [0,58 - 0,14\,;\,0,58 + 0,14] = [0,44\,;\,0,72]$

  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59 \in [0,44\,;\,0,72]$.
  L'échantillon n° 2 est représentatif de la population.

- Si $\overline{P} = 0,50$ alors $IC_{5\%} = [0,50 - 0,14\,;\,0,50 + 0,14] =$

II. Intervalles de confiances pour une proportion.



- Si $\overline{P} = 0,75$ alors $IC_{5\%} = [0,75 - 0,14\,;\,0,75 + 0,14] = [0,61\,;\,0,89]$

  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59 \notin [0,61\,;\,0,89]$.
  L'échantillon n° 1 n'est pas représentatif de la population.

- Si $\overline{P} = 0,58$ alors $IC_{5\%} = [0,58 - 0,14\,;\,0,58 + 0,14] = [0,44\,;\,0,72]$

  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59 \in [0,44\,;\,0,72]$.
  L'échantillon n° 2 est représentatif de la population.

- Si $\overline{P} = 0,50$ alors $IC_{5\%} = [0,50 - 0,14\,;\,0,50 + 0,14] = [0,36\,;\,0,64]$

II. Intervalles de confiances pour une proportion.

Proportion p de la population inconnue

Echantillon n° 1 $\longrightarrow$ $\overline{P}$ =0,75 $\longrightarrow$ $IC_{5\%} = [0,61\,;\,0,89] \not\ni p$

Echantillon n° 2 $\longrightarrow$ $\overline{P}$ = 0,58 $\longrightarrow$ $IC_{5\%} = [0,44\,;\,0,72] \ni p$

Echantillon n° 3 $\longrightarrow$ $\overline{P}$ = 0,50 $\longrightarrow$ $IC_{5\%} = [0,36\,;\,0,64] \ni p$

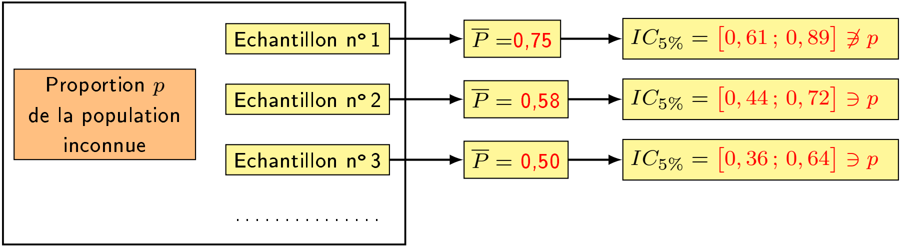
. . . .

- Si $\overline{P} = 0,75$ alors $IC_{5\%} = [0,75 - 0,14\,;\,0,75 + 0,14] = [0,61\,;\,0,89]$
  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59 \notin [0,61\,;\,0,89]$.
  L'échantillon n° 1 n'est pas représentatif de la population.

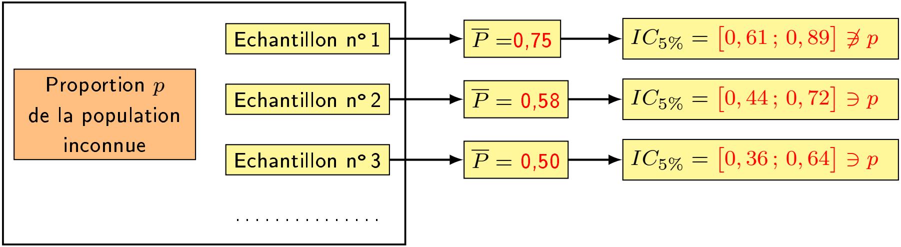
- Si $\overline{P} = 0,58$ alors $IC_{5\%} = [0,58 - 0,14\,;\,0,58 + 0,14] = [0,44\,;\,0,72]$
  On constate que la proportion cherchée $p = 0,59 \in [0,44\,;\,0,72]$.
  L'échantillon n° 2 est représentatif de la population.

- Si $\overline{P} = 0,50$ alors $IC_{5\%} = [0,50 - 0,14\,;\,0,50 + 0,14] = [0,36\,;\,0,64]$

II. Intervalles de confiances pour une proportion.



On remarque que le p n'est pas dans l'intervalle de confiance du 1$^{\text{er}}$ échantillon, mais dans ceux des deux autres.

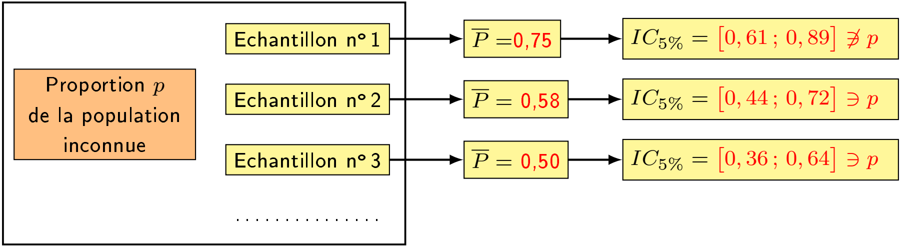


On remarque que le p n'est pas dans l'intervalle de confiance du 1$^{\text{er}}$ échantillon, mais dans ceux des deux autres. Le premier intervalle n'était pas représentatif de la population.

Proportion p de la population inconnue	Echantillon n° 1	$\overline{P}$ = 0,75	$IC_{5\%} = [0,61\,;\,0,89] \not\ni p$
	Echantillon n° 2	$\overline{P}$ = 0,58	$IC_{5\%} = [0,44\,;\,0,72] \ni p$
	Echantillon n° 3	$\overline{P}$ = 0,50	$IC_{5\%} = [0,36\,;\,0,64] \ni p$
	....		

On remarque que le p n'est pas dans l'intervalle de confiance du 1$^{\text{er}}$ échantillon, mais dans ceux des deux autres. Le premier intervalle n'était pas représentatif de la population. L'estimation est fausse pour cet échantillon.

II. Intervalles de confiances pour une proportion.



On remarque que le p n'est pas dans l'intervalle de confiance du 1er échantillon, mais dans ceux des deux autres. Le premier intervalle n'était pas représentatif de la population. L'estimation est fausse pour cet échantillon. On avait $\alpha = 5\%$ de chance de choisir un échantillon dont l'intervalle de confiance ne contienne pas p,

II. Intervalles de confiances pour une proportion.

Proportion p de la population inconnue

Echantillon n° 1 $\longrightarrow$ $\overline{P}=0{,}75$ $\longrightarrow$ $IC_{5\%} = [0,61\,;\,0,89] \not\ni p$

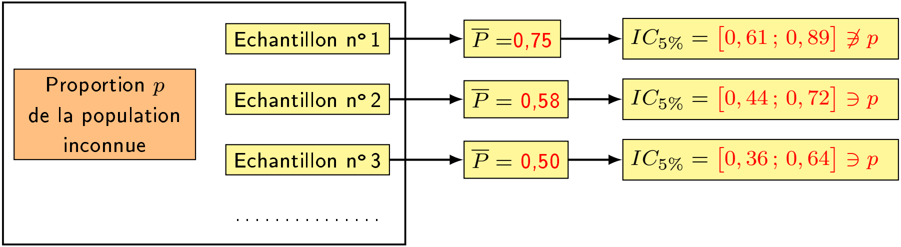
Echantillon n° 2 $\longrightarrow$ $\overline{P}=0{,}58$ $\longrightarrow$ $IC_{5\%} = [0,44\,;\,0,72] \ni p$

Echantillon n° 3 $\longrightarrow$ $\overline{P}=0{,}50$ $\longrightarrow$ $IC_{5\%} = [0,36\,;\,0,64] \ni p$

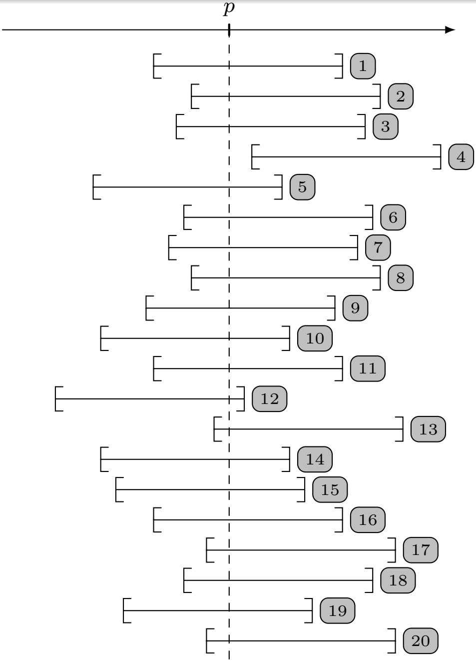
. . . .

On remarque que le p n'est pas dans l'intervalle de confiance du 1$^{\text{er}}$ échantillon, mais dans ceux des deux autres. Le premier intervalle n'était pas représentatif de la population. L'estimation est fausse pour cet échantillon. On avait $\alpha = 5\%$ de chance de choisir un échantillon dont l'intervalle de confiance ne contienne pas p, autrement dit, $1-\alpha = 95\%$ de chances de choisir un échantillon dont l'intervalle de confiance contienne p.

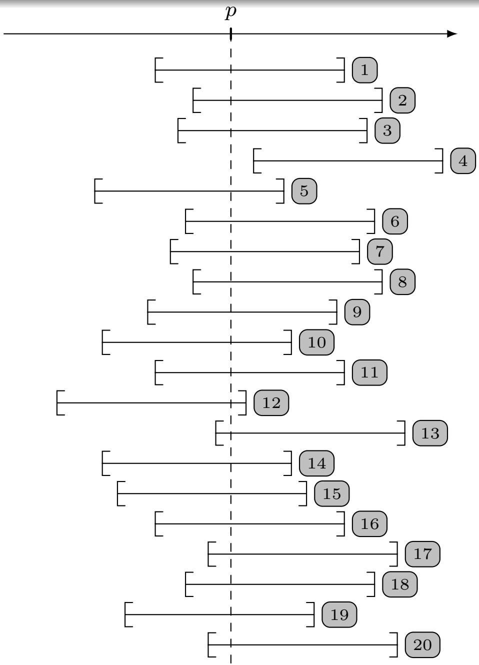
II. Intervalles de confiances pour une proportion.



On remarque que le p n'est pas dans l'intervalle de confiance du 1er échantillon, mais dans ceux des deux autres. Le premier intervalle n'était pas représentatif de la population. L'estimation est fausse pour cet échantillon. On avait $\alpha = 5\%$ de chance de choisir un échantillon dont l'intervalle de confiance ne contienne pas p, autrement dit, $1 - \alpha = 95\%$ de chances de choisir un échantillon dont l'intervalle de confiance contienne p. $1 - \alpha$ est le niveau de confiance.

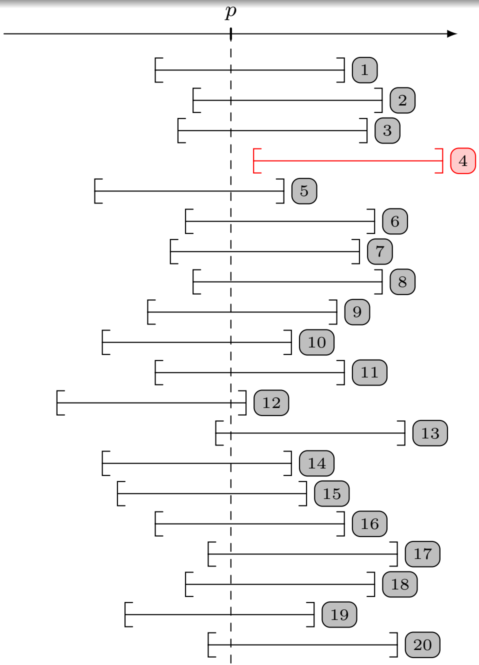


$\alpha = 5\%$ d'erreur signifie qu'en moyenne sur 20 échantillons prélevés au hasard, un seul intervalle de confiance ne contient pas la proportion p.



$\alpha = 5\%$ d'erreur signifie qu'en moyenne sur 20 échantillons prélevés au hasard, un seul intervalle de confiance ne contient pas la proportion p.

Ici, sur 20 simulations d'échantillons, seule l'intervalle de confiance calculé à partir de l'échantillon n° . . . ne convient pas.



$\alpha = 5\%$ d'erreur signifie qu'en moyenne sur 20 échantillons prélevés au hasard, un seul intervalle de confiance ne contient pas la proportion p.

Ici, sur 20 simulations d'échantillons, seule l'intervalle de confiance calculé à partir de l'échantillon n° **4** ne convient pas.

aux idées fausses sur une éventuelle localisation de p dans l'intervalle de confiance : la proportion p peut-être n'importe où dans l'intervalle.

aux idées fausses sur une éventuelle localisation de p dans l'intervalle de confiance : la proportion p peut-être n'importe où dans l'intervalle.

Problème : Pour calculer les bornes des intervalles de confiances, on a utilisé p qu'on ne connait pas puisque qu'on cherche à l'estimer !

aux idées fausses sur une éventuelle localisation de p dans l'intervalle de confiance : la proportion p peut-être n'importe où dans l'intervalle.

Problème : Pour calculer les bornes des intervalles de confiances, on a utilisé p qu'on ne connait pas puisque qu'on cherche à l'estimer !

En pratique, on a un seul échantillon, donc une seule réalisation de la variable aléatoire $\overline{P}$. Cette réalisation, on la note avec un chapeau : $\hat{p}$ et on l'utilise à la place de p pour calculer les bornes de l'intervalle de confiance.

aux idées fausses sur une éventuelle localisation de p dans l'intervalle de confiance : la proportion p peut-être n'importe où dans l'intervalle.

Problème : Pour calculer les bornes des intervalles de confiances, on a utilisé p qu'on ne connait pas puisque qu'on cherche à l'estimer !

En pratique, on a un seul échantillon, donc une seule réalisation de la variable aléatoire $\overline{P}$. Cette réalisation, on la note avec un chapeau : $\hat{p}$ et on l'utilise à la place de p pour calculer les bornes de l'intervalle de confiance.

Dans notre étude, pour le deuxième échantillon on a observé $\hat{p}$ =**0,58** :

aux idées fausses sur une éventuelle localisation de p dans l'intervalle de confiance : la proportion p peut-être n'importe où dans l'intervalle.

Problème : Pour calculer les bornes des intervalles de confiances, on a utilisé p qu'on ne connait pas puisque qu'on cherche à l'estimer !

En pratique, on a un seul échantillon, donc une seule réalisation de la variable aléatoire $\overline{P}$. Cette réalisation, on la note avec un chapeau : $\hat{p}$ et on l'utilise à la place de p pour calculer les bornes de l'intervalle de confiance.

Dans notre étude, pour le deuxième échantillon on a observé $\hat{p}=$**0,58** :

$$z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,58\times(1-0,58)}{50}} \simeq 0,14$$

aux idées fausses sur une éventuelle localisation de p dans l'intervalle de confiance : la proportion p peut-être n'importe où dans l'intervalle.

Problème : Pour calculer les bornes des intervalles de confiances, on a utilisé p qu'on ne connait pas puisque qu'on cherche à l'estimer !

En pratique, on a un seul échantillon, donc une seule réalisation de la variable aléatoire $\overline{P}$. Cette réalisation, on la note avec un chapeau : $\hat{p}$ et on l'utilise à la place de p pour calculer les bornes de l'intervalle de confiance.

Dans notre étude, pour le deuxième échantillon on a observé $\hat{p} =$**0,58** :

$$z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,58 \times (1-0,58)}{50}} \simeq 0,14$$

☞

aux idées fausses sur une éventuelle localisation de p dans l'intervalle de confiance : la proportion p peut-être n'importe où dans l'intervalle.

Problème : Pour calculer les bornes des intervalles de confiances, on a utilisé p qu'on ne connait pas puisque qu'on cherche à l'estimer !

En pratique, on a un seul échantillon, donc une seule réalisation de la variable aléatoire $\overline{P}$. Cette réalisation, on la note avec un chapeau : $\hat{p}$ et on l'utilise à la place de p pour calculer les bornes de l'intervalle de confiance.

Dans notre étude, pour le deuxième échantillon on a observé $\hat{p} =$**0,58** :

$$z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,58\times(1-0,58)}{50}} \simeq 0,14$$

☞ On retrouve le même intervalle de confiance : $IC_{5\%} = \left[0,44\,;\,0,72\right]$

Questions : Supposons que la population soit constituée de $N = 21400$ individus (effectif total) et qu'on ait prélevé l'échantillon n° 2 pour faire notre étude statistique $(n = 50)$.

Questions : Supposons que la population soit constituée de $N = 21400$ individus (effectif total) et qu'on ait prélevé l'échantillon n° 2 pour faire notre étude statistique ($n = 50$).

1. Combien de ronds estime-t-on avoir dans la population avec un niveau de confiance de 95% ?

Questions : Supposons que la population soit constituée de $N = 21400$ individus (effectif total) et qu'on ait prélevé l'échantillon n° 2 pour faire notre étude statistique ($n = 50$).

1. Combien de ronds estime-t-on avoir dans la population avec un niveau de confiance de 95% ?
   On a trouvé $IC_{5\%} = [0,44\ ,\ 0,72]$ donc on estime, au niveau de confiance 95%, qu'il y a entre $0,44 \times 21400 = 9416$ et $0,72 \times 21400 = 15408$ individus ronds.

Questions : Supposons que la population soit constituée de $N = 21400$ individus (effectif total) et qu'on ait prélevé l'échantillon n° 2 pour faire notre étude statistique ($n = 50$).

1. Combien de ronds estime-t-on avoir dans la population avec un niveau de confiance de 95% ?
   On a trouvé $IC_{5\%} = [0,44\ ,\ 0,72]$ donc on estime, au niveau de confiance 95%, qu'il y a entre $0,44 \times 21400 = 9416$ et $0,72 \times 21400 = 15408$ individus ronds.

2. On reprend l'étude avec un niveau de confiance de 99%.
   (a) Détermine le nouvel intervalle de confiance ?

Questions : Supposons que la population soit constituée de $N = 21400$ individus (effectif total) et qu'on ait prélevé l'échantillon n° 2 pour faire notre étude statistique ($n = 50$).

1. Combien de ronds estime-t-on avoir dans la population avec un niveau de confiance de 95% ?
   On a trouvé $IC_{5\%} = [0,44\ ,\ 0,72]$ donc on estime, au niveau de confiance 95%, qu'il y a entre $0,44 \times 21400 = 9416$ et $0,72 \times 21400 = 15408$ individus ronds.

2. On reprend l'étude avec un niveau de confiance de 99%.
   (a) Déterminé le nouvel intervalle de confiance ? Le seul changement, c'est la valeur de α donc de $z_{\frac{\alpha}{2}}$. $\quad \alpha = 0,01 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,58.$
   $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,58\sqrt{\frac{0,58\times(1-0,58)}{50}} \simeq 0,18$ donc
   $IC_{1\%} = [0,58 - 0,18\ ;\ 0,58 + 0,18] = [0,40\ ;\ 0,76]$

Questions : Supposons que la population soit constituée de $N = 21400$ individus (effectif total) et qu'on ait prélevé l'échantillon n° 2 pour faire notre étude statistique ($n = 50$).

1. Combien de ronds estime-t-on avoir dans la population avec un niveau de confiance de 95% ?
   On a trouvé $IC_{5\%} = [0,44\ ,\ 0,72]$ donc on estime, au niveau de confiance 95%, qu'il y a entre $0,44 \times 21400 = 9416$ et $0,72 \times 21400 = 15408$ individus ronds.
2. On reprend l'étude avec un niveau de confiance de 99%.
   (a) Détermine le nouvel intervalle de confiance ? Le seul changement, c'est la valeur de α donc de $z_{\frac{\alpha}{2}}$. $\quad \alpha = 0,01 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,58.$
   $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,58\sqrt{\frac{0,58\times(1-0,58)}{50}} \simeq 0,18$ donc
   $IC_{1\%} = [0,58 - 0,18\ ;\ 0,58 + 0,18] = [0,40\ ;\ 0,76]$
   (b) Combien de ronds estime-t-on avoir dans la population avec un niveau de confiance de 99% ?

Questions : Supposons que la population soit constituée de $N = 21400$ individus (effectif total) et qu'on ait prélevé l'échantillon n° 2 pour faire notre étude statistique ($n = 50$).

1. Combien de ronds estime-t-on avoir dans la population avec un niveau de confiance de 95% ?
   On a trouvé $IC_{5\%} = [0,44\ ,\ 0,72]$ donc on estime, au niveau de confiance 95%, qu'il y a entre $0,44 \times 21400 = 9416$ et $0,72 \times 21400 = 15408$ individus ronds.

2. On reprend l'étude avec un niveau de confiance de 99%.
   (a) Détermine le nouvel intervalle de confiance ? Le seul changement, c'est la valeur de α donc de $z_{\frac{\alpha}{2}}$. $\alpha = 0,01 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,58$.
   $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,58\sqrt{\frac{0,58\times(1-0,58)}{50}} \simeq 0,18$ donc
   $IC_{1\%} = [0,58 - 0,18\ ;\ 0,58 + 0,18] = [0,40\ ;\ 0,76]$

   (b) Combien de ronds estime-t-on avoir dans la population avec un niveau de confiance de 99% ? On estime, au niveau de confiance 99%, qu'il y a entre $0,40 \times 21400 = 8560$ et $0,76 \times 21400 = 16264$ individus ronds.

Questions : Supposons que la population soit constituée de $N = 21400$ individus (effectif total) et qu'on ait prélevé l'échantillon n° 2 pour faire notre étude statistique ($n = 50$).

1. Combien de ronds estime-t-on avoir dans la population avec un niveau de confiance de 95% ?
   On a trouvé $IC_{5\%} = [0,44\ ,\ 0,72]$ donc on estime, au niveau de confiance 95%, qu'il y a entre $0,44 \times 21400 = 9416$ et $0,72 \times 21400 = 15408$ individus ronds.

2. On reprend l'étude avec un niveau de confiance de 99%.
   (a) Détermine le nouvel intervalle de confiance ? Le seul changement, c'est la valeur de α donc de $z_{\frac{\alpha}{2}}$. $\alpha = 0,01 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,58$.
   $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,58\sqrt{\frac{0,58\times(1-0,58)}{50}} \simeq 0,18$ donc
   $IC_{1\%} = [0,58 - 0,18\ ;\ 0,58 + 0,18] = [0,40\ ;\ 0,76]$

   (b) Combien de ronds estime-t-on avoir dans la population avec un niveau de confiance de 99% ? On estime, au niveau de confiance 99%, qu'il y a entre $0,40 \times 21400 = 8560$ et $0,76 \times 21400 = 16264$ individus ronds.

   (c) Pourquoi l'intervalle $IC_{1\%}$ est-il plus grand ?

Questions : Supposons que la population soit constituée de $N = 21400$ individus (effectif total) et qu'on ait prélevé l'échantillon n° 2 pour faire notre étude statistique ($n = 50$).

1. Combien de ronds estime-t-on avoir dans la population avec un niveau de confiance de 95% ?
   On a trouvé $IC_{5\%} = [0,44\ ,\ 0,72]$ donc on estime, au niveau de confiance 95%, qu'il y a entre $0,44 \times 21400 = 9416$ et $0,72 \times 21400 = 15408$ individus ronds.

2. On reprend l'étude avec un niveau de confiance de 99%.
   (a) Détermine le nouvel intervalle de confiance ? Le seul changement, c'est la valeur de α donc de $z_{\frac{\alpha}{2}}$. $\quad \alpha = 0,01 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,58.$
   $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,58\sqrt{\frac{0,58\times(1-0,58)}{50}} \simeq 0,18$ donc
   $IC_{1\%} = [0,58 - 0,18\ ;\ 0,58 + 0,18] = [0,40\ ;\ 0,76]$

   (b) Combien de ronds estime-t-on avoir dans la population avec un niveau de confiance de 99% ? On estime, au niveau de confiance 99%, qu'il y a entre $0,40 \times 21400 = 8560$ et $0,76 \times 21400 = 16264$ individus ronds.

   (c) Pourquoi l'intervalle $IC_{1\%}$ est-il plus grand ?
   L'intervalle $IC_{1\%}$ est plus grand, c'est normal, on a moins de chance de se tromper.

2. Indépendance et remise.

Nous avons supposé que lorsqu'on prélevait des individus pour former un échantillon, ils se comportaient de manière indépendante.

2. Indépendance et remise.

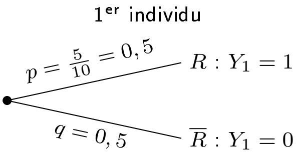
Nous avons supposé que lorsqu'on prélevait des individus pour former un échantillon, ils se comportaient de manière indépendante.

Etude n° 4 : Supposons que l'on prélève un échantillon de $n = 3$ individus dans une population de $N = 10$ individus : 5 ronds et 5 carrés.

2. Indépendance et remise.

Nous avons supposé que lorsqu'on prélevait des individus pour former un échantillon, ils se comportaient de manière indépendante.

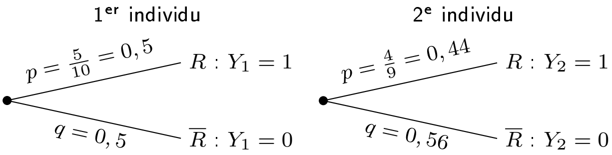
Etude n° 4 : Supposons que l'on prélève un échantillon de $n = 3$ individus dans une population de $N = 10$ individus : 5 ronds et 5 carrés.



2. Indépendance et remise.

Nous avons supposé que lorsqu'on prélevait des individus pour former un échantillon, ils se comportaient de manière indépendante.

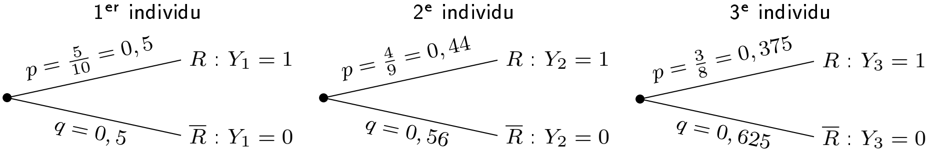
Etude n° 4 : Supposons que l'on prélève un échantillon de $n = 3$ individus dans une population de $N = 10$ individus : 5 ronds et 5 carrés.



2. Indépendance et remise.

Nous avons supposé que lorsqu'on prélevait des individus pour former un échantillon, ils se comportaient de manière indépendante.

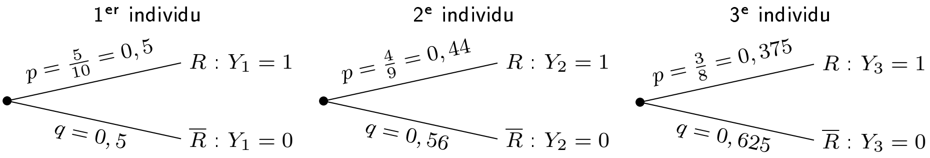
Etude n° 4 : Supposons que l'on prélève un échantillon de $n = 3$ individus dans une population de $N = 10$ individus : 5 ronds et 5 carrés.



2. Indépendance et remise.

Nous avons supposé que lorsqu'on prélevait des individus pour former un échantillon, ils se comportaient de manière indépendante.

Etude nº 4 : Supposons que l'on prélève un échantillon de $n = 3$ individus dans une population de $N = 10$ individus : 5 ronds et 5 carrés.

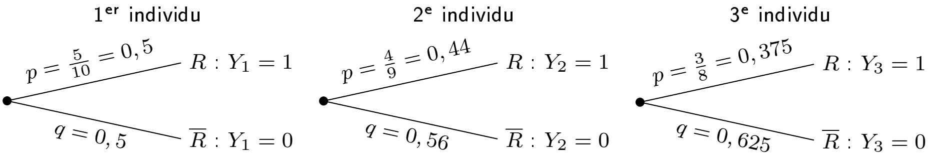


Les variables de Bernoulli (Y_i) ne suivent pas la même loi car les Y_i ne sont pas indépendants.

2. Indépendance et remise.

Nous avons supposé que lorsqu'on prélevait des individus pour former un échantillon, ils se comportaient de manière indépendante.

Etude n° 4 : Supposons que l'on prélève un échantillon de $n = 3$ individus dans une population de $N = 10$ individus : 5 ronds et 5 carrés.



Les variables de Bernoulli (Y_i) ne suivent pas la même loi car les Y_i ne sont pas indépendants. Pour qu'elles le soient,

2. Indépendance et remise.

Nous avons supposé que lorsqu'on prélevait des individus pour former un échantillon, ils se comportaient de manière indépendante.

Etude n° 4 : Supposons que l'on prélève un échantillon de $n = 3$ individus dans une population de $N = 10$ individus : 5 ronds et 5 carrés.

1^er individu
- $p = \frac{5}{10} = 0,5$: $R : Y_1 = 1$
- $q = 0,5$: $\overline{R} : Y_1 = 0$

2^e individu
- $p = \frac{4}{9} = 0,44$: $R : Y_2 = 1$
- $q = 0,56$: $\overline{R} : Y_2 = 0$

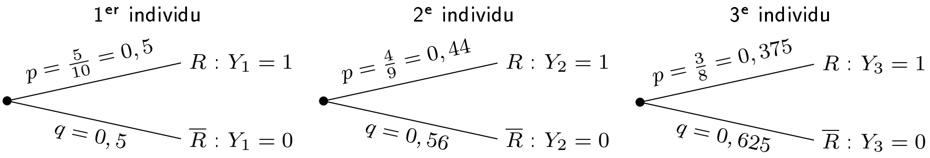
3^e individu
- $p = \frac{3}{8} = 0,375$: $R : Y_3 = 1$
- $q = 0,625$: $\overline{R} : Y_3 = 0$

Les variables de Bernoulli (Y_i) ne suivent pas la même loi car les Y_i ne sont pas indépendants. Pour qu'elles le soient, il faudrait constituer les échantillons en remettant les individus dans la population au fur et à mesure où on les interroge pour savoir s'ils sont ronds ou carrés.

2. Indépendance et remise.

Nous avons supposé que lorsqu'on prélevait des individus pour former un échantillon, ils se comportaient de manière indépendante.

Etude n° 4 : Supposons que l'on prélève un échantillon de $n = 3$ individus dans une population de $N = 10$ individus : 5 ronds et 5 carrés.

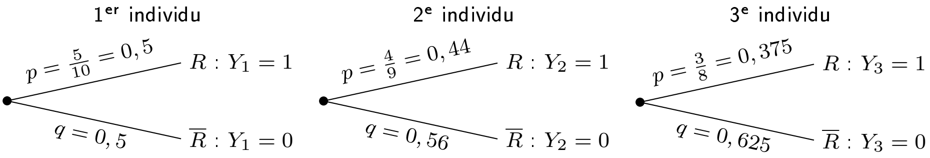


Les variables de Bernoulli (Y_i) ne suivent pas la même loi car les Y_i ne sont pas indépendants. Pour qu'elles le soient, il faudrait constituer les échantillons en remettant les individus dans la population au fur et à mesure où on les interroge pour savoir s'ils sont ronds ou carrés.
L'échantillon serait interrogé par un tirage avec

2. Indépendance et remise.

Nous avons supposé que lorsqu'on prélevait des individus pour former un échantillon, ils se comportaient de manière indépendante.

Etude n° 4 : Supposons que l'on prélève un échantillon de $n = 3$ individus dans une population de $N = 10$ individus : 5 ronds et 5 carrés.

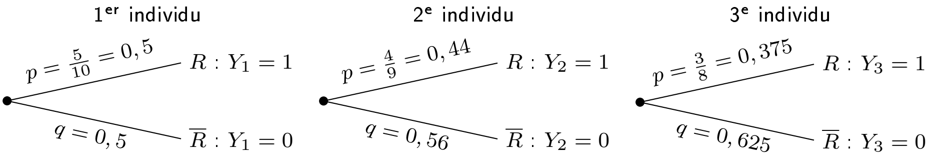


Les variables de Bernoulli (Y_i) ne suivent pas la même loi car les Y_i ne sont pas indépendants. Pour qu'elles le soient, il faudrait constituer les échantillons en remettant les individus dans la population au fur et à mesure où on les interroge pour savoir s'ils sont ronds ou carrés. L'échantillon serait interrogé par un tirage avec **remise**.

2. Indépendance et remise.

Nous avons supposé que lorsqu'on prélevait des individus pour former un échantillon, ils se comportaient de manière indépendante.

Etude n° 4 : Supposons que l'on prélève un échantillon de $n = 3$ individus dans une population de $N = 10$ individus : 5 ronds et 5 carrés.



Les variables de Bernoulli (Y_i) ne suivent pas la même loi car les Y_i ne sont pas indépendants. Pour qu'elles le soient, il faudrait constituer les échantillons en remettant les individus dans la population au fur et à mesure où on les interroge pour savoir s'ils sont ronds ou carrés. L'échantillon serait interrogé par un tirage avec **remise**. On risquerait alors d'interroger plusieurs fois le même individu.

Propriété : Statistique de la variable aléatoire $\overline{P}$

Si l'échantillon est constitué

- Avec remise : $E(\overline{P}) = p$ et $V(\overline{P}) = \dfrac{pq}{n}$
- Sinon : $E(\overline{P}) = p$ et $V(\overline{P}) = \dfrac{pq}{n} \times \dfrac{N-n}{N-1}$

Ainsi, dans notre étude (sans remise) l'intervalle de confiance devient :

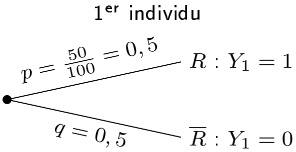
$$IC_{5\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\ ,\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\right]$$

On reconnaît l'écart-type d'une loi hypergéométrique... Lorsque le tirage est sans remise, la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ ne suit plus une loi $\mathcal{B}(n,p)$, mais une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n,N,p)$. Il s'en suit que la variable aléatoire $\overline{P} = \dfrac{S}{N}$ suit approximativement une loi $\mathcal{N}\left(p; \sqrt{\frac{pq}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\right)$, d'où le facteur $\frac{N-n}{N-1}$.

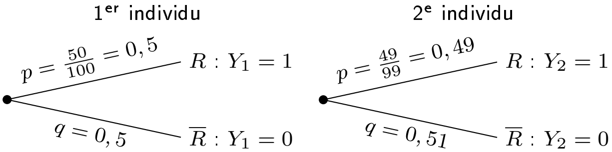
Etude n° 5 : Supposons que l'on prélève un échantillon de $n = 3$ individus dans une population de $N = 100$ individus : 50 ronds et 50 carrés.

II. Intervalles de confiances pour une proportion.

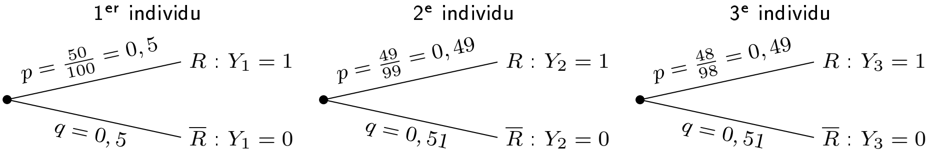
Etude n° 5 : Supposons que l'on prélève un échantillon de $n = 3$ individus dans une population de $N = 100$ individus : 50 ronds et 50 carrés.



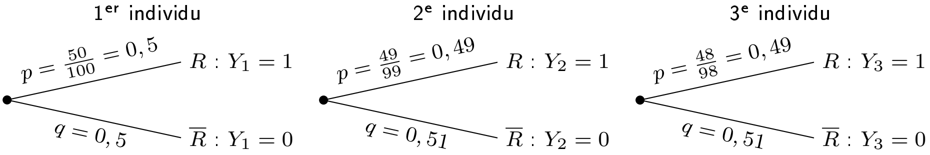
Etude n° 5 : Supposons que l'on prélève un échantillon de $n = 3$ individus dans une population de $N = 100$ individus : 50 ronds et 50 carrés.



Etude n° 5 : Supposons que l'on prélève un échantillon de $n = 3$ individus dans une population de $N = 100$ individus : 50 ronds et 50 carrés.



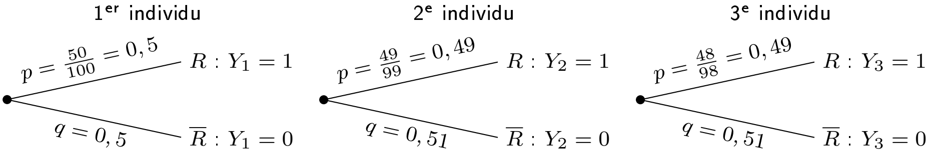
Etude n° 5 : Supposons que l'on prélève un échantillon de $n = 3$ individus dans une population de $N = 100$ individus : 50 ronds et 50 carrés.



Les variables de Bernoulli (Y_i) suivent pratiquement la même loi. On peut considérer qu'ils sont indépendants.

II. Intervalles de confiances pour une proportion.

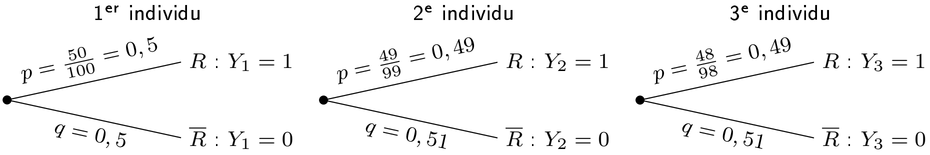
Etude n° 5 : Supposons que l'on prélève un échantillon de $n = 3$ individus dans une population de $N = 100$ individus : 50 ronds et 50 carrés.



Les variables de Bernoulli (Y_i) suivent pratiquement la même loi. On peut considérer qu'ils sont indépendants. Autrement dit, quand la taille n de l'échantillon est petite devant celle de la population, qu'il y ait remise ou pas, ça ne change pratiquement pas la situation.

II. Intervalles de confiances pour une proportion.

Etude n° 5 : Supposons que l'on prélève un échantillon de $n = 3$ individus dans une population de $N = 100$ individus : 50 ronds et 50 carrés.



Les variables de Bernoulli (Y_i) suivent pratiquement la même loi. On peut considérer qu'ils sont indépendants. Autrement dit, quand la taille n de l'échantillon est petite devant celle de la population, qu'il y ait remise ou pas, ça ne change pratiquement pas la situation.

En pratique, on considère qu'un échantillon sans remise se comporte comme un échantillon avec remise lorsque la population est 20 fois plus grande que l'échantillon : $N \geqslant 20n$

3. Intervalles de confiances d'une proportion.

Notations :

Population :

p : proportion à estimer

N : effectif total

Echantillon :

$\hat{p}$: proportion observée sur l'échantillon

n : effectif de l'échantillon

$$IC_{\alpha\%} = [\hat{p} - \ldots \ ; \ \hat{p} + \ldots]$$

$$P\big(p \notin IC_{\alpha}\big) = \alpha$$

Théorème : intervalle de confiance d'une proportion.

Si $n \geqslant 30$, $n\hat{p} \geqslant 5$ et $n(1-\hat{p}) \geqslant 5$, alors l'intervalle de confiance au risque de α est :

Théorème : intervalle de confiance d'une proportion.

Si $n \geqslant 30$, $n\hat{p} \geqslant 5$ et $n(1-\hat{p}) \geqslant 5$, alors l'intervalle de confiance au risque de α est :

- $$IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\ ,\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\right]$$

Théorème : intervalle de confiance d'une proportion.

Si $n \geqslant 30$, $n\hat{p} \geqslant 5$ et $n(1-\hat{p}) \geqslant 5$, alors l'intervalle de confiance au risque de α est :

- $$IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\ ,\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\right]$$

  si échantillonnage sans remise **et** N relativement petit par rapport à n : $N < 20n$;

Théorème : intervalle de confiance d'une proportion.

Si $n \geqslant 30$, $n\hat{p} \geqslant 5$ et $n(1-\hat{p}) \geqslant 5$, alors l'intervalle de confiance au risque de α est :

- $$IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\ ,\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\right]$$

  si échantillonnage sans remise **et** N relativement petit par rapport à n : $N < 20n$;

- $$IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ ,\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

Théorème : intervalle de confiance d'une proportion.

Si $n \geqslant 30$, $n\hat{p} \geqslant 5$ et $n(1-\hat{p}) \geqslant 5$, alors l'intervalle de confiance au risque de α est :

- $$IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\ ,\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\right]$$

  si échantillonnage sans remise **et** N relativement petit par rapport à n : $N < 20n$;

- $$IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ ,\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

  si échantillonnage avec remise ;

  ou

  si échantillonnage sans remise **et** N relativement grand par rapport à n : $N \geqslant 20n$

Théorème : intervalle de confiance d'une proportion.

Si $n \geqslant 30$, $n\hat{p} \geqslant 5$ et $n(1-\hat{p}) \geqslant 5$, alors l'intervalle de confiance au risque de α est :

- $$IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\ ,\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\right]$$

  si échantillonnage sans remise **et** N relativement petit par rapport à n : $N < 20n$;

- $$IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ ,\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

  si échantillonnage avec remise ;

  ou

  si échantillonnage sans remise **et** N relativement grand par rapport à n : $N \geqslant 20n$

La probabilité que p soit dans cet intervalle est $1-\alpha$ (niveau de confiance).

Exercice n° 1: Dans une boîte contenant 500 vis, parmi 42 tirées au hasard, 17 sont à têtes plates.

Exercice n° 1: Dans une boîte contenant 500 vis, parmi 42 tirées au hasard, 17 sont à têtes plates.

1. Les conditions d'application du théorème sont-elles vérifiées ?

Exercice n° 1: Dans une boîte contenant 500 vis, parmi 42 tirées au hasard, 17 sont à têtes plates.

1. Les conditions d'application du théorème sont-elles vérifiées ?

   $n \geqslant 30$, $n\hat{p} = 17 \geqslant 5$ et $n\hat{q} = 42 - 17 = 25 \geqslant 5$. Elles le sont.

Exercice n° 1: Dans une boîte contenant 500 vis, parmi 42 tirées au hasard, 17 sont à têtes plates.

1. Les conditions d'application du théorème sont-elles vérifiées ?

   $n \geqslant 30$, $n\hat{p} = 17 \geqslant 5$ et $n\hat{q} = 42 - 17 = 25 \geqslant 5$. Elles le sont.

2. Sachant que les vis ont été tirées avec remise, estimez le nombre de vis à têtes plates dans cette boîte avec un risque $\alpha = 1\%$.

Exercice n° 1: Dans une boîte contenant 500 vis, parmi 42 tirées au hasard, 17 sont à têtes plates.

1. Les conditions d'application du théorème sont-elles vérifiées ?

   $n \geqslant 30$, $n\hat{p} = 17 \geqslant 5$ et $n\hat{q} = 42 - 17 = 25 \geqslant 5$. Elles le sont.

2. Sachant que les vis ont été tirées avec remise, estimez le nombre de vis à têtes plates dans cette boîte avec un risque $\alpha = 1\%$.

   Il s'agit d'un tirage avec remise

Exercice n° 1: Dans une boîte contenant 500 vis, parmi 42 tirées au hasard, 17 sont à têtes plates.

1. Les conditions d'application du théorème sont-elles vérifiées ?

   $n \geqslant 30$, $n\hat{p} = 17 \geqslant 5$ et $n\hat{q} = 42 - 17 = 25 \geqslant 5$. Elles le sont.

2. Sachant que les vis ont été tirées avec remise, estimez le nombre de vis à têtes plates dans cette boîte avec un risque $\alpha = 1\%$.

   Il s'agit d'un tirage avec remise d'où $IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \; ; \; \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$

Exercice n° 1: Dans une boîte contenant 500 vis, parmi 42 tirées au hasard, 17 sont à têtes plates.

1. Les conditions d'application du théorème sont-elles vérifiées ?

   $n \geqslant 30$, $n\hat{p} = 17 \geqslant 5$ et $n\hat{q} = 42 - 17 = 25 \geqslant 5$. Elles le sont.

2. Sachant que les vis ont été tirées avec remise, estimez le nombre de vis à têtes plates dans cette boîte avec un risque $\alpha = 1\%$.

   Il s'agit d'un tirage avec remise d'où $IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \; ; \; \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$

   $\hat{p} = \frac{17}{42} \simeq 0,405$. Table de l'écart réduit : $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,576$

Exercice n° 1: Dans une boîte contenant 500 vis, parmi 42 tirées au hasard, 17 sont à têtes plates.

1. Les conditions d'application du théorème sont-elles vérifiées ?
   $n \geqslant 30$, $n\hat{p} = 17 \geqslant 5$ et $n\hat{q} = 42 - 17 = 25 \geqslant 5$. Elles le sont.

2. Sachant que les vis ont été tirées avec remise, estimez le nombre de vis à têtes plates dans cette boîte avec un risque $\alpha = 1\%$.
   Il s'agit d'un tirage avec remise d'où $IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \; ; \; \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$
   $\hat{p} = \dfrac{17}{42} \simeq 0,405$. Table de l'écart réduit : $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,576$
   $IC_{1\%} = \left[0,405 - 2,576\sqrt{\dfrac{0,405 \times 0,595}{42}} \; ; \; 0,405 + 2,576\sqrt{\dfrac{0,405 \times 0,595}{42}}\right]$

Exercice n° 1: Dans une boîte contenant 500 vis, parmi 42 tirées au hasard, 17 sont à têtes plates.

1. Les conditions d'application du théorème sont-elles vérifiées ?

   $n \geqslant 30$, $n\hat{p} = 17 \geqslant 5$ et $n\hat{q} = 42 - 17 = 25 \geqslant 5$. Elles le sont.

2. Sachant que les vis ont été tirées avec remise, estimez le nombre de vis à têtes plates dans cette boîte avec un risque $\alpha = 1\%$.

   Il s'agit d'un tirage avec remise d'où $IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ ;\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$

   $\hat{p} = \dfrac{17}{42} \simeq 0,405$. Table de l'écart réduit : $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,576$

   $IC_{1\%} = \left[0,405 - 2,576\sqrt{\dfrac{0,405 \times 0,595}{42}}\ ;\ 0,405 + 2,576\sqrt{\dfrac{0,405 \times 0,595}{42}}\right]$

   $IC_{1\%} = [0,405 - 0,195\ ,\ 0,405 + 0,195] = [0,210\ ;\ 0,600]$

Exercice n° 1: Dans une boîte contenant 500 vis, parmi 42 tirées au hasard, 17 sont à têtes plates.

1. Les conditions d'application du théorème sont-elles vérifiées ?

   $n \geqslant 30$, $n\hat{p} = 17 \geqslant 5$ et $n\hat{q} = 42 - 17 = 25 \geqslant 5$. Elles le sont.

2. Sachant que les vis ont été tirées avec remise, estimez le nombre de vis à têtes plates dans cette boîte avec un risque $\alpha = 1\%$.

   Il s'agit d'un tirage avec remise d'où $IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ ;\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$

   $\hat{p} = \dfrac{17}{42} \simeq 0,405$. Table de l'écart réduit : $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,576$

   $IC_{1\%} = \left[0,405 - 2,576\sqrt{\dfrac{0,405 \times 0,595}{42}}\ ;\ 0,405 + 2,576\sqrt{\dfrac{0,405 \times 0,595}{42}}\right]$

   $IC_{1\%} = [0,405 - 0,195\ ,\ 0,405 + 0,195] = [0,210\ ;\ 0,600]$

   On estime au risque de 1%, d'avoir entre 105 et 300 vis à têtes plates dans cette boîte.

Exercice n° 1: Dans une boîte contenant 500 vis, parmi 42 tirées au hasard, 17 sont à têtes plates.

1. Les conditions d'application du théorème sont-elles vérifiées ?

   $n \geqslant 30$, $n\hat{p} = 17 \geqslant 5$ et $n\hat{q} = 42 - 17 = 25 \geqslant 5$. Elles le sont.

2. Sachant que les vis ont été tirées avec remise, estimez le nombre de vis à têtes plates dans cette boîte avec un risque $\alpha = 1\%$.

   Il s'agit d'un tirage avec remise d'où $IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \; ; \; \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$

   $\hat{p} = \frac{17}{42} \simeq 0,405$. Table de l'écart réduit : $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,576$

   $IC_{1\%} = \left[0,405 - 2,576\sqrt{\frac{0,405 \times 0,595}{42}} \; ; \; 0,405 + 2,576\sqrt{\frac{0,405 \times 0,595}{42}}\right]$

   $IC_{1\%} = [0,405 - 0,195 \;,\; 0,405 + 0,195] = [0,210 \; ; \; 0,600]$

   On estime au risque de 1%, d'avoir entre 105 et 300 vis à têtes plates dans cette boîte.

3. Sachant que les vis ont été tirées sans remise, estimez le nombre de vis à têtes plates dans cette boîte avec un risque $\alpha = 1\%$.

Exercice n° 2: Dans une boîte contenant 500 vis, parmi 42 tirées au hasard, 17 sont à têtes plates.

1. Sachant que les vis ont été tirées sans remise, estimez le nombre de vis à têtes plates dans cette boîte avec un risque $\alpha = 1\%$.

   $20n = 20 \times 42 = 840 > 500 = N$, donc la population est petite relativement à l'échantillon.

Exercice n° 2: Dans une boîte contenant 500 vis, parmi 42 tirées au hasard, 17 sont à têtes plates.

1. Sachant que les vis ont été tirées sans remise, estimez le nombre de vis à têtes plates dans cette boîte avec un risque $\alpha = 1\%$.

   $20n = 20 \times 42 = 840 > 500 = N$, donc la population est petite relativement à l'échantillon.

   $$IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\ ;\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\right]$$

Exercice n° 2: Dans une boîte contenant 500 vis, parmi 42 tirées au hasard, 17 sont à têtes plates.

1. Sachant que les vis ont été tirées sans remise, estimez le nombre de vis à têtes plates dans cette boîte avec un risque $\alpha = 1\%$.

   $20n = 20 \times 42 = 840 > 500 = N$, donc la population est petite relativement à l'échantillon.

   $$IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}} \; ; \; \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\right]$$

   avec $\dfrac{N-n}{N-1} = \dfrac{458}{499} \simeq 0,918$ donc

Exercice n° 2: Dans une boîte contenant 500 vis, parmi 42 tirées au hasard, 17 sont à têtes plates.

1. Sachant que les vis ont été tirées sans remise, estimez le nombre de vis à têtes plates dans cette boîte avec un risque $\alpha = 1\%$.

   $20n = 20 \times 42 = 840 > 500 = N$, donc la population est petite relativement à l'échantillon.

   $$IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\ ;\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\right]$$

   avec $\dfrac{N-n}{N-1} = \dfrac{458}{499} \simeq 0,918$ donc

   $$IC_{1\%} = \left[0,405 - 2,576\sqrt{\frac{0,405 \times 0,595}{42} \times 0,918}\ ;\ 0,405 + 2,576\sqrt{\frac{0,405 \times 0,595}{42} \times 0,918}\right]$$

Exercice n° 2: Dans une boîte contenant 500 vis, parmi 42 tirées au hasard, 17 sont à têtes plates.

1. Sachant que les vis ont été tirées sans remise, estimez le nombre de vis à têtes plates dans cette boîte avec un risque $\alpha = 1\%$.

   $20n = 20 \times 42 = 840 > 500 = N$, donc la population est petite relativement à l'échantillon.

   $$IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\ ;\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\right]$$

   avec $\frac{N-n}{N-1} = \frac{458}{499} \simeq 0,918$ donc

   $$IC_{1\%} = \left[0,405 - 2,576\sqrt{\frac{0,405 \times 0,595}{42} \times 0,918}\ ;\ 0,405 + 2,576\sqrt{\frac{0,405 \times 0,595}{42} \times 0,918}\right]$$

   $$IC_{1\%} = [0,405 - 0,187\ ;\ 0,405 + 0,187] = [0,218\ ,\ 0,592]$$

   On estime au risque de 1%, d'avoir entre 109 et 296 vis à têtes plates dans cette boîte.

Exercice n° 2: Dans une boîte contenant 500 vis, parmi 42 tirées au hasard, 17 sont à têtes plates.

1. Sachant que les vis ont été tirées sans remise, estimez le nombre de vis à têtes plates dans cette boîte avec un risque $\alpha = 1\%$.

   $20n = 20 \times 42 = 840 > 500 = N$, donc la population est petite relativement à l'échantillon.

   $$IC_{\alpha\%} = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\ ;\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\right]$$

   avec $\frac{N-n}{N-1} = \frac{458}{499} \simeq 0,918$ donc

   $$IC_{1\%} = \left[0,405 - 2,576\sqrt{\frac{0,405 \times 0,595}{42} \times 0,918}\ ;\ 0,405 + 2,576\sqrt{\frac{0,405 \times 0,595}{42} \times 0,918}\right]$$

   $IC_{1\%} = [0,405 - 0,187\ ;\ 0,405 + 0,187] = [0,218\ ,\ 0,592]$

   On estime au risque de 1%, d'avoir entre 109 et 296 vis à têtes plates dans cette boîte.

Remarque : Comme $0 < \frac{N-n}{N-1} < 1$, l'intervalle de confiance d'un tirage sans remise a une amplitude plus petite (il est plus précis) que celui d'un tirage avec remise. C'est normal, puisque lorsque le tirage est sans remise, on ne risque pas d'interroger deux fois le même individu. On gagne donc en information, donc en précision.

Notations :

Population :

μ : moyenne à estimer

N : effectif total

σ : écart-type

Echantillon :

$\overline{x}$: la moyenne observée sur l'échantillon

S^2 : la variance observée

S : l'écart-type observé

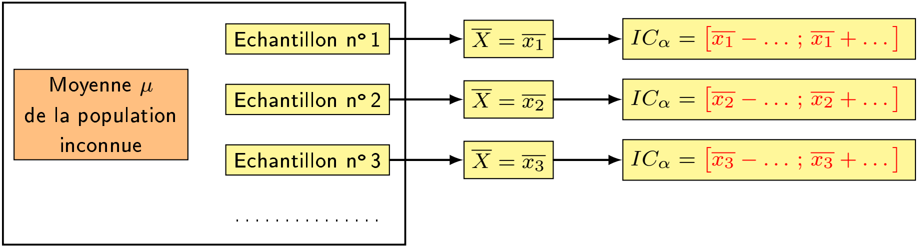
$$IC_{\alpha\%} = [\overline{x} - \dots \; ; \; \overline{x} + \dots]$$

$$P(\mu \in IC_{\alpha}) = 1 - \alpha$$

1. L'écart-type σ de la population est connu.

Etude n° 6 : Supposons que l'on cherche la taille moyenne d'une population d'effectif total N. On prélève un échantillon de n individus. Chaque individu de l'échantillon, numéroté de 1 à n donne sa taille x_i. Sur cet échantillon, on a une estimation ponctuelle de la moyenne des tailles : $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

D'un point de vue probabiliste, notons X_k la variable aléatoire qui à au k-ième individu d'un échantillon donne sa taille. $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ est la variable aléatoire qui à un échantillon associe sa moyenne :



Cas n° 1 : l'échantillon est **grand** $(n \geqslant 30)$ et constitué avec **remise**.

Cas n° 1 : l'échantillon est **grand** $(n \geqslant 30)$ et constitué avec **remise**.

On sait que $E(\overline{X}) = \mu$ et $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, donc, en utilisant le théorème de la limite centrale, on obtient :

Cas n° 1 : l'échantillon est **grand** $(n \geqslant 30)$ et constitué avec **remise**.

On sait que $E(\overline{X}) = \mu$ et $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, donc, en utilisant le théorème de la limite centrale, on obtient :

$$\overline{X} \text{ suit approximativement une loi } \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Cas n° 1 : l'échantillon est **grand** $(n \geqslant 30)$ et constitué avec **remise**.

On sait que $E(\overline{X}) = \mu$ et $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, donc, en utilisant le théorème de la limite centrale, on obtient :

$$\overline{X} \text{ suit approximativement une loi } \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Il s'en suit : $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$

Cas n° 1 : l'échantillon est **grand** $(n \geqslant 30)$ et constitué avec **remise**.

On sait que $E(\overline{X}) = \mu$ et $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, donc, en utilisant le théorème de la limite centrale, on obtient :

$$\overline{X} \text{ suit approximativement une loi } \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Il s'en suit : $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$

Soit $P\left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$

Cas n° 1 : l'échantillon est **grand** $(n \geqslant 30)$ et constitué avec **remise**.

On sait que $E(\overline{X}) = \mu$ et $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, donc, en utilisant le théorème de la limite centrale, on obtient :

$$\overline{X} \text{ suit approximativement une loi } \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Il s'en suit : $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$

Soit $P\left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$

On obtient donc l'intervalle de confiance : $\boxed{IC_\alpha = \left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \ ; \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]}$

Cas n° 2 : l'échantillon est **grand** $(n \geqslant 30)$ et constitué sans **remise**.

Cas n° 2 : l'échantillon est **grand** $(\boldsymbol{n \geqslant 30})$ et constitué sans **remise**.

On démontre que $E(\overline{X}) = \mu$ et $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$, donc, en utilisant le théorème de la limite centrale, on obtient :

Cas n° 2 : l'échantillon est **grand** $(n \geqslant 30)$ et constitué sans **remise**.

On démontre que $E(\overline{X}) = \mu$ et $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$, donc, en utilisant le théorème de la limite centrale, on obtient :

$$\overline{X} \text{ suit approximativement une loi } \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$$

Cas n° 2 : l'échantillon est **grand** $(n \geqslant 30)$ et constitué sans **remise**.

On démontre que $E(\overline{X}) = \mu$ et $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$, donc, en utilisant le théorème de la limite centrale, on obtient :

$$\overline{X} \text{ suit approximativement une loi } \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$$

Il s'en suit :

Cas n° 2 : l'échantillon est **grand** $(n \geqslant 30)$ et constitué sans **remise**.

On démontre que $E(\overline{X}) = \mu$ et $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$, donc, en utilisant le théorème de la limite centrale, on obtient :

$$\overline{X} \text{ suit approximativement une loi } \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$$

Il s'en suit :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

Cas n° 2 : l'échantillon est **grand** $(n \geqslant 30)$ et constitué sans **remise**.

On démontre que $E(\overline{X}) = \mu$ et $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$, donc, en utilisant le théorème de la limite centrale, on obtient :

$$\overline{X} \text{ suit approximativement une loi } \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$$

Il s'en suit :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1-\alpha$$

Cas n° 2 : l'échantillon est **grand** $(n \geqslant 30)$ et constitué sans **remise**.

On démontre que $E(\overline{X}) = \mu$ et $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$, donc, en utilisant le théorème de la limite centrale, on obtient :

$$\overline{X} \text{ suit approximativement une loi } \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$$

Il s'en suit :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1-\alpha$$

On obtient donc l'intervalle de confiance :

Cas n° 2 : l'échantillon est **grand** $(\boldsymbol{n \geqslant 30})$ et constitué sans **remise**.

On démontre que $E(\overline{X}) = \mu$ et $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$, donc, en utilisant le théorème de la limite centrale, on obtient :

$$\overline{X} \text{ suit approximativement une loi } \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$$

Il s'en suit :

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1-\alpha$$

On obtient donc l'intervalle de confiance :

$$\boxed{IC_\alpha = \left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\ ;\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]}$$

Cas n° 3 : l'échantillon est **petit** $(n < 30)$ et X suit une loi normale.

Cas n° 3 : l'échantillon est **petit** $(\boldsymbol{n < 30})$ et X suit une loi normale.

Si on sait que les valeurs sont **normalement** distribuées, autrement dit, X suit une loi normale, alors la somme de lois normales indépendantes étant une loi normale, $\overline{X}$ suit une loi normale et on retrouve :

Cas n° 3 : l'échantillon est **petit** $(n < 30)$ et X suit une loi normale.

Si on sait que les valeurs sont **normalement** distribuées, autrement dit, X suit une loi normale, alors la somme de lois normales indépendantes étant une loi normale, $\overline{X}$ suit une loi normale et on retrouve :

$$IC_\alpha = \left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}} \,;\, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}}\right]$$

avec $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (avec remise) ou $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$ (sans remise)

Cas n° 4 : l'échantillon est **petit** $(n < 30)$ et X suit une loi quelconque.

Cas n° 4 : l'échantillon est **petit** $(\boldsymbol{n < 30})$ et X suit une loi quelconque.

On ne peut rien dire sur la loi de $\overline{X}$... Mais nous pouvons nous servir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

Cas n° 4 : l'échantillon est **petit** $(\boldsymbol{n < 30})$ et X suit une loi quelconque.

On ne peut rien dire sur la loi de $\overline{X}$... Mais nous pouvons nous servir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\big(|X - E(X)| \geqslant a\big) \leqslant \frac{V(X)}{a^2} \text{ pour tout } a > 0$$

Cas n° 4 : l'échantillon est **petit** $(\boldsymbol{n < 30})$ et X suit une loi quelconque.

On ne peut rien dire sur la loi de $\overline{X}$... Mais nous pouvons nous servir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\big(|X - E(X)| \geqslant a\big) \leqslant \frac{V(X)}{a^2} \text{ pour tout } a > 0$$

qui appliquée à $\overline{X}$ en prenant $a^2 = \dfrac{V(\overline{X})}{\alpha}$ donne $P\left(\overline{X} - \dfrac{\sigma_{\overline{X}}}{\sqrt{\alpha}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + \dfrac{\sigma_{\overline{X}}}{\sqrt{\alpha}}\right) \geqslant \alpha$

Cas n° 4 : l'échantillon est **petit** $(\boldsymbol{n < 30})$ et X suit une loi quelconque.

On ne peut rien dire sur la loi de $\overline{X}$... Mais nous pouvons nous servir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\big(|X - E(X)| \geqslant a\big) \leqslant \frac{V(X)}{a^2} \text{ pour tout } a > 0$$

qui appliquée à $\overline{X}$ en prenant $a^2 = \dfrac{V(\overline{X})}{\alpha}$ donne $P\left(\overline{X} - \dfrac{\sigma_{\overline{X}}}{\sqrt{\alpha}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + \dfrac{\sigma_{\overline{X}}}{\sqrt{\alpha}}\right) \geqslant \alpha$

et permet de construire l'intervalle de confiance :

$$IC_\alpha = \left[\overline{x} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sigma_{\overline{X}} \; ; \; \overline{x} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sigma_{\overline{X}}\right]$$

avec $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (avec remise) ou $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$ (sans remise)

2. L'écart-type σ de la population est inconnu.

Les qualités d'un estimateur dépendent de la formule qu'on utilise pour le calculer et de la façon dont l'échantillon a été choisi.

2. L'écart-type σ de la population est inconnu.

Les qualités d'un estimateur dépendent de la formule qu'on utilise pour le calculer et de la façon dont l'échantillon a été choisi. Dans ce cours, on supposera toujours que les échantillons sont bien constitués.

2. L'écart-type σ de la population est inconnu.

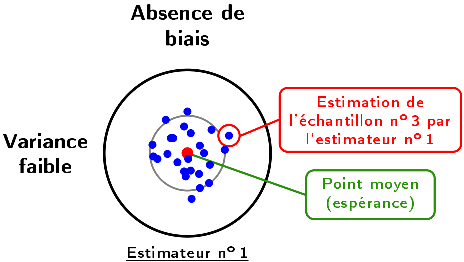
Les qualités d'un estimateur dépendent de la formule qu'on utilise pour le calculer et de la façon dont l'échantillon a été choisi. Dans ce cours, on supposera toujours que les échantillons sont bien constitués. Le schéma ci-dessous montre les valeurs prises par quatre estimateurs sur 25 échantillons différents.

2. L'écart-type σ de la population est inconnu.

Les qualités d'un estimateur dépendent de la formule qu'on utilise pour le calculer et de la façon dont l'échantillon a été choisi. Dans ce cours, on supposera toujours que les échantillons sont bien constitués. Le schéma ci-dessous montre les valeurs prises par quatre estimateurs sur 25 échantillons différents. Chaque point correspond à la valeur prise par l'un des estimateurs sur un échantillon. Le point central, en rouge, étant la valeur qu'on cherche à estimer.

2. L'écart-type σ de la population est inconnu.

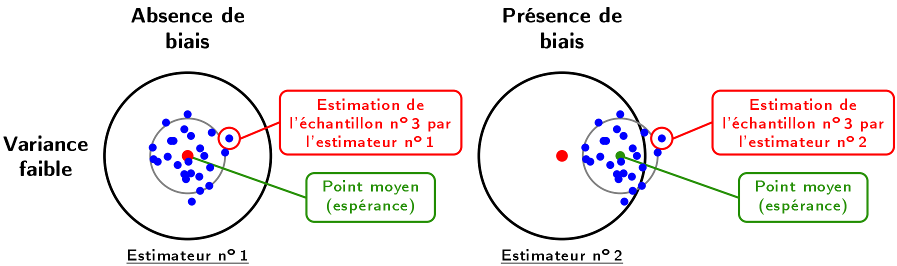
Les qualités d'un estimateur dépendent de la formule qu'on utilise pour le calculer et de la façon dont l'échantillon a été choisi. Dans ce cours, on supposera toujours que les échantillons sont bien constitués. Le schéma ci-dessous montre les valeurs prises par quatre estimateurs sur 25 échantillons différents. Chaque point correspond à la valeur prise par l'un des estimateurs sur un échantillon. Le point central, en rouge, étant la valeur qu'on cherche à estimer.



Le point moyen correspond à la moyenne des 25 estimations.

2. L'écart-type σ de la population est inconnu.

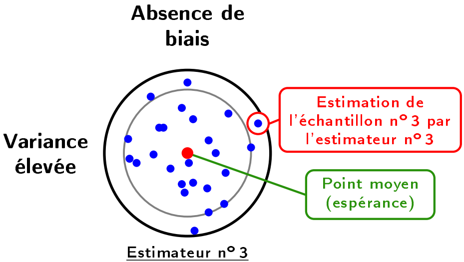
Les qualités d'un estimateur dépendent de la formule qu'on utilise pour le calculer et de la façon dont l'échantillon a été choisi. Dans ce cours, on supposera toujours que les échantillons sont bien constitués. Le schéma ci-dessous montre les valeurs prises par quatre estimateurs sur 25 échantillons différents. Chaque point correspond à la valeur prise par l'un des estimateurs sur un échantillon. Le point central, en rouge, étant la valeur qu'on cherche à estimer.



Le point moyen correspond à la moyenne des 25 estimations.

2. L'écart-type σ de la population est inconnu.

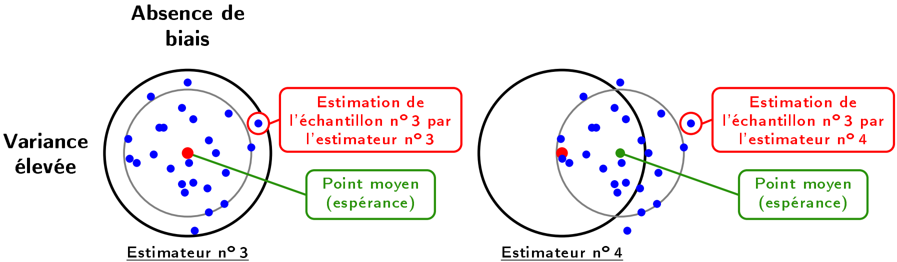
Les qualités d'un estimateur dépendent de la formule qu'on utilise pour le calculer et de la façon dont l'échantillon a été choisi. Dans ce cours, on supposera toujours que les échantillons sont bien constitués. Le schéma ci-dessous montre les valeurs prises par quatre estimateurs sur 25 échantillons différents. Chaque point correspond à la valeur prise par l'un des estimateurs sur un échantillon. Le point central, en rouge, étant la valeur qu'on cherche à estimer.



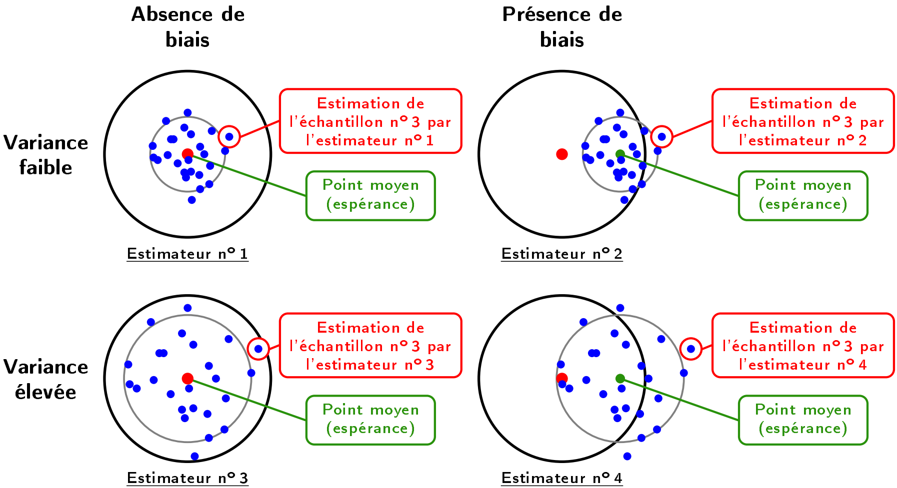
Le point moyen correspond à la moyenne des 25 estimations.

2. L'écart-type σ de la population est inconnu.

Les qualités d'un estimateur dépendent de la formule qu'on utilise pour le calculer et de la façon dont l'échantillon a été choisi. Dans ce cours, on supposera toujours que les échantillons sont bien constitués. Le schéma ci-dessous montre les valeurs prises par quatre estimateurs sur 25 échantillons différents. Chaque point correspond à la valeur prise par l'un des estimateurs sur un échantillon. Le point central, en rouge, étant la valeur qu'on cherche à estimer.



Le point moyen correspond à la moyenne des 25 estimations.



Chaque cercle gris est centré sur l'espérance de l'estimateur étudié et son rayon est son écart-type.

Définition:

On dit qu'un estimateur est :

Définition:

On dit qu'un estimateur est :

- **biaisé** si son espérance sur les échantillons n'est pas égale à la valeur qu'il doit estimer sur la population.

Définition:

On dit qu'un estimateur est :

- **biaisé** si son espérance sur les échantillons n'est pas égale à la valeur qu'il doit estimer sur la population.
- **efficace** si sa variance sur les échantillons est plus petite que celle de tout autre estimateur.

$S^2 = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \overline{x}\right)^2$ est un bon estimateur de la variance de la population à partir de l'échantillon,

$S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \overline{x}\right)^2$ est un bon estimateur de la variance de la population à partir de l'échantillon, mais il est biaisé :

$S^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \overline{x}\right)^2$ est un bon estimateur de la variance de la population à partir de l'échantillon, mais il est biaisé : son espérance n'est pas la variance σ^2 de la population, mais

$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \overline{x}\right)^2$ est un bon estimateur de la variance de la population à partir de l'échantillon, mais il est biaisé : son espérance n'est pas la variance σ^2 de la population, mais $\frac{n-1}{n}\sigma^2$. Donc, on le « corrige » pour qu'il soit sans biais :

$S^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2$ est un bon estimateur de la variance de la population à partir de l'échantillon, mais il est biaisé : son espérance n'est pas la variance σ^2 de la population, mais $\frac{n-1}{n}\sigma^2$. Donc, on le « corrige » pour qu'il soit sans biais :

Définition:

Etant donné un échantillon (x_k) de taille n d'une population, on appelle **variance corrigée** et **écart-type corrigé** les estimateurs :

$$S_c^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2 \text{ et } S_c = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2}$$

$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2$ est un bon estimateur de la variance de la population à partir de l'échantillon, mais il est biaisé : son espérance n'est pas la variance σ^2 de la population, mais $\frac{n-1}{n}\sigma^2$. Donc, on le « corrige » pour qu'il soit sans biais :

Définition:

Etant donné un échantillon (x_k) de taille n d'une population, on appelle **variance corrigée** et **écart-type corrigé** les estimateurs :

$$S_c^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2 \text{ et } S_c = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2}$$

Remarque : Comme $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2$, on passe de la variance à la variance corrigée par la formule :

$$\boxed{S_c^2 = \frac{n}{n-1}S^2}$$

Théorème d'efficacité :

Les estimateurs $\overline{X}$ et S_c de la moyenne et de l'écart-type, sont **non biaisés** :

$$E(\overline{X}) = \mu \text{ et } E(S_c) = \sigma$$

et **efficaces** : leur variance (leur dispersion autour de μ pour $\overline{X}$ et de σ pour S_c) sont plus petites que tout autre estimateur.

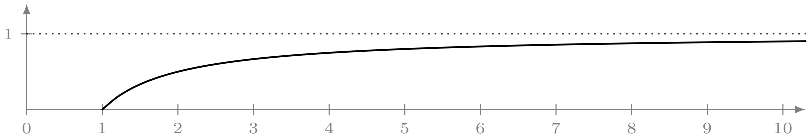
Théorème d'efficacité :

Les estimateurs $\overline{X}$ et S_c de la moyenne et de l'écart-type, sont **non biaisés** :

$$E(\overline{X}) = \mu \text{ et } E(S_c) = \sigma$$

et **efficaces** : leur variance (leur dispersion autour de μ pour $\overline{X}$ et de σ pour S_c) sont plus petites que tout autre estimateur.

Remarque : L'espérance de S^2 (la variance non corrigée) est $\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$:



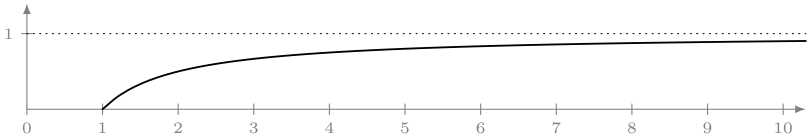
Théorème d'efficacité :

Les estimateurs $\overline{X}$ et S_c de la moyenne et de l'écart-type, sont **non biaisés** :

$$E(\overline{X}) = \mu \text{ et } E(S_c) = \sigma$$

et **efficaces** : leur variance (leur dispersion autour de μ pour $\overline{X}$ et de σ pour S_c) sont plus petites que tout autre estimateur.

Remarque : L'espérance de S^2 (la variance non corrigée) est $\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$:



On constate que lorsque la taille n de l'échantillon croît,

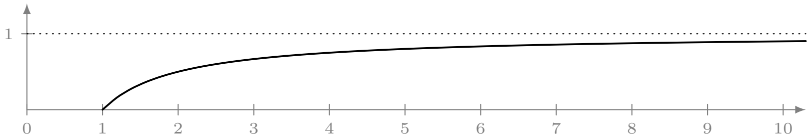
Théorème d'efficacité :

Les estimateurs $\overline{X}$ et S_c de la moyenne et de l'écart-type, sont **non biaisés** :

$$E(\overline{X}) = \mu \text{ et } E(S_c) = \sigma$$

et **efficaces** : leur variance (leur dispersion autour de μ pour $\overline{X}$ et de σ pour S_c) sont plus petites que tout autre estimateur.

Remarque : L'espérance de S^2 (la variance non corrigée) est $\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$:



On constate que lorsque la taille n de l'échantillon croît, $\dfrac{n-1}{n}$ se rapproche de 1,

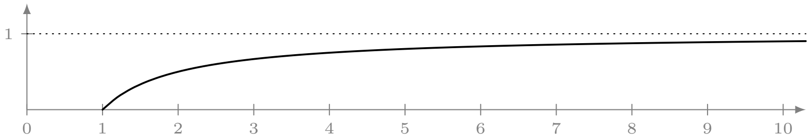
Théorème d'efficacité :

Les estimateurs $\overline{X}$ et S_c de la moyenne et de l'écart-type, sont **non biaisés** :

$$E(\overline{X}) = \mu \text{ et } E(S_c) = \sigma$$

et **efficaces** : leur variance (leur dispersion autour de μ pour $\overline{X}$ et de σ pour S_c) sont plus petites que tout autre estimateur.

Remarque : L'espérance de S^2 (la variance non corrigée) est $\frac{n-1}{n}\sigma^2$. Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1$:



On constate que lorsque la taille n de l'échantillon croît, $\frac{n-1}{n}$ se rapproche de 1, et donc que $Var(S^2)$ se rapproche de σ^2,

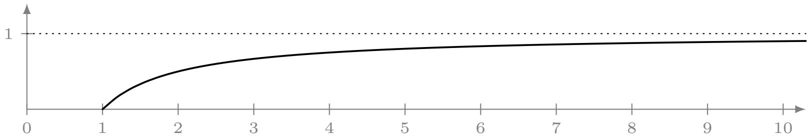
Théorème d'efficacité :

Les estimateurs $\overline{X}$ et S_c de la moyenne et de l'écart-type, sont **non biaisés** :

$$E(\overline{X}) = \mu \text{ et } E(S_c) = \sigma$$

et **efficaces** : leur variance (leur dispersion autour de μ pour $\overline{X}$ et de σ pour S_c) sont plus petites que tout autre estimateur.

Remarque : L'espérance de S^2 (la variance non corrigée) est $\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$:



On constate que lorsque la taille n de l'échantillon croît, $\dfrac{n-1}{n}$ se rapproche de 1, et donc que $Var(S^2)$ se rapproche de σ^2, la variance de la population.

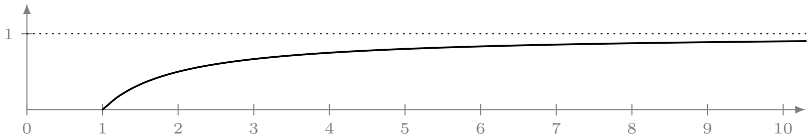
Théorème d'efficacité :

Les estimateurs $\overline{X}$ et S_c de la moyenne et de l'écart-type, sont **non biaisés** :

$$E(\overline{X}) = \mu \text{ et } E(S_c) = \sigma$$

et **efficaces** : leur variance (leur dispersion autour de μ pour $\overline{X}$ et de σ pour S_c) sont plus petites que tout autre estimateur.

Remarque : L'espérance de S^2 (la variance non corrigée) est $\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$:



On constate que lorsque la taille n de l'échantillon croît, $\dfrac{n-1}{n}$ se rapproche de 1, et donc que $Var(S^2)$ se rapproche de σ^2, la variance de la population. C'est la raison pour laquelle, en pratique, à partir de $n \geqslant 30$,

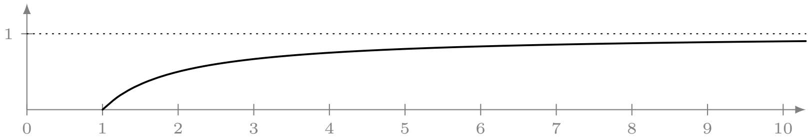
Théorème d'efficacité :

Les estimateurs $\overline{X}$ et S_c de la moyenne et de l'écart-type, sont **non biaisés** :

$$E(\overline{X}) = \mu \text{ et } E(S_c) = \sigma$$

et **efficaces** : leur variance (leur dispersion autour de μ pour $\overline{X}$ et de σ pour S_c) sont plus petites que tout autre estimateur.

Remarque : L'espérance de S^2 (la variance non corrigée) est $\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$:



On constate que lorsque la taille n de l'échantillon croît, $\dfrac{n-1}{n}$ se rapproche de 1, et donc que $Var(S^2)$ se rapproche de σ^2, la variance de la population. C'est la raison pour laquelle, en pratique, à partir de $n \geqslant 30$, des statisticiens ne corrigent plus la variance observée sur l'échantillon (S^2) : $\frac{29}{30} \simeq 0,97$ (une erreur de 3%).

$\boxed{\text{Dans ce cours, la variance sera systématiquement corrigée.}}$

Reprenons l'étude du cas n° 1 :

Variable qui suit
la loi $\mathcal{N}(0,1)$

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

Comme on ne connaît pas l'écart-type σ, on va le remplacer par l'estimateur corrigé de l'écart-type S_c :

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S_c}{\sqrt{n}}} \leqslant t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

Variable qui suit la loi
de Student à $n-1$ degrés
de liberté.

Donc, on va retrouver les mêmes intervalles de confiances que précédemment, sauf que σ sera remplacé par S_c et $z_{\frac{\alpha}{2}}$ par $t_{\frac{\alpha}{2}}$ issu de la table de Student.

Donc, on va retrouver les mêmes intervalles de confiances que précédemment, sauf que σ sera remplacé par S_c et $z_{\frac{\alpha}{2}}$ par $t_{\frac{\alpha}{2}}$ issu de la table de Student.

Mais, comme dès que $n \geqslant 30$, la distribution de Student à $n-1$ degrés de liberté se comporte pratiquement comme une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On utilisera la loi de Student seulement pour les petits effectifs $(n < 30)$.

Donc, on va retrouver les mêmes intervalles de confiances que précédemment, sauf que σ sera remplacé par S_c et $z_{\frac{\alpha}{2}}$ par $t_{\frac{\alpha}{2}}$ issu de la table de Student.

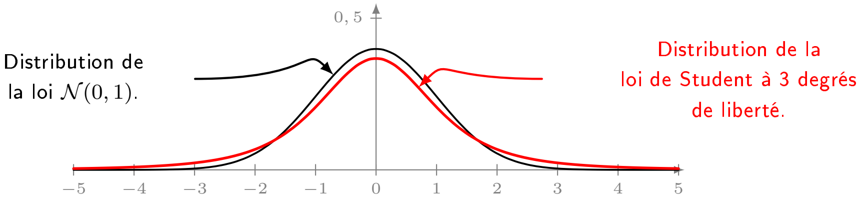
Mais, comme dès que $n \geqslant 30$, la distribution de Student à $n-1$ degrés de liberté se comporte pratiquement comme une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On utilisera la loi de Student seulement pour les petits effectifs $(n < 30)$.

D'ailleurs, la loi de Student est souvent surnommée la « **loi des petits échantillons** ».

Donc, on va retrouver les mêmes intervalles de confiances que précédemment, sauf que σ sera remplacé par S_c et $z_{\frac{\alpha}{2}}$ par $t_{\frac{\alpha}{2}}$ issu de la table de Student.

Mais, comme dès que $n \geqslant 30$, la distribution de Student à $n-1$ degrés de liberté se comporte pratiquement comme une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On utilisera la loi de Student seulement pour les petits effectifs $(n < 30)$.

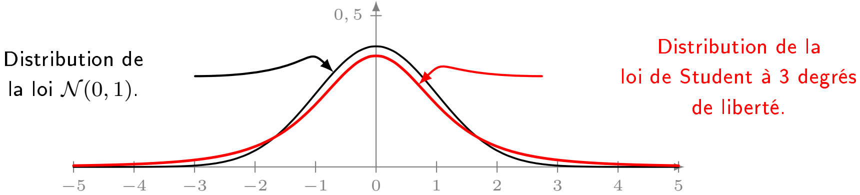
D'ailleurs, la loi de Student est souvent surnommée la « **loi des petits échantillons** ».



Donc, on va retrouver les mêmes intervalles de confiances que précédemment, sauf que σ sera remplacé par S_c et $z_{\frac{\alpha}{2}}$ par $t_{\frac{\alpha}{2}}$ issu de la table de Student.

Mais, comme dès que $n \geqslant 30$, la distribution de Student à $n-1$ degrés de liberté se comporte pratiquement comme une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On utilisera la loi de Student seulement pour les petits effectifs $(n < 30)$.

D'ailleurs, la loi de Student est souvent surnommée la « **loi des petits échantillons** ».

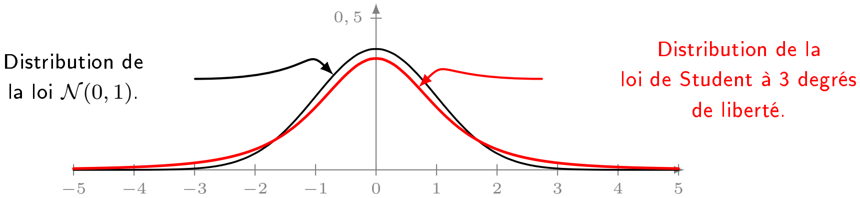


La loi de Student $\mathcal{T}(3)$ est plus légèrement plus aplatie que la loi normale,

Donc, on va retrouver les mêmes intervalles de confiances que précédemment, sauf que σ sera remplacé par S_c et $z_{\frac{\alpha}{2}}$ par $t_{\frac{\alpha}{2}}$ issu de la table de Student.

Mais, comme dès que $n \geqslant 30$, la distribution de Student à $n-1$ degrés de liberté se comporte pratiquement comme une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On utilisera la loi de Student seulement pour les petits effectifs $(n < 30)$.

D'ailleurs, la loi de Student est souvent surnommée la « **loi des petits échantillons** ».

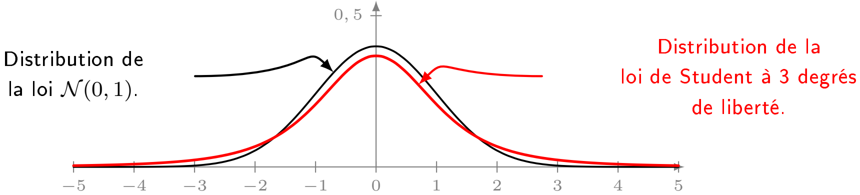


La loi de Student $\mathcal{T}(3)$ est plus légèrement plus aplatie que la loi normale,
son écart-type est donc plus grand $(\sqrt{3} \simeq 1,7)$, ce qui traduit la perte d'une information,

Donc, on va retrouver les mêmes intervalles de confiances que précédemment, sauf que σ sera remplacé par S_c et $z_{\frac{\alpha}{2}}$ par $t_{\frac{\alpha}{2}}$ issu de la table de Student.

Mais, comme dès que $n \geqslant 30$, la distribution de Student à $n-1$ degrés de liberté se comporte pratiquement comme une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On utilisera la loi de Student seulement pour les petits effectifs $(n < 30)$.

D'ailleurs, la loi de Student est souvent surnommée la « **loi des petits échantillons** ».



La loi de Student $\mathcal{T}(3)$ est plus légèrement plus aplatie que la loi normale, son écart-type est donc plus grand $(\sqrt{3} \simeq 1,7)$, ce qui traduit la perte d'une information, celle de l'écart-type σ de la population, remplacé par son estimation S_c.