VII. Variables aléatoires réelles.

Soient $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire et $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** qui en rend compte.

Soient $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire et $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** qui en rend compte. Il arrive fréquemment qu'à chaque résultat de $\mathcal{E}$ on associe un nombre réel. On définit alors une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

VII. Variables aléatoires réelles

Soient $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire et $\big(\Omega, \mathcal{T}, P\big)$ un **espace probabilisé** qui en rend compte. Il arrive fréquemment qu'à chaque résultat de $\mathcal{E}$ on associe un nombre réel. On définit alors une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

D'ailleurs, à l'origine $\mathcal{E}$ était un jeu et X représentait un gain.

1. Approche empirique

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R, une boule verte V, et une boule bleue B.

1. Approche empirique

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R, une boule verte V, et une boule bleue B. Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

1. Approche empirique

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R, une boule verte V, et une boule bleue B. Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

1er tirage \ 2nd tirage	R	V	B
R			
V	(V, R)	(V, V)	(V, B)
B	(B, R)	(B, V)	(B, B)

1. Approche empirique

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R, une boule verte V, et une boule bleue B. Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

2nd tirage / 1er tirage	R	V	B
R	(R, R)		
V	(V, R)	(V, V)	(V, B)
B	(B, R)	(B, V)	(B, B)

1. Approche empirique

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R, une boule verte V, et une boule bleue B. Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

2nd tirage / 1er tirage	R	V	B
R	(R, R)	(R, V)	
V	(V, R)	(V, V)	(V, B)
B	(B, R)	(B, V)	(B, B)

1. Approche empirique

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R, une boule verte V, et une boule bleue B. Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

2nd tirage / 1er tirage	R	V	B
R	(R, R)	(R, V)	(R, B)
V	(V, R)	(V, V)	(V, B)
B	(B, R)	(B, V)	(B, B)

1. Approche empirique

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R, une boule verte V, et une boule bleue B. Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

2nd tirage / 1er tirage	R	V	B
R	(R,R)	(R,V)	(R,B)
V	(V,R)	(V,V)	(V,B)
B	(B,R)	(B,V)	(B,B)

On est en situation d'équiprobabilité, donc la probabilité d'avoir au moins une boule bleue est :

1. Approche empirique

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R, une boule verte V, et une boule bleue B. Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

1^er tirage \ 2^nd tirage	R	V	B
R	(R,R)	(R,V)	(R,B)
V	(V,R)	(V,V)	(V,B)
B	(B,R)	(B,V)	(B,B)

On est en situation d'équiprobabilité, donc la probabilité d'avoir au moins une boule bleue est :

$$P\left(\{(R,B),\right.$$

1. Approche empirique

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R, une boule verte V, et une boule bleue B. Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

2nd tirage / 1er tirage	R	V	B
R	(R,R)	(R,V)	(R,B)
V	(V,R)	(V,V)	(V,B)
B	(B,R)	(B,V)	(B,B)

On est en situation d'équiprobabilité, donc la probabilité d'avoir au moins une boule bleue est :

$$P\left(\{(R,B),(V,B),(B,R),(B,V),(B,B)\}\right) =$$

1. Approche empirique

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R, une boule verte V, et une boule bleue B. Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

1$^{\text{er}}$ tirage \ 2$^{\text{nd}}$ tirage	R	V	B
R	(R,R)	(R,V)	(R,B)
V	(V,R)	(V,V)	(V,B)
B	(B,R)	(B,V)	(B,B)

On est en situation d'équiprobabilité, donc la probabilité d'avoir au moins une boule bleue est :

$$P\left(\{(R,B),(V,B),(B,R),(B,V),(B,B)\}\right) = \frac{5}{9}$$

Complétons l'énoncé :

- Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 6€.
- Pour chaque boule verte tirée, on gagne 2€.
- Pour chaque boule bleue tirée, on perd 8€.

Complétons l'énoncé :

- Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 6€.
- Pour chaque boule verte tirée, on gagne 2€.
- Pour chaque boule bleue tirée, on perd 8€.

Notons G la variable aléatoire qui à un tirage de deux boules associe le gain du joueur :

$$G: \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (R, B) & \longmapsto & \dots \end{array}$$

Complétons l'énoncé :

- Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 6€.
- Pour chaque boule verte tirée, on gagne 2€.
- Pour chaque boule bleue tirée, on perd 8€.

Notons G la variable aléatoire qui à un tirage de deux boules associe le gain du joueur :

$$G : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (R, B) & \longmapsto & \mathbf{-2} \end{array}$$

Complétons l'énoncé :

- Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 6€.
- Pour chaque boule verte tirée, on gagne 2€.
- Pour chaque boule bleue tirée, on perd 8€.

Notons G la variable aléatoire qui à un tirage de deux boules associe le gain du joueur :

$$G: \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (R,B) & \longmapsto & \mathbf{-2} \end{array}$$

Les valeurs prises par G sont $G(\Omega) = \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$

Complétons l'énoncé :

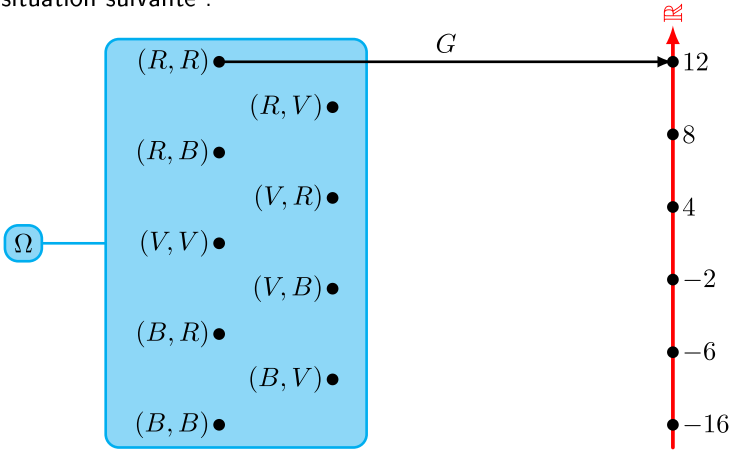
- Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 6€.
- Pour chaque boule verte tirée, on gagne 2€.
- Pour chaque boule bleue tirée, on perd 8€.

Notons G la variable aléatoire qui à un tirage de deux boules associe le gain du joueur :

$$G : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (R,B) & \longmapsto & \mathbf{-2} \end{array}$$

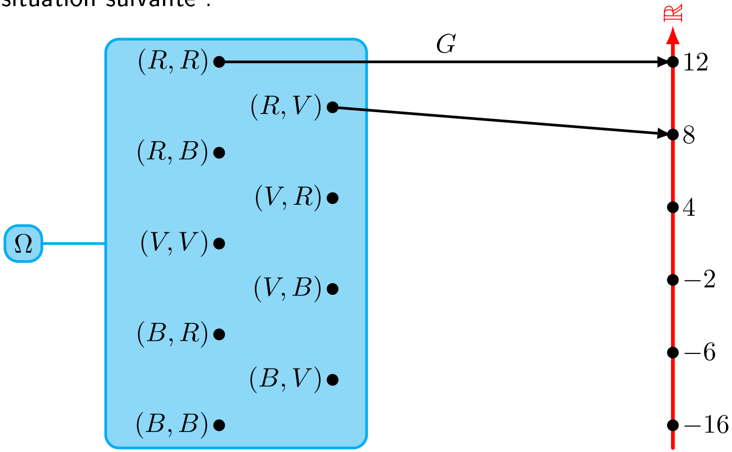
Les valeurs prises par G sont $G(\Omega) = \{\, -16\,,\ -6\,,\ -2\,,\ 4\,,\ 8\,,\ 12\}$

On a la situation suivante :



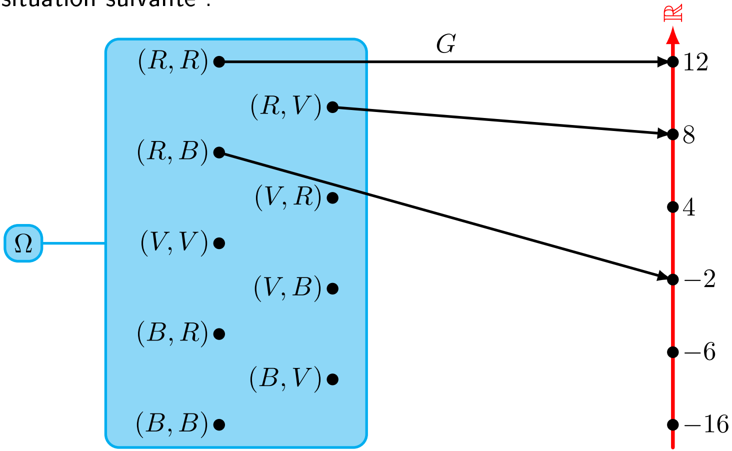
$$P(G = 8) = P\Big(\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}\Big) =$$

On a la situation suivante :



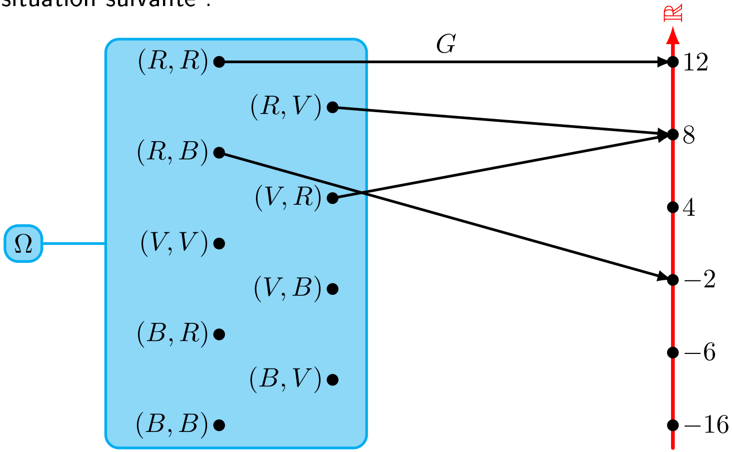
$$P(G=8) = P\Big(\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}\Big) =$$

On a la situation suivante :



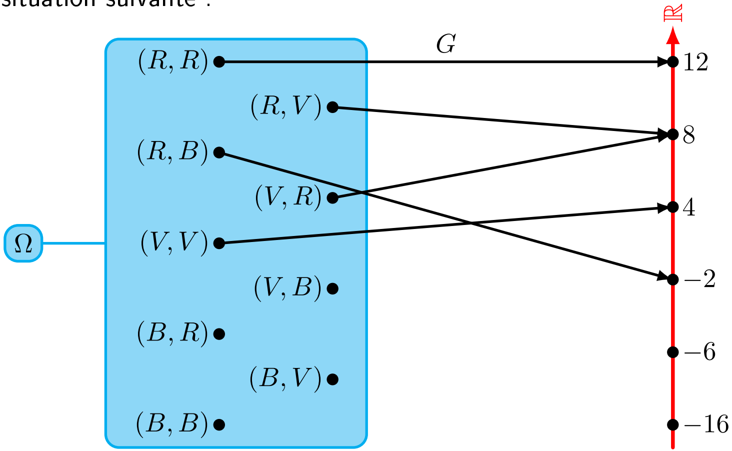
$$P(G=8) = P\Big(\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}\Big) =$$

On a la situation suivante :



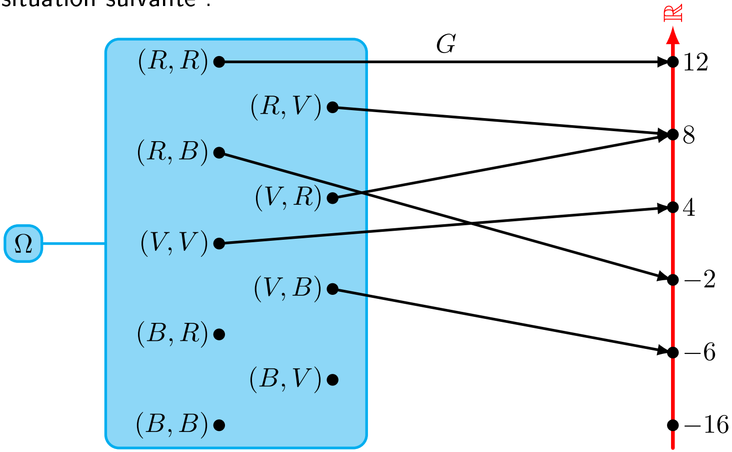
$$P(G=8) = P\Big(\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}\Big) =$$

On a la situation suivante :



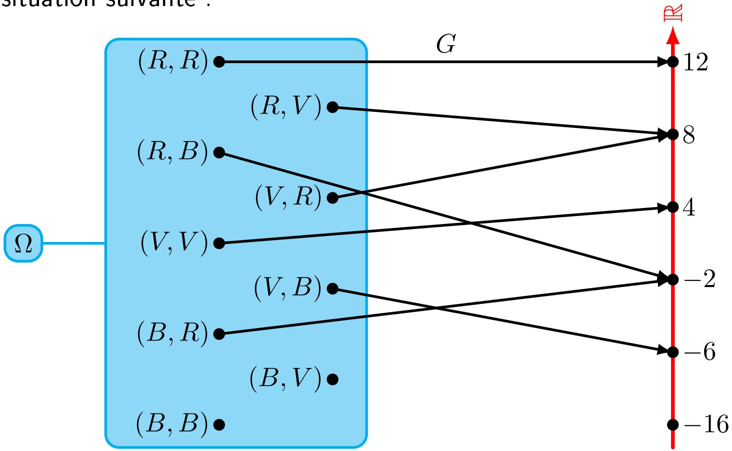
$$P(G=8) = P\Big(\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}\Big) =$$

On a la situation suivante :



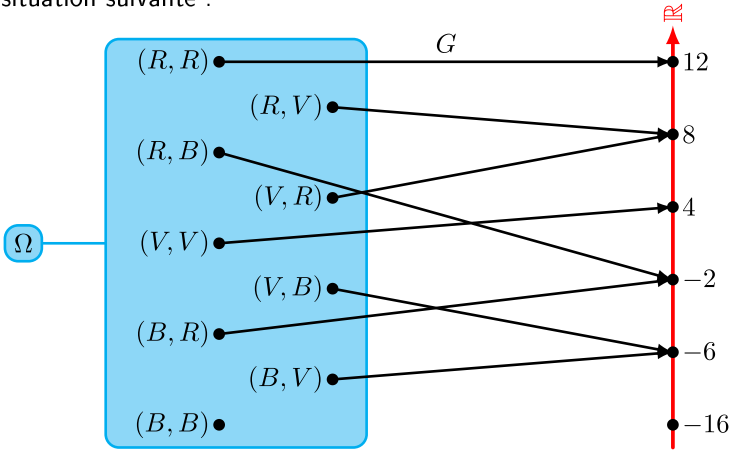
$$P(G=8) = P\Big(\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}\Big) =$$

On a la situation suivante :



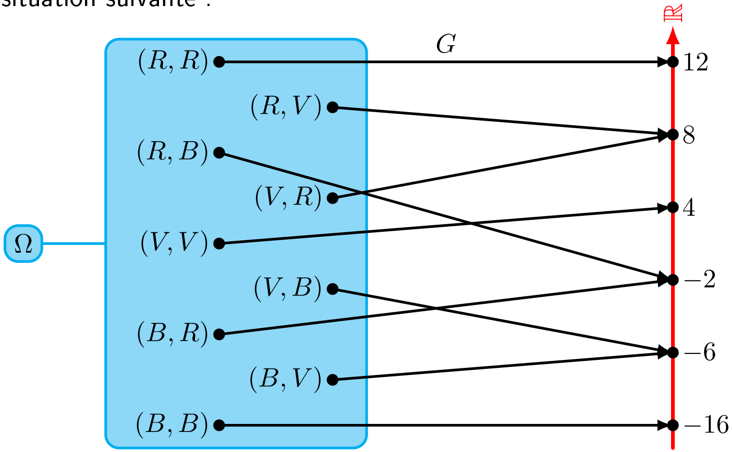
$$P(G=8) = P\Big(\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}\Big) =$$

On a la situation suivante :



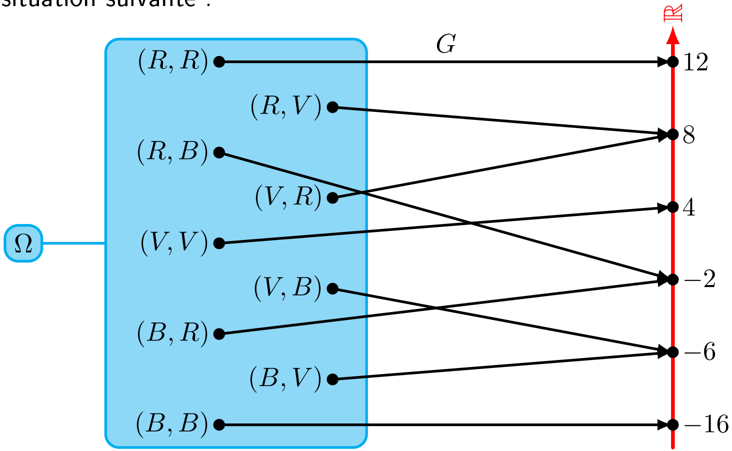
$$P(G=8) = P\Big(\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}\Big) =$$

On a la situation suivante :



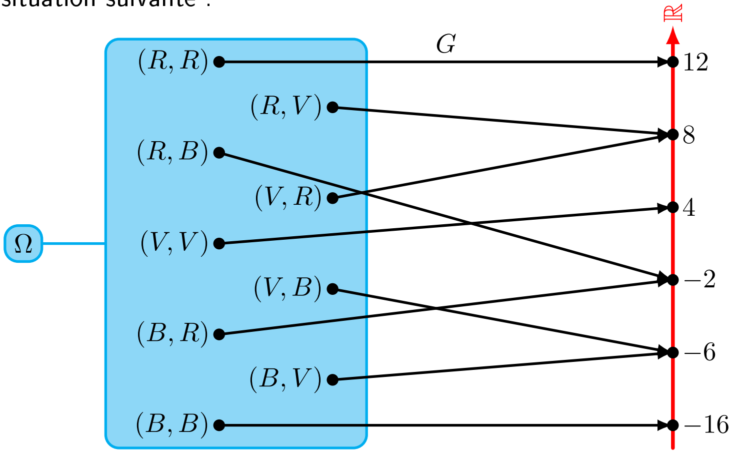
$$P(G=8) = P\Big(\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}\Big) =$$

On a la situation suivante :



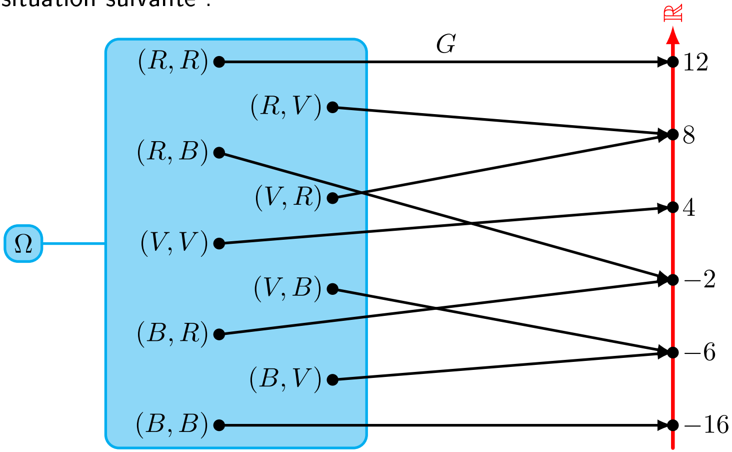
$$P(G=8) = \boldsymbol{P\Big(\{(R,V),(V,R)\}\Big) =}$$

On a la situation suivante :



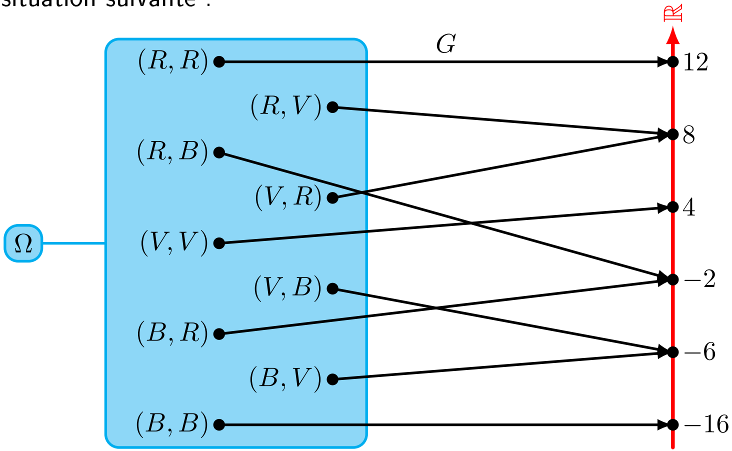
$$P(G=8) = \boldsymbol{P\Big(\{(R,V),(V,R)\}\Big) = \frac{2}{9}}$$

On a la situation suivante :



L'espérance de la variable aléatoire G est :

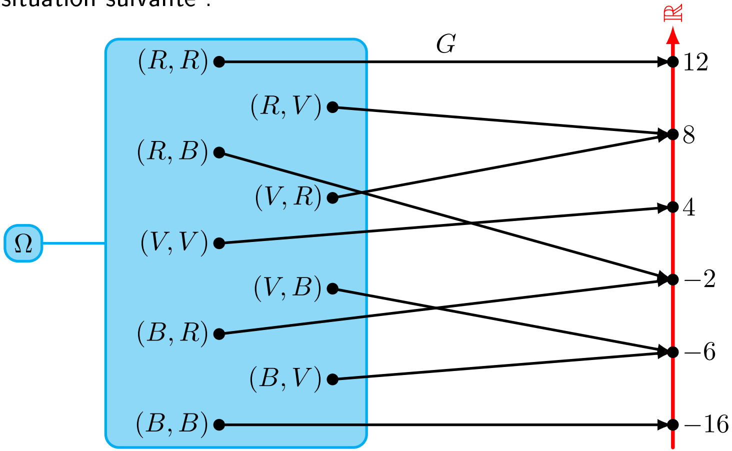
On a la situation suivante :



L'espérance de la variable aléatoire G est :

☞ $E(G) =$ ....

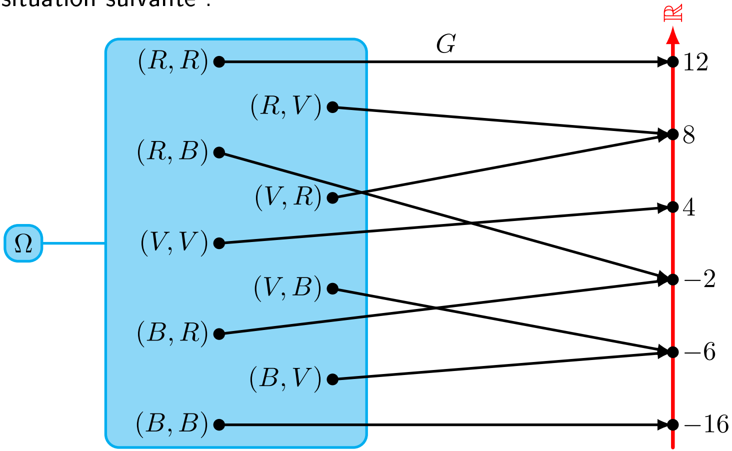
On a la situation suivante :



L'espérance de la variable aléatoire G est :

☞ $E(G) = 12 \times \frac{1}{9} +$

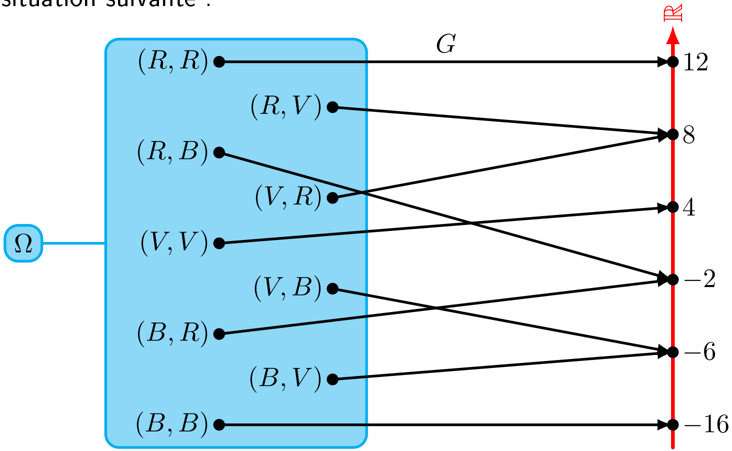
On a la situation suivante :



L'espérance de la variable aléatoire G est :

☞ $E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} +$

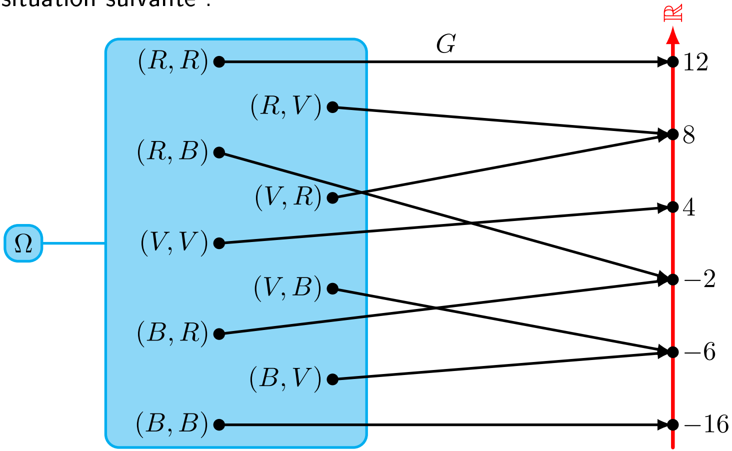
On a la situation suivante :



L'espérance de la variable aléatoire G est :

☞ $E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} =$

On a la situation suivante :



L'espérance de la variable aléatoire G est :

☞ $E(G) = 12 \times \frac{1}{9} + 8 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + (-2) \times \frac{2}{9} + (-6) \times \frac{2}{9} + (-16) \times \frac{1}{9} = 0$

☞ $E(G) = \ldots = 0€$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la

☞ $E(G) = \ldots = 0€$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est

☞ $E(G) = \ldots = 0$€

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**.

☞ $E(G) = \dots = 0$€

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est

☞ $E(G) = \ldots = 0€$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

☞ $E(G) = \ldots = 0$€

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la **moyenne** des résultats de l'expérience aléatoire **pondérés**

☞ $E(G) = \ldots = 0$€

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la **moyenne** des résultats de l'expérience aléatoire **pondérés** par les **probabilités**.

☞ $E(G) = \ldots = 0$€

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la **moyenne** des résultats de l'expérience aléatoire **pondérés** par les **probabilités**.

$E(G^2) =$

☞ $E(G) = \ldots = 0€$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la **moyenne** des résultats de l'expérience aléatoire **pondérés** par les **probabilités**.

$$E(G^2) = \mathbf{12^2} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}} +$$

☞ $E(G) = \ldots = 0€$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la **moyenne** des résultats de l'expérience aléatoire **pondérés** par les **probabilités**.

$$E(G^2) = \mathbf{12^2} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}} + \mathbf{8^2} \times \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}} +$$

☞ $E(G) = \ldots = 0€$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la **moyenne** des résultats de l'expérience aléatoire **pondérés** par les **probabilités**.

$$E(G^2) = \mathbf{12^2} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}} + \mathbf{8^2} \times \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}} + \mathbf{4^2} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}} +$$

☞ $E(G) = \ldots = 0€$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la **moyenne** des résultats de l'expérience aléatoire **pondérés** par les **probabilités**.

$$E(G^2) = \mathbf{12^2} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}} + \mathbf{8^2} \times \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}} + \mathbf{4^2} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}} + \mathbf{(-2)^2} \times \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}} +$$

☞ $E(G) = \ldots = 0€$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la **moyenne** des résultats de l'expérience aléatoire **pondérés** par les **probabilités**.

$$E(G^2) = \mathbf{12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9}}$$

☞ $E(G) = \ldots = 0€$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la **moyenne** des résultats de l'expérience aléatoire **pondérés** par les **probabilités**.

$$E(G^2) = \mathbf{12^2} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}} + \mathbf{8^2} \times \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}} + \mathbf{4^2} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}} + \mathbf{(-2)^2} \times \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}} + \mathbf{(-6)^2} \times \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}} + \mathbf{(-16)^2} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}$$

$$=$$

☞ $E(G) = \ldots = 0€$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la **moyenne** des résultats de l'expérience aléatoire **pondérés** par les **probabilités**.

$$E(G^2) = \mathbf{12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9}}$$

$$= \mathbf{\frac{624}{9}} \simeq$$

☞ $E(G) = \ldots = 0€$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la **moyenne** des résultats de l'expérience aléatoire **pondérés** par les **probabilités**.

$$E(G^2) = \mathbf{12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9}}$$

$$= \mathbf{\frac{624}{9} \simeq 69,3}$$

☞ $E(G) = \ldots = 0$€

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la **moyenne** des résultats de l'expérience aléatoire **pondérés** par les **probabilités**.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9}$$

$$= \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

☞ La **variance** $V(G) =$

☞ $E(G) = \ldots = 0$€

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la **moyenne** des résultats de l'expérience aléatoire **pondérés** par les **probabilités**.

$$E(G^2) = \mathbf{12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9}}$$

$$= \mathbf{\frac{624}{9} \simeq 69,3}$$

☞ La **variance** $V(G) = \boldsymbol{E(G^2) - E(G)^2 =}$

☞ $E(G) = \ldots = 0$€

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la **moyenne** des résultats de l'expérience aléatoire **pondérés** par les **probabilités**.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9}$$
$$= \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

☞ La **variance** $V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 -$

☞ $E(G) = \ldots = 0$€

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la **moyenne** des résultats de l'expérience aléatoire **pondérés** par les **probabilités**.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9}$$
$$= \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

☞ La **variance** $V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 - 0^2 =$

☞ $E(G) = \ldots = 0€$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la **moyenne** des résultats de l'expérience aléatoire **pondérés** par les **probabilités**.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9}$$

$$= \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

☞ La **variance** $V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 - 0^2 = 69,3€^2$

☞ $E(G) = \ldots = 0$€

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la **moyenne** des résultats de l'expérience aléatoire **pondérés** par les **probabilités**.

$$E(G^2) = 12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9}$$
$$= \frac{624}{9} \simeq 69,3$$

☞ La **variance** $V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 - 0^2 = 69,3$€^{2}

☞ **L'écart-type** $\sigma_G =$

☞ $E(G) = \ldots = 0$€

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la **moyenne** des résultats de l'expérience aléatoire **pondérés** par les **probabilités**.

$$E(G^2) = \mathbf{12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9}}$$

$$= \mathbf{\frac{624}{9} \simeq 69,3}$$

☞ La **variance** $V(G) = \boldsymbol{E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 - 0^2 = 69,3}$€^{2}

☞ **L'écart-type** $\sigma_G = \boldsymbol{\sqrt{69,3} \simeq}$

☞ $E(G) = \ldots = 0€$

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la **moyenne** des gains est **nulle**. Autrement dit, ce jeu est **équitable** sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la **moyenne** des résultats de l'expérience aléatoire **pondérés** par les **probabilités**.

$$E(G^2) = \mathbf{12^2 \times \frac{1}{9} + 8^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + (-2)^2 \times \frac{2}{9} + (-6)^2 \times \frac{2}{9} + (-16)^2 \times \frac{1}{9}}$$
$$= \mathbf{\frac{624}{9} \simeq 69,3}$$

☞ La **variance** $V(G) = \mathbf{E(G^2) - E(G)^2 = 69,3 - 0^2 = 69,3€^2}$

☞ **L'écart-type** $\sigma_G = \mathbf{\sqrt{69,3} \simeq 8,3€}$

2. Fonctions de répartitions

Rappel:

Etant donnée l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. $X^{-1}(A)$ est appelée **l'image réciproque de A par X.**

2. Fonctions de répartitions

Rappel:

Etant donnée l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. $X^{-1}(A)$ est appelée **l'image réciproque de A par X.**

Elle est définie par $X^{-1}(A) = \boldsymbol{\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}}$4 et a les propriétés suivantes :

2. Fonctions de répartitions

Rappel:

Etant donnée l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. $X^{-1}(A)$ est appelée **l'image réciproque de A par X.**

Elle est définie par $X^{-1}(A) = \{\boldsymbol{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A}\}$4 et a les propriétés suivantes :

Pour toute parties A et B de $\mathbb{R}$, elle a les propriété suivantes :

2. Fonctions de répartitions

Rappel:

Etant donnée l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. $X^{-1}(A)$ est appelée **l'image réciproque de A par X.**

Elle est définie par $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$4 et a les propriétés suivantes :

Pour toute parties A et B de $\mathbb{R}$, elle a les propriété suivantes :

- $X^{-1}(A \cap B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)}$

2. Fonctions de répartitions

Rappel:

Etant donnée l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. $X^{-1}(A)$ est appelée **l'image réciproque de A par X.**

Elle est définie par $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$4 et a les propriétés suivantes :

Pour toute parties A et B de $\mathbb{R}$, elle a les propriété suivantes :

- $X^{-1}(A \cap B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)}$
- $X^{-1}(A \cup B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)}$

2. Fonctions de répartitions

Rappel:

Etant donnée l'application $X:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. $X^{-1}(A)$ est appelée **l'image réciproque de A par X.**

Elle est définie par $X^{-1}(A) = \{\boldsymbol{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A}\}$4 et a les propriétés suivantes :

Pour toute parties A et B de $\mathbb{R}$, elle a les propriété suivantes :

- $X^{-1}(A \cap B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)}$
- $X^{-1}(A \cup B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)}$
- $X^{-1}(A \setminus B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \setminus X^{-1}(B)}$

2. Fonctions de répartitions

Rappel:

Etant donnée l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. $X^{-1}(A)$ est appelée **l'image réciproque de A par X.**

Elle est définie par $X^{-1}(A) = \{\boldsymbol{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A}\}$4 et a les propriétés suivantes :

Pour toute parties A et B de $\mathbb{R}$, elle a les propriété suivantes :

- $X^{-1}(A \cap B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)}$
- $X^{-1}(A \cup B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)}$
- $X^{-1}(A \setminus B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \setminus X^{-1}(B)}$

Pour toute famille non vide $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

2. Fonctions de répartitions

Rappel:

Etant donnée l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. $X^{-1}(A)$ est appelée **l'image réciproque de A par X.**

Elle est définie par $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$4 et a les propriétés suivantes :

Pour toute parties A et B de $\mathbb{R}$, elle a les propriété suivantes :

- $X^{-1}(A \cap B) = X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)$
- $X^{-1}(A \cup B) = X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)$
- $X^{-1}(A \setminus B) = X^{-1}(A) \setminus X^{-1}(B)$

Pour toute famille non vide $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

- $X^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_i\right) =$

2. Fonctions de répartitions

Rappel:

Etant donnée l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. $X^{-1}(A)$ est appelée **l'image réciproque de A par X.**

Elle est définie par $X^{-1}(A) = \{\boldsymbol{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A}\}$4 et a les propriétés suivantes :

Pour toute parties A et B de $\mathbb{R}$, elle a les propriété suivantes :

- $X^{-1}(A \cap B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)}$
- $X^{-1}(A \cup B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)}$
- $X^{-1}(A \setminus B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \setminus X^{-1}(B)}$

Pour toute famille non vide $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

- $X^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_i\right) = \boldsymbol{\bigcup_{k=1}^{\infty} X^{-1}(A_k)}$

2. Fonctions de répartitions

Rappel:

Etant donnée l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. $X^{-1}(A)$ est appelée **l'image réciproque de A par X.**

Elle est définie par $X^{-1}(A) = \{\boldsymbol{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A}\}$4 et a les propriétés suivantes :

Pour toute parties A et B de $\mathbb{R}$, elle a les propriété suivantes :

- $X^{-1}(A \cap B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)}$
- $X^{-1}(A \cup B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)}$
- $X^{-1}(A \setminus B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \setminus X^{-1}(B)}$

Pour toute famille non vide $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

- $X^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_i\right) = \boldsymbol{\bigcup_{k=1}^{\infty} X^{-1}(A_k)}$
- $X^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_i\right) =$

2. Fonctions de répartitions

Rappel:

Etant donnée l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. $X^{-1}(A)$ est appelée **l'image réciproque de A par X.**

Elle est définie par $X^{-1}(A) = \{\boldsymbol{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A}\}$4 et a les propriétés suivantes :

Pour toute parties A et B de $\mathbb{R}$, elle a les propriété suivantes :

- $X^{-1}(A \cap B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)}$
- $X^{-1}(A \cup B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)}$
- $X^{-1}(A \setminus B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \setminus X^{-1}(B)}$

Pour toute famille non vide $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

- $X^{-1}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_i\right) = \boldsymbol{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} X^{-1}(A_k)}$
- $X^{-1}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_i\right) = \boldsymbol{\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} X^{-1}(A_k)}$

2. Fonctions de répartitions

Rappel:

Etant donnée l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. $X^{-1}(A)$ est appelée **l'image réciproque de A par X.**

Elle est définie par $X^{-1}(A) = \{\boldsymbol{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A}\}$4 et a les propriétés suivantes :

Pour toute parties A et B de $\mathbb{R}$, elle a les propriété suivantes :

- $X^{-1}(A \cap B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)}$
- $X^{-1}(A \cup B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)}$
- $X^{-1}(A \setminus B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \setminus X^{-1}(B)}$

Pour toute famille non vide $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

- $X^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_i\right) = \boldsymbol{\bigcup_{k=1}^{\infty} X^{-1}(A_k)}$
- $X^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_i\right) = \boldsymbol{\bigcap_{k=1}^{\infty} X^{-1}(A_k)}$

Et, étant donnée une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

2. Fonctions de répartitions

Rappel:

Etant donnée l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. $X^{-1}(A)$ est appelée **l'image réciproque de A par X.**

Elle est définie par $X^{-1}(A) = \{\boldsymbol{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A}\}$4 et a les propriétés suivantes :

Pour toute parties A et B de $\mathbb{R}$, elle a les propriété suivantes :

- $X^{-1}(A \cap B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)}$
- $X^{-1}(A \cup B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)}$
- $X^{-1}(A \setminus B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \setminus X^{-1}(B)}$

Pour toute famille non vide $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

- $X^{-1}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_i\right) = \boldsymbol{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} X^{-1}(A_k)}$
- $X^{-1}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_i\right) = \boldsymbol{\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} X^{-1}(A_k)}$

Et, étant donnée une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: $(f \circ X)^{-1}(A) =$

2. Fonctions de répartitions

Rappel:

Etant donnée l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. $X^{-1}(A)$ est appelée **l'image réciproque de A par X.**

Elle est définie par $X^{-1}(A) = \boldsymbol{\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}}$4 et a les propriétés suivantes :

Pour toute parties A et B de $\mathbb{R}$, elle a les propriété suivantes :

- $X^{-1}(A \cap B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)}$
- $X^{-1}(A \cup B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)}$
- $X^{-1}(A \setminus B) = \boldsymbol{X^{-1}(A) \setminus X^{-1}(B)}$

Pour toute famille non vide $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

- $X^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_i\right) = \boldsymbol{\bigcup_{k=1}^{\infty} X^{-1}(A_k)}$
- $X^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_i\right) = \boldsymbol{\bigcap_{k=1}^{\infty} X^{-1}(A_k)}$

Et, étant donnée une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: $(f \circ X)^{-1}(A) = \boldsymbol{X^{-1}(f^{-1}(A))}$

VII. Variables aléatoires réelles

Définition:

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. On appelle **variable aléatoire**

VII. Variables aléatoires réelles

Définition:

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. On appelle **variable aléatoire** réelle (v.a.r), toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété suivantes :

Définition:

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. On appelle **variable aléatoire** réelle (v.a.r), toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété suivantes :

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$

Définition:

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. On appelle **variable aléatoire** réelle (v.a.r), toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété suivantes :

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$

Remarques :

i. Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$ revient à dire que l'ensemble $X^{-1}(I)$ est un **évènement**,

Définition:

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. On appelle **variable aléatoire** réelle (v.a.r), toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété suivantes :

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$

Remarques :

i. Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$ revient à dire que l'ensemble $X^{-1}(I)$ est un **évènement**, il aura donc une probabilité.

Définition:

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. On appelle **variable aléatoire** réelle (v.a.r), toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété suivantes :

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$

Remarques :

i. Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$ revient à dire que l'ensemble $X^{-1}(I)$ est un **évènement**, il aura donc une probabilité.

ii. Si la tribu $\mathcal{T}$ est égale à $\mathcal{P}(\Omega)$, toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire.

Définition:

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. On appelle **variable aléatoire** réelle (v.a.r), toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété suivantes :

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$

Remarques :

i. Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$ revient à dire que l'ensemble $X^{-1}(I)$ est un **évènement**, il aura donc une probabilité.

ii. Si la tribu $\mathcal{T}$ est égale à $\mathcal{P}(\Omega)$, toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire.

iii. Soit A la partie de $\mathbb{R}$ qui est la réunion ou l'intersection d'un ensemble dénombrable d'intervalles, alors $X^{-1}(A)$ est la réunion ou l'intersection d'un ensemble dénombrable d'évènements.

Définition:

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. On appelle **variable aléatoire** réelle (v.a.r), toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété suivantes :

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$

Remarques :

i. Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$ revient à dire que l'ensemble $X^{-1}(I)$ est un **évènement**, il aura donc une probabilité.

ii. Si la tribu $\mathcal{T}$ est égale à $\mathcal{P}(\Omega)$, toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire.

iii. Soit A la partie de $\mathbb{R}$ qui est la réunion ou l'intersection d'un ensemble dénombrable d'intervalles, alors $X^{-1}(A)$ est la réunion ou l'intersection d'un ensemble dénombrable d'évènements. Comme la **tribu** $\mathcal{T}$ est une $\sigma-$algèbre, $X^{-1}(A)$ est encore un évènement.

VII. Variables aléatoires réelles

Définition:

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. On appelle **variable aléatoire** réelle (v.a.r), toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété suivantes :

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$

Remarques :

i. Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$ revient à dire que l'ensemble $X^{-1}(I)$ est un **évènement**, il aura donc une probabilité.

ii. Si la tribu $\mathcal{T}$ est égale à $\mathcal{P}(\Omega)$, toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire.

iii. Soit A la partie de $\mathbb{R}$ qui est la réunion ou l'intersection d'un ensemble dénombrable d'intervalles, alors $X^{-1}(A)$ est la réunion ou l'intersection d'un ensemble dénombrable d'évènements. Comme la **tribu** $\mathcal{T}$ est une $\sigma-$algèbre, $X^{-1}(A)$ est encore un évènement. Une telle partie de A s'appelle un **borélien** de $\mathbb{R}$, l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ est une **$\sigma-$algèbre** appelé **tribu des boréliens**.

Définition:

La tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles est appelé la tribu des **boréliens**, et notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Définition:

La tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles est appelé la tribu des **boréliens**, et notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Remarque : Considérons les intervalles de la forme $]-\infty, a]$,

Définition:

La tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles est appelé la tribu des **boréliens**, et notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Remarque : Considérons les intervalles de la forme $]-\infty, a]$, on peut alors voir que tout intervalle I de $\mathbb{R}$ s'écrit comme réunion, intersection, complémentaire d'une suite d'intervalles de cette forme.

Définition:

La tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles est appelé la tribu des **boréliens**, et notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Remarque : Considérons les intervalles de la forme $]-\infty, a]$, on peut alors voir que tout intervalle I de $\mathbb{R}$ s'écrit comme réunion, intersection, complémentaire d'une suite d'intervalles de cette forme. Par exemple, si $a < b$, on peut écrire :

$$]a, b[=$$

Définition:

La tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles est appelé la tribu des **boréliens**, et notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Remarque : Considérons les intervalles de la forme $]-\infty, a]$, on peut alors voir que tout intervalle I de $\mathbb{R}$ s'écrit comme réunion, intersection, complémentaire d'une suite d'intervalles de cette forme. Par exemple, si $a < b$, on peut écrire :

$$]a, b[= \underbrace{\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]-\infty, b - \frac{1}{n}\right]\right)}_{]-\infty, b[} \setminus]-\infty, a]$$

Notations

Il est d'usage en probabilités, de modifier quelque peu les notations de la théorie des ensembles :

Saluons respectueusement au passage les anciens, qui n'ont pas craint d'appeler « variable aléatoire » un être mathématique qui

- n'est pas une variable : **c'est une application de Ω dans $\mathbb{R}$**
- n'est pas **aléatoire** : elle est parfaitement définie.

Notations

Il est d'usage en probabilités, de modifier quelque peu les notations de la théorie des ensembles :

- $X^{-1}\Big(\{a\}\Big) =$

Saluons respectueusement au passage les anciens, qui n'ont pas craint d'appeler « variable aléatoire » un être mathématique qui

- n'est pas une variable : **c'est une application de Ω dans $\mathbb{R}$**
- n'est pas **aléatoire** : elle est parfaitement définie.

VII. Variables aléatoires réelles

Notations

Il est d'usage en probabilités, de modifier quelque peu les notations de la théorie des ensembles :

- $X^{-1}\Big(\{a\}\Big) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\}$ se note $X = a$
- $X^{-1}\Big(]a, +\infty[\Big) =$

Saluons respectueusement au passage les anciens, qui n'ont pas craint d'appeler « variable aléatoire » un être mathématique qui

- n'est pas une variable : **c'est une application de Ω dans $\mathbb{R}$**
- n'est pas **aléatoire** : elle est parfaitement définie.

Notations

Il est d'usage en probabilités, de modifier quelque peu les notations de la théorie des ensembles :

- $X^{-1}\Big(\{a\}\Big) = \boldsymbol{\{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\}}$ se note $\boldsymbol{X = a}$
- $X^{-1}\Big(]a, +\infty[\Big) = \boldsymbol{\{\omega \in \Omega / X(\omega) > a\}}$ se note $\boldsymbol{X > a}$
- $X^{-1}\Big([a, b[\Big) =$

Saluons respectueusement au passage les anciens, qui n'ont pas craint d'appeler « variable aléatoire » un être mathématique qui

- n'est pas une variable : **c'est une application de Ω dans $\mathbb{R}$**
- n'est pas **aléatoire** : elle est parfaitement définie.

Notations

Il est d'usage en probabilités, de modifier quelque peu les notations de la théorie des ensembles :

- $X^{-1}\Big(\{a\}\Big) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\}$ se note $X = a$
- $X^{-1}\Big(]a, +\infty[\Big) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) > a\}$ se note $X > a$
- $X^{-1}\Big([a, b[\Big) = \{\omega \in \Omega / a \leqslant X(\omega) < b\}$ se note $a \leqslant X < b$

Notations

Il est d'usage en probabilités, de modifier quelque peu les notations de la théorie des ensembles :

- $X^{-1}\left(\{a\}\right) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\}$ se note $X = a$
- $X^{-1}\left(]a, +\infty[\right) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) > a\}$ se note $X > a$
- $X^{-1}\left([a, b[\right) = \{\omega \in \Omega / a \leqslant X(\omega) < b\}$ se note $a \leqslant X < b$

Saluons respectueusement au passage les anciens, qui n'ont pas craint d'appeler « variable aléatoire » un être mathématique qui

Notations

Il est d'usage en probabilités, de modifier quelque peu les notations de la théorie des ensembles :

- $X^{-1}\left(\{a\}\right) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\}$ se note $X = a$
- $X^{-1}\left(]a, +\infty[\right) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) > a\}$ se note $X > a$
- $X^{-1}\left([a, b[\right) = \{\omega \in \Omega / a \leqslant X(\omega) < b\}$ se note $a \leqslant X < b$

Saluons respectueusement au passage les anciens, qui n'ont pas craint d'appeler « variable aléatoire » un être mathématique qui

- n'est pas une variable :

Notations

Il est d'usage en probabilités, de modifier quelque peu les notations de la théorie des ensembles :

- $X^{-1}\left(\{a\}\right) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\}$ se note $X = a$
- $X^{-1}\left(]a, +\infty[\right) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) > a\}$ se note $X > a$
- $X^{-1}\left([a, b[\right) = \{\omega \in \Omega / a \leqslant X(\omega) < b\}$ se note $a \leqslant X < b$

Saluons respectueusement au passage les anciens, qui n'ont pas craint d'appeler « variable aléatoire » un être mathématique qui

- n'est pas une variable : **c'est une application de Ω dans $\mathbb{R}$**

Notations

Il est d'usage en probabilités, de modifier quelque peu les notations de la théorie des ensembles :

- $X^{-1}\left(\{a\}\right) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\}$ se note $X = a$
- $X^{-1}\left(]a, +\infty[\right) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) > a\}$ se note $X > a$
- $X^{-1}\left([a, b[\right) = \{\omega \in \Omega / a \leqslant X(\omega) < b\}$ se note $a \leqslant X < b$

Saluons respectueusement au passage les anciens, qui n'ont pas craint d'appeler « variable aléatoire » un être mathématique qui

- n'est pas une variable : **c'est une application de Ω dans $\mathbb{R}$**
- n'est pas **aléatoire** :

Notations

Il est d'usage en probabilités, de modifier quelque peu les notations de la théorie des ensembles :

- $X^{-1}\left(\{a\}\right) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\}$ se note $X = a$
- $X^{-1}\left(]a, +\infty[\right) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) > a\}$ se note $X > a$
- $X^{-1}\left([a, b[\right) = \{\omega \in \Omega / a \leqslant X(\omega) < b\}$ se note $a \leqslant X < b$

Saluons respectueusement au passage les anciens, qui n'ont pas craint d'appeler « variable aléatoire » un être mathématique qui

- n'est pas une variable : **c'est une application de Ω dans $\mathbb{R}$**
- n'est pas **aléatoire** : elle est parfaitement définie.

Quelques exemples :

Quelques exemples :

i. ***Un jeu d'argent :***

Quelques exemples :

i. ***Un jeu d'argent :*** On lance une pièce, l'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{F, P\}$.

Quelques exemples :

i. ***Un jeu d'argent :*** On lance une pièce, l'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{F, P\}$. Supposons que le fait d'amener Pile soit considéré comme un succès,

Quelques exemples :

i. ***Un jeu d'argent :*** On lance une pièce, l'univers associé à cette expérience est $\boldsymbol{\Omega = \{F, P\}}$. Supposons que le fait d'amener Pile soit considéré comme un succès, on peut alors considérer l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

Quelques exemples :

i. ***Un jeu d'argent :*** On lance une pièce, l'univers associé à cette expérience est $\boldsymbol{\Omega = \{F, P\}}$. Supposons que le fait d'amener Pile soit considéré comme un succès, on peut alors considérer l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(P) = 1$ et $X(F) = 0$. Dans ce cas $\boldsymbol{X(\Omega) = \{0, 1\}}$.

Quelques exemples :

i. ***Un jeu d'argent :*** On lance une pièce, l'univers associé à cette expérience est $\boldsymbol{\Omega = \{F, P\}}$. Supposons que le fait d'amener Pile soit considéré comme un succès, on peut alors considérer l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(P) = 1$ et $X(F) = 0$. Dans ce cas $\boldsymbol{X(\Omega) = \{0, 1\}}$.

ii. ***Déjà une urne :***

Quelques exemples :

i. ***Un jeu d'argent :*** On lance une pièce, l'univers associé à cette expérience est $\boldsymbol{\Omega = \{F, P\}}$. Supposons que le fait d'amener Pile soit considéré comme un succès, on peut alors considérer l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(P) = 1$ et $X(F) = 0$. Dans ce cas $\boldsymbol{X(\Omega) = \{0, 1\}}$.

ii. ***Déjà une urne :*** Considérons une urne contenant des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $\boldsymbol{q = 1 - p}$.

Quelques exemples :

i. ***Un jeu d'argent :*** On lance une pièce, l'univers associé à cette expérience est $\boldsymbol{\Omega = \{F, P\}}$. Supposons que le fait d'amener Pile soit considéré comme un succès, on peut alors considérer l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(P) = 1$ et $X(F) = 0$. Dans ce cas $\boldsymbol{X(\Omega) = \{0, 1\}}$.

ii. ***Déjà une urne :*** Considérons une urne contenant des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $\boldsymbol{q = 1 - p}$. On prélève de cette urne n boules avec remise, à chaque tirage ω de n boules on peut faire correspondre le nombre $X(\omega)$ de boules blanches obtenues.

Quelques exemples :

i. ***Un jeu d'argent :*** On lance une pièce, l'univers associé à cette expérience est $\boldsymbol{\Omega = \{F, P\}}$. Supposons que le fait d'amener Pile soit considéré comme un succès, on peut alors considérer l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(P) = 1$ et $X(F) = 0$. Dans ce cas $\boldsymbol{X(\Omega) = \{0, 1\}}$.

ii. ***Déjà une urne :*** Considérons une urne contenant des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $\boldsymbol{q = 1 - p}$. On prélève de cette urne n boules avec remise, à chaque tirage ω de n boules on peut faire correspondre le nombre $X(\omega)$ de boules blanches obtenues. Dans ce cas, on a $X(\Omega) =$

Quelques exemples :

i. ***Un jeu d'argent :*** On lance une pièce, l'univers associé à cette expérience est $\boldsymbol{\Omega = \{F, P\}}$. Supposons que le fait d'amener Pile soit considéré comme un succès, on peut alors considérer l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(P) = 1$ et $X(F) = 0$. Dans ce cas $\boldsymbol{X(\Omega) = \{0, 1\}}$.

ii. ***Déjà une urne :*** Considérons une urne contenant des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $\boldsymbol{q = 1 - p}$. On prélève de cette urne n boules avec remise, à chaque tirage ω de n boules on peut faire correspondre le nombre $X(\omega)$ de boules blanches obtenues. Dans ce cas, on a $X(\Omega) = \boldsymbol{[\![0\ ;\ n]\!]}$.

iii. ***Encore une urne :***

Quelques exemples :

i. ***Un jeu d'argent :*** On lance une pièce, l'univers associé à cette expérience est $\boldsymbol{\Omega = \{F, P\}}$. Supposons que le fait d'amener Pile soit considéré comme un succès, on peut alors considérer l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(P) = 1$ et $X(F) = 0$. Dans ce cas $\boldsymbol{X(\Omega) = \{0, 1\}}$.

ii. ***Déjà une urne :*** Considérons une urne contenant des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $\boldsymbol{q = 1 - p}$. On prélève de cette urne n boules avec remise, à chaque tirage ω de n boules on peut faire correspondre le nombre $X(\omega)$ de boules blanches obtenues. Dans ce cas, on a $X(\Omega) = \boldsymbol{[\![0\ ;\ n]\!]}$.

iii. ***Encore une urne :*** Reprenons l'urne précédente et procédons à l'expérience suivante : on tire des boules de l'urne avec remise et on s'arrête dès qu'on tire une boule blanche.

Quelques exemples :

i. ***Un jeu d'argent :*** On lance une pièce, l'univers associé à cette expérience est $\boldsymbol{\Omega = \{F, P\}}$. Supposons que le fait d'amener Pile soit considéré comme un succès, on peut alors considérer l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(P) = 1$ et $X(F) = 0$. Dans ce cas $\boldsymbol{X(\Omega) = \{0, 1\}}$.

ii. ***Déjà une urne :*** Considérons une urne contenant des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $\boldsymbol{q = 1 - p}$. On prélève de cette urne n boules avec remise, à chaque tirage ω de n boules on peut faire correspondre le nombre $X(\omega)$ de boules blanches obtenues. Dans ce cas, on a $X(\Omega) = \boldsymbol{[\![0\ ;\ n]\!]}$.

iii. ***Encore une urne :*** Reprenons l'urne précédente et procédons à l'expérience suivante : on tire des boules de l'urne avec remise et on s'arrête dès qu'on tire une boule blanche. A chaque tirage ω on fait correspondre le rang $X(\omega)$ où est apparu, pour la boule blanche.

Quelques exemples :

i. ***Un jeu d'argent :*** On lance une pièce, l'univers associé à cette expérience est $\boldsymbol{\Omega = \{F, P\}}$. Supposons que le fait d'amener Pile soit considéré comme un succès, on peut alors considérer l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(P) = 1$ et $X(F) = 0$. Dans ce cas $\boldsymbol{X(\Omega) = \{0, 1\}}$.

ii. ***Déjà une urne :*** Considérons une urne contenant des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $\boldsymbol{q = 1 - p}$. On prélève de cette urne n boules avec remise, à chaque tirage ω de n boules on peut faire correspondre le nombre $X(\omega)$ de boules blanches obtenues. Dans ce cas, on a $X(\Omega) = \boldsymbol{[\![0\ ;\ n]\!]}$.

iii. ***Encore une urne :*** Reprenons l'urne précédente et procédons à l'expérience suivante : on tire des boules de l'urne avec remise et on s'arrête dès qu'on tire une boule blanche. A chaque tirage ω on fait correspondre le rang $X(\omega)$ où est apparu, pour la boule blanche. On dit que l'application X ainsi définie est le temps d'attente de la première boule blanche.

Quelques exemples :

i. ***Un jeu d'argent :*** On lance une pièce, l'univers associé à cette expérience est $\boldsymbol{\Omega = \{F, P\}}$. Supposons que le fait d'amener Pile soit considéré comme un succès, on peut alors considérer l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(P) = 1$ et $X(F) = 0$. Dans ce cas $\boldsymbol{X(\Omega) = \{0, 1\}}$.

ii. ***Déjà une urne :*** Considérons une urne contenant des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $\boldsymbol{q = 1 - p}$. On prélève de cette urne n boules avec remise, à chaque tirage ω de n boules on peut faire correspondre le nombre $X(\omega)$ de boules blanches obtenues. Dans ce cas, on a $X(\Omega) = \boldsymbol{[\![0\ ;\ n]\!]}$.

iii. ***Encore une urne :*** Reprenons l'urne précédente et procédons à l'expérience suivante : on tire des boules de l'urne avec remise et on s'arrête dès qu'on tire une boule blanche. A chaque tirage ω on fait correspondre le rang $X(\omega)$ où est apparu, pour la boule blanche. On dit que l'application X ainsi définie est le temps d'attente de la première boule blanche. On a alors : $X(\Omega) =$

Quelques exemples :

i. ***Un jeu d'argent :*** On lance une pièce, l'univers associé à cette expérience est $\boldsymbol{\Omega = \{F, P\}}$. Supposons que le fait d'amener Pile soit considéré comme un succès, on peut alors considérer l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(P) = 1$ et $X(F) = 0$. Dans ce cas $\boldsymbol{X(\Omega) = \{0, 1\}}$.

ii. ***Déjà une urne :*** Considérons une urne contenant des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $\boldsymbol{q = 1 - p}$. On prélève de cette urne n boules avec remise, à chaque tirage ω de n boules on peut faire correspondre le nombre $X(\omega)$ de boules blanches obtenues. Dans ce cas, on a $X(\Omega) = [\![\boldsymbol{0\ ;\ n}]\!]$.

iii. ***Encore une urne :*** Reprenons l'urne précédente et procédons à l'expérience suivante : on tire des boules de l'urne avec remise et on s'arrête dès qu'on tire une boule blanche. A chaque tirage ω on fait correspondre le rang $X(\omega)$ où est apparu, pour la boule blanche. On dit que l'application X ainsi définie est le temps d'attente de la première boule blanche. On a alors : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

iii. ***Encore une urne :*** Reprenons l'urne précédente et procédons à l'expérience suivante : on tire des boules de l'urne avec remise et on s'arrête dès qu'on tire une boule blanche. A chaque tirage ω on fait correspondre le rang $X(\omega)$ où est apparu, pour la boule blanche. On dit que l'application X ainsi définie est le temps d'attente de la première boule blanche. On a alors : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

iii. ***Encore une urne :*** Reprenons l'urne précédente et procédons à l'expérience suivante : on tire des boules de l'urne avec remise et on s'arrête dès qu'on tire une boule blanche. A chaque tirage ω on fait correspondre le rang $X(\omega)$ où est apparu, pour la boule blanche. On dit que l'application X ainsi définie est le temps d'attente de la première boule blanche. On a alors : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

iv. ***Toujours une urne :*** On reprend encore une fois l'urne précédente et on suppose que celle-ci contient au total N boules.

iii. ***Encore une urne :*** Reprenons l'urne précédente et procédons à l'expérience suivante : on tire des boules de l'urne avec remise et on s'arrête dès qu'on tire une boule blanche. A chaque tirage ω on fait correspondre le rang $X(\omega)$ où est apparu, pour la boule blanche. On dit que l'application X ainsi définie est le temps d'attente de la première boule blanche. On a alors : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

iv. ***Toujours une urne :*** On reprend encore une fois l'urne précédente et on suppose que celle-ci contient au total N boules.

- On tire successivement et sans remise n boules de l'urne, avec $1 \leqslant n \leqslant N$.

iii. ***Encore une urne :*** Reprenons l'urne précédente et procédons à l'expérience suivante : on tire des boules de l'urne avec remise et on s'arrête dès qu'on tire une boule blanche. A chaque tirage ω on fait correspondre le rang $X(\omega)$ où est apparu, pour la boule blanche. On dit que l'application X ainsi définie est le temps d'attente de la première boule blanche. On a alors : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

iv. ***Toujours une urne :*** On reprend encore une fois l'urne précédente et on suppose que celle-ci contient au total N boules.

- On tire successivement et sans remise n boules de l'urne, avec $1 \leqslant n \leqslant N$. A chaque tirage ω de n boules on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de boules blanches obtenues.

iii. ***Encore une urne :*** Reprenons l'urne précédente et procédons à l'expérience suivante : on tire des boules de l'urne avec remise et on s'arrête dès qu'on tire une boule blanche. A chaque tirage ω on fait correspondre le rang $X(\omega)$ où est apparu, pour la boule blanche. On dit que l'application X ainsi définie est le temps d'attente de la première boule blanche. On a alors : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

iv. ***Toujours une urne :*** On reprend encore une fois l'urne précédente et on suppose que celle-ci contient au total N boules.

- On tire successivement et sans remise n boules de l'urne, avec $1 \leqslant n \leqslant N$. A chaque tirage ω de n boules on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de boules blanches obtenues. Dans ce cas, la détermination de $X(\Omega)$ est un peu plus délicate, mais en observant bien le phénomène, on s'aperçoit que $X(\Omega) = [\![\max(0, n - Nq) \ ; \ \min(n, Np)]\!]$.

iii. ***Encore une urne :*** Reprenons l'urne précédente et procédons à l'expérience suivante : on tire des boules de l'urne avec remise et on s'arrête dès qu'on tire une boule blanche. A chaque tirage ω on fait correspondre le rang $X(\omega)$ où est apparu, pour la boule blanche. On dit que l'application X ainsi définie est le temps d'attente de la première boule blanche. On a alors : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

iv. ***Toujours une urne :*** On reprend encore une fois l'urne précédente et on suppose que celle-ci contient au total N boules.

- On tire successivement et sans remise n boules de l'urne, avec $1 \leqslant n \leqslant N$. A chaque tirage ω de n boules on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de boules blanches obtenues. Dans ce cas, la détermination de $X(\Omega)$ est un peu plus délicate, mais en observant bien le phénomène, on s'aperçoit que $X(\Omega) = \llbracket \max(0, n - Nq) \ ; \ \min(n, Np) \rrbracket$.
- en tirant encore les boules une à une sans remise,

iii. ***Encore une urne :*** Reprenons l'urne précédente et procédons à l'expérience suivante : on tire des boules de l'urne avec remise et on s'arrête dès qu'on tire une boule blanche. A chaque tirage ω on fait correspondre le rang $X(\omega)$ où est apparu, pour la boule blanche. On dit que l'application X ainsi définie est le temps d'attente de la première boule blanche. On a alors : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

iv. ***Toujours une urne :*** On reprend encore une fois l'urne précédente et on suppose que celle-ci contient au total N boules.

- On tire successivement et sans remise n boules de l'urne, avec $1 \leqslant n \leqslant N$. A chaque tirage ω de n boules on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de boules blanches obtenues. Dans ce cas, la détermination de $X(\Omega)$ est un peu plus délicate, mais en observant bien le phénomène, on s'aperçoit que $X(\Omega) = [\![\boldsymbol{\max(0, n - Nq)\ ;\ \min(n, Np)}]\!]$.
- en tirant encore les boules une à une sans remise, on considère le temps d'attente Y de la première boule blanche.

iii. ***Encore une urne :*** Reprenons l'urne précédente et procédons à l'expérience suivante : on tire des boules de l'urne avec remise et on s'arrête dès qu'on tire une boule blanche. A chaque tirage ω on fait correspondre le rang $X(\omega)$ où est apparu, pour la boule blanche. On dit que l'application X ainsi définie est le temps d'attente de la première boule blanche. On a alors : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

iv. ***Toujours une urne :*** On reprend encore une fois l'urne précédente et on suppose que celle-ci contient au total N boules.

- On tire successivement et sans remise n boules de l'urne, avec $1 \leqslant n \leqslant N$. A chaque tirage ω de n boules on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de boules blanches obtenues. Dans ce cas, la détermination de $X(\Omega)$ est un peu plus délicate, mais en observant bien le phénomène, on s'aperçoit que $X(\Omega) = [\![\max(0, n - Nq) \ ; \ \min(n, Np)]\!]$.
- en tirant encore les boules une à une sans remise, on considère le temps d'attente Y de la première boule blanche. On a alors $Y(\Omega) = [\![1 \ ; \ Nq + 1]\!]$.

vi. *un jeu plus calme :* On lance un galet du bord d'un lac aux eaux paisibles.

vi. *un jeu plus calme :* On lance un galet du bord d'un lac aux eaux paisibles. A tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de ricochets.

vi. *un jeu plus calme :* On lance un galet du bord d'un lac aux eaux paisibles. A tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de ricochets. On a alors $X(\Omega) =$

vi. *un jeu plus calme :* On lance un galet du bord d'un lac aux eaux paisibles. A tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de ricochets. On a alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

vi. *un jeu plus calme :* On lance un galet du bord d'un lac aux eaux paisibles. A tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de ricochets. On a alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

vii. *un jeu à la ... :* On lance un œuf frais du haut de la tour Eiffel et à tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de rebonds. On a alors : $X(\Omega) =$

vi. *un jeu plus calme :* On lance un galet du bord d'un lac aux eaux paisibles. A tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de ricochets. On a alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

vii. *un jeu à la . . . :* On lance un œuf frais du haut de la tour Eiffel et à tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de rebonds. On a alors : $X(\Omega) = 0$.

VII. Variables aléatoires réelles

vi. *un jeu plus calme :* On lance un galet du bord d'un lac aux eaux paisibles. A tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de ricochets. On a alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

vii. *un jeu à la . . . :* On lance un œuf frais du haut de la tour Eiffel et à tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de rebonds. On a alors : $X(\Omega) = 0$.

Définition:

Soit X une v.a.r définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On appelle **fonction de répartition** de X

vi. *un jeu plus calme :* On lance un galet du bord d'un lac aux eaux paisibles. A tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de ricochets. On a alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

vii. *un jeu à la ... :* On lance un œuf frais du haut de la tour Eiffel et à tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de rebonds. On a alors : $X(\Omega) = 0$.

Définition:

Soit X une v.a.r définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On appelle **fonction de répartition** de X, la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

vi. *un jeu plus calme :* On lance un galet du bord d'un lac aux eaux paisibles. A tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de ricochets. On a alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

vii. *un jeu à la ... :* On lance un œuf frais du haut de la tour Eiffel et à tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de rebonds. On a alors : $X(\Omega) = 0$.

Définition:

Soit X une v.a.r définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On appelle **fonction de répartition** de X, la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{F_X(x) = P(X \leqslant x)}$$

vi. *un jeu plus calme :* On lance un galet du bord d'un lac aux eaux paisibles. A tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de ricochets. On a alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

vii. *un jeu à la . . . :* On lance un œuf frais du haut de la tour Eiffel et à tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de rebonds. On a alors : $X(\Omega) = 0$.

Définition:

Soit X une v.a.r définie sur un espace probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{T}, P\right)$. On appelle **fonction de répartition** de X, la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{F_X(x) = P(X \leqslant x)}$$

Certains auteurs adoptent une définition légèrement différente. La fonction de répartition de X est, pour eux, définie par $\boldsymbol{F_X(x) = P(X < x)}$.

vi. *un jeu plus calme :* On lance un galet du bord d'un lac aux eaux paisibles. A tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de ricochets. On a alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

vii. *un jeu à la ... :* On lance un œuf frais du haut de la tour Eiffel et à tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de rebonds. On a alors : $X(\Omega) = 0$.

Définition:

Soit X une v.a.r définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On appelle **fonction de répartition** de X, la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{F_X(x) = P(X \leqslant x)}$$

Certains auteurs adoptent une définition légèrement différente. La fonction de répartition de X est, pour eux, définie par $\boldsymbol{F_X(x) = P(X < x)}$. Ses propriétés sont quelque peu modifiées.

vi. *un jeu plus calme :* On lance un galet du bord d'un lac aux eaux paisibles. A tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de ricochets. On a alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

vii. *un jeu à la . . . :* On lance un œuf frais du haut de la tour Eiffel et à tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de rebonds. On a alors : $X(\Omega) = 0$.

Définition:

Soit X une v.a.r définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On appelle **fonction de répartition** de X, la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{F_X(x) = P(X \leqslant x)}$$

Certains auteurs adoptent une définition légèrement différente. La fonction de répartition de X est, pour eux, définie par $\boldsymbol{F_X(x) = P(X < x)}$. Ses propriétés sont quelque peu modifiées. Aussi conviendra-t-il de faire attention, dans un autre contexte que ce cours, de faire bien attention à la définition utilisée.

VII. Variables aléatoires réelles

Théorème

Soient X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition :

Théorème

Soient X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition :

i. F_X est **une fonction croissante ;**

Théorème

Soient X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition :

i. F_X est **une fonction croissante ;**

ii. F_X est **continue à droite ;**

Théorème

Soient X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition :

i. F_X est **une fonction croissante ;**

ii. F_X est **continue à droite ;**

iii. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) =$

VII. Variables aléatoires réelles

Théorème

Soient X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition :

i. F_X est **une fonction croissante ;**

ii. F_X est **continue à droite ;**

iii. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) =$

VII. Variables aléatoires réelles

Théorème

Soient X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition :

i. F_X est **une fonction croissante ;**

ii. F_X est **continue à droite ;**

iii. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Théorème

Soient X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition :

i. F_X est **une fonction croissante ;**

ii. F_X est **continue à droite ;**

iii. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Démonstration

i. Etant donnés deux réels a et b tels que $a < b$.

Théorème

Soient X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition :

i. F_X est **une fonction croissante ;**

ii. F_X est **continue à droite ;**

iii. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Démonstration

i. Etant donnés deux réels a et b tels que $a < b$.

On a :$]-\infty, b] =]-\infty, a] \cup]a, b]$.

Théorème

Soient X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition :

i. F_X est **une fonction croissante ;**

ii. F_X est **continue à droite ;**

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

Démonstration

i. Etant donnés deux réels a et b tels que $a < b$.

On a :$]-\infty, b] =]-\infty, a] \cup]a, b]$. Par conséquent en prenant les images réciproques

Théorème

Soient X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition :

i. F_X est **une fonction croissante ;**

ii. F_X est **continue à droite ;**

iii. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Démonstration

i. Etant donnés deux réels a et b tels que $a < b$.
On a $:]-\infty, b] =]-\infty, a] \cup]a, b]$. Par conséquent en prenant les images réciproques : $(X \leqslant b) = (X \leqslant a) \cup (a < X \leqslant b)$.

Théorème

Soient X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition :

i. F_X est **une fonction croissante ;**

ii. F_X est **continue à droite ;**

iii. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Démonstration

i. Etant donnés deux réels a et b tels que $a < b$.

On a :$]-\infty, b] =]-\infty, a] \cup]a, b]$. Par conséquent en prenant les images réciproques : $(X \leqslant b) = (X \leqslant a) \cup (a < X \leqslant b)$. Cette réunion étant disjointes (événements incompatibles), on a :

Théorème

Soient X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition :

i. F_X est **une fonction croissante ;**
ii. F_X est **continue à droite ;**
iii. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Démonstration

i. Etant donnés deux réels a et b tels que $a < b$.
On a :$]-\infty, b] =]-\infty, a] \cup]a, b]$. Par conséquent en prenant les images réciproques : $(X \leqslant b) = (X \leqslant a) \cup (a < X \leqslant b)$. Cette réunion étant disjointes (événements incompatibles), on a :

$$\underbrace{P(X \leqslant b)}_{F_X(b)} = \underbrace{P(X \leqslant a)}_{F_X(a)} + \underbrace{P(a < X \leqslant b)}_{\geqslant 0}$$

F_X est croissante.

Théorème

ii. F_X est **continue à droite ;**

Démonstration

ii. La démonstration est plus délicate. Il faut se souvenir d'une notation :

Théorème

ii. F_X est **continue à droite ;**

Démonstration

ii. La démonstration est plus délicate. Il faut se souvenir d'une notation :

- celle de la limite à droite : $F(a^+) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} F(x)$

Théorème

ii. F_X est **continue à droite ;**

Démonstration

ii. La démonstration est plus délicate. Il faut se souvenir d'une notation :

- celle de la limite à droite : $F\left(a^{+}\right) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} F(x)$
- et celle de la limite à gauche : $F\left(a^{-}\right) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} F(x)$

Théorème

ii. F_X est **continue à droite ;**

Démonstration

ii. La démonstration est plus délicate. Il faut se souvenir d'une notation :

- celle de la limite à droite : $F(a^+) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} F(x)$
- et celle de la limite à gauche : $F(a^-) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} F(x)$

et de quelques résultats d'analyse :

Théorème

ii. F_X est **continue à droite ;**

Démonstration

ii. La démonstration est plus délicate. Il faut se souvenir d'une notation :

- celle de la limite à droite : $F(a^+) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} F(x)$
- et celle de la limite à gauche : $F(a^-) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} F(x)$

et de quelques résultats d'analyse :

- Toute fonction monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet en tout point intérieur à I une limite à droite et une limite à gauche.

Théorème

ii. F_X est **continue à droite ;**

Démonstration

ii. La démonstration est plus délicate. Il faut se souvenir d'une notation :

- celle de la limite à droite : $F(a^+) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} F(x)$
- et celle de la limite à gauche : $F(a^-) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} F(x)$

et de quelques résultats d'analyse :

- Toute fonction monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet en tout point intérieur à I une limite à droite et une limite à gauche.
- Si F est une fonction monotone, pour tout suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeant vers un point a par valeurs supérieures, on a :

Théorème

ii. F_X est **continue à droite ;**

Démonstration

ii. La démonstration est plus délicate. Il faut se souvenir d'une notation :

- celle de la limite à droite : $F(a^+) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} F(x)$
- et celle de la limite à gauche : $F(a^-) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} F(x)$

et de quelques résultats d'analyse :

- Toute fonction monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet en tout point intérieur à I une limite à droite et une limite à gauche.
- Si F est une fonction monotone, pour tout suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeant vers un point a par valeurs supérieures, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} F(x_n) = \lim_{x \to a^+} F(x) =$$

Théorème

ii. F_X est **continue à droite ;**

Démonstration

ii. La démonstration est plus délicate. Il faut se souvenir d'une notation :

- celle de la limite à droite : $F\left(a^+\right) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} F(x)$
- et celle de la limite à gauche : $F\left(a^-\right) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} F(x)$

et de quelques résultats d'analyse :

- Toute fonction monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet en tout point intérieur à I une limite à droite et une limite à gauche.
- Si F est une fonction monotone, pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant vers un point a par valeurs supérieures, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{x\to a^+} F(x) = F\left(a^+\right)$$

Théorème

ii. F_X est **continue à droite ;**

Démonstration

ii. Il nous faut donc démontrer que l'on a, en tout point A de $\mathbb{R}$, la relation $F\left(a^+\right) = F(a)$.

Théorème

ii. F_X est **continue à droite ;**

Démonstration

ii. Il nous faut donc démontrer que l'on a, en tout point A de $\mathbb{R}$, la relation $F(a^+) = F(a)$. Pour cela, choisissons $x_n = a + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème

ii. F_X est **continue à droite ;**

Démonstration

ii. Il nous faut donc démontrer que l'on a, en tout point A de $\mathbb{R}$, la relation $F(a^+) = F(a)$. Pour cela, choisissons $x_n = a + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. La suite (x_n) converge vers a par valeurs supérieures et la suite d'évènements $\left(X \leqslant a + \dfrac{1}{n}\right)$ est une suite croissante telle que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(X \leqslant a + \frac{1}{n}\right) = (X \leqslant a)$.

Théorème

ii. F_X est **continue à droite ;**

Démonstration

ii. Il nous faut donc démontrer que l'on a, en tout point A de $\mathbb{R}$, la relation $F(a^+) = F(a)$. Pour cela, choisissons $x_n = a + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. La suite (x_n) converge vers a par valeurs supérieures et la suite d'évènements $\left(X \leqslant a + \dfrac{1}{n}\right)$ est une suite croissante telle que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(X \leqslant a + \frac{1}{n}\right) = (X \leqslant a)$.

En effet, si $X(\omega) \leqslant a)$, alors pour tout entier n, $X(\omega) \leqslant a + \dfrac{1}{n}$

Théorème

ii. F_X est **continue à droite ;**

Démonstration

ii. Il nous faut donc démontrer que l'on a, en tout point A de $\mathbb{R}$, la relation $F(a^+) = F(a)$. Pour cela, choisissons $x_n = a + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. La suite (x_n) converge vers a par valeurs supérieures et la suite d'évènements $\left(X \leqslant a + \dfrac{1}{n}\right)$ est une suite croissante telle que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(X \leqslant a + \frac{1}{n}\right) = (X \leqslant a)$.

En effet, si $X(\omega) \leqslant a)$, alors pour tout entier n, $X(\omega) \leqslant a + \dfrac{1}{n}$ et réciproquement si,

Théorème

ii. F_X est **continue à droite ;**

Démonstration

ii. Il nous faut donc démontrer que l'on a, en tout point A de $\mathbb{R}$, la relation $F(a^+) = F(a)$. Pour cela, choisissons $x_n = a + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. La suite (x_n) converge vers a par valeurs supérieures et la suite d'évènements $\left(X \leqslant a + \frac{1}{n}\right)$ est une suite croissante telle que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(X \leqslant a + \frac{1}{n}\right) = (X \leqslant a)$.

En effet, si $X(\omega) \leqslant a)$, alors pour tout entier n, $X(\omega) \leqslant a + \frac{1}{n}$ et réciproquement si, pour tout entier n, $X(\omega) \leqslant a + \frac{1}{n}$, alors $X(\omega) \leqslant a)$ comme on le voit facilement par contraposée.

Théorème

ii. F_X est **continue à droite ;**

Démonstration

ii. Il nous faut donc démontrer que l'on a, en tout point A de $\mathbb{R}$, la relation $F(a^+) = F(a)$. Pour cela, choisissons $x_n = a + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. La suite (x_n) converge vers a par valeurs supérieures et la suite d'évènements $\left(X \leqslant a + \dfrac{1}{n}\right)$ est une suite croissante telle que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(X \leqslant a + \frac{1}{n}\right) = (X \leqslant a)$.

En effet, si $X(\omega) \leqslant a)$, alors pour tout entier n, $X(\omega) \leqslant a + \dfrac{1}{n}$ et réciproquement si, pour tout entier n, $X(\omega) \leqslant a + \dfrac{1}{n}$, alors $X(\omega) \leqslant a)$ comme on le voit facilement par contraposée.

Il suffit alors d'applique la continuité décroissante de la probabilité, ce qui donne :

Théorème

ii. F_X est **continue à droite ;**

Démonstration

ii. Il nous faut donc démontrer que l'on a, en tout point A de $\mathbb{R}$, la relation $F(a^+) = F(a)$. Pour cela, choisissons $x_n = a + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. La suite (x_n) converge vers a par valeurs supérieures et la suite d'évènements $\left(X \leqslant a + \dfrac{1}{n}\right)$ est une suite croissante telle que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(X \leqslant a + \frac{1}{n}\right) = (X \leqslant a)$.

En effet, si $X(\omega) \leqslant a)$, alors pour tout entier n, $X(\omega) \leqslant a + \dfrac{1}{n}$ et réciproquement si, pour tout entier n, $X(\omega) \leqslant a + \dfrac{1}{n}$, alors $X(\omega) \leqslant a)$ comme on le voit facilement par contraposée.

Il suffit alors d'applique la continuité décroissante de la probabilité, ce qui donne :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X \leqslant a + \frac{1}{n}\right) = P(X \leqslant a) \text{ soit } F(a^+) = F(a)$$

Ce qui achève la preuve de ii.

Théorème

i. F_X est **une fonction croissante ;**

ii. F_X est **continue à droite ;**

iii. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Démonstration

iii. Chers étudiants, je n'abuserai pas de votre patience. Je me contenterai de vous faire remarquer que :

On peut démontrer, mais nous l'admettrons, que toutes fonctions $\Omega \longrightarrow [0, 1]$ vérifiant les propriétés (i), (ii), et (iii) du théorème précédent est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X.

Théorème

i. F_X est **une fonction croissante ;**

ii. F_X est **continue à droite ;**

iii. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Démonstration

iii. Chers étudiants, je n'abuserai pas de votre patience. Je me contenterai de vous faire remarquer que :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \leqslant -n) =$$

On peut démontrer, mais nous l'admettrons, que toutes fonctions $\Omega \longrightarrow [0,1]$ vérifiant les propriétés (i), (ii), et (iii) du théorème précédent est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X.

Théorème

i. F_X est **une fonction croissante ;**

ii. F_X est **continue à droite ;**

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

Démonstration

iii. Chers étudiants, je n'abuserai pas de votre patience. Je me contenterai de vous faire remarquer que :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(X \leqslant -n) = \varnothing$$

On peut démontrer, mais nous l'admettrons, que toutes fonctions $\Omega \longrightarrow [0,1]$ vérifiant les propriétés (i), (ii), et (iii) du théorème précédent est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X.

Théorème

i. F_X est **une fonction croissante ;**

ii. F_X est **continue à droite ;**

iii. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Démonstration

iii. Chers étudiants, je n'abuserai pas de votre patience. Je me contenterai de vous faire remarquer que :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \leqslant -n) = \varnothing \text{ et que } \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \leqslant n) =$$

On peut démontrer, mais nous l'admettrons, que toutes fonctions $\Omega \longrightarrow [0,1]$ vérifiant les propriétés (i), (ii), et (iii) du théorème précédent est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X.

Théorème

i. F_X est **une fonction croissante ;**

ii. F_X est **continue à droite ;**

iii. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Démonstration

iii. Chers étudiants, je n'abuserai pas de votre patience. Je me contenterai de vous faire remarquer que :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \leqslant -n) = \varnothing \text{ et que } \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \leqslant n) = \Omega$$

Théorème

i. F_X est **une fonction croissante ;**

ii. F_X est **continue à droite ;**

iii. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Démonstration

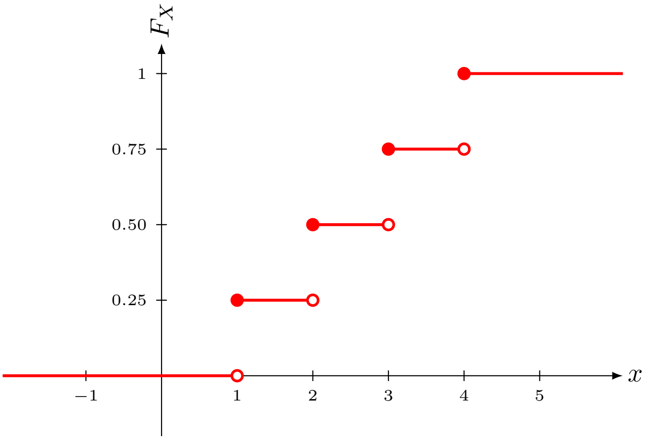
iii. Chers étudiants, je n'abuserai pas de votre patience. Je me contenterai de vous faire remarquer que :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \leqslant -n) = \varnothing \text{ et que } \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \leqslant n) = \Omega$$

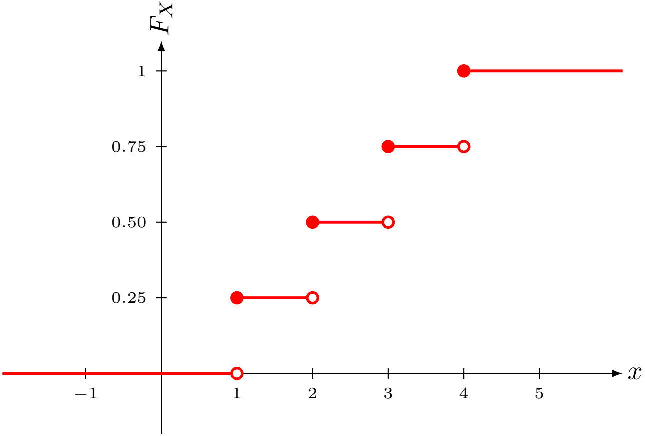
On peut démontrer, mais nous l'admettrons, que toutes fonctions $\Omega \longrightarrow [0, 1]$ vérifiant les propriétés (i), (ii), et (iii) du théorème précédent est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X.

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.

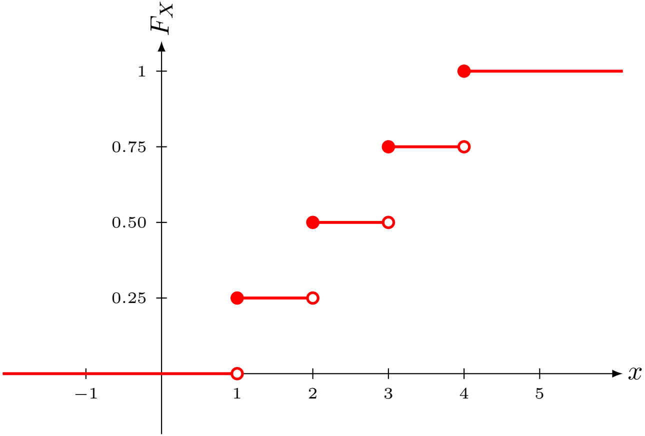


Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



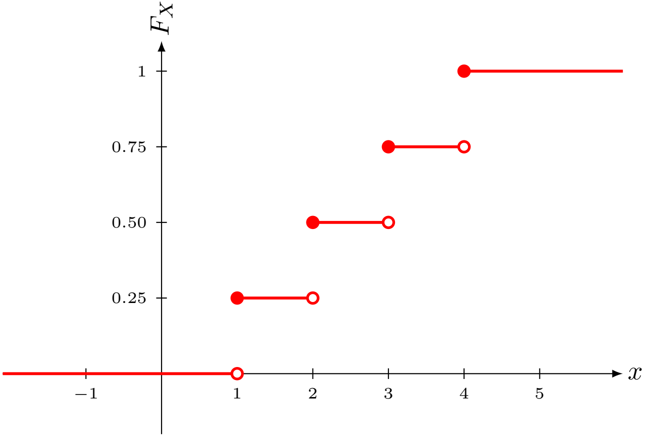
$$F_X(0,5) =$$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



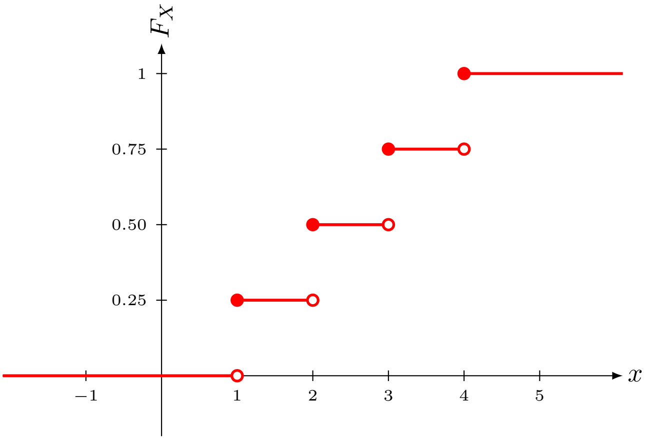
$$F_X(0,5) = P(X \leqslant 0,5) =$$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



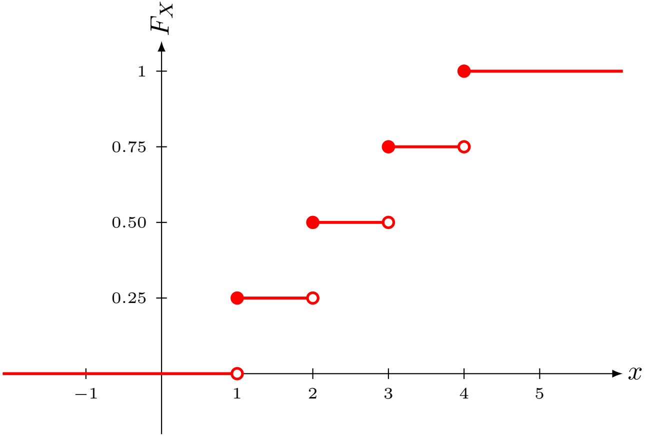
$$F_X(0,5) = P(X \leqslant 0,5) = 0$$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



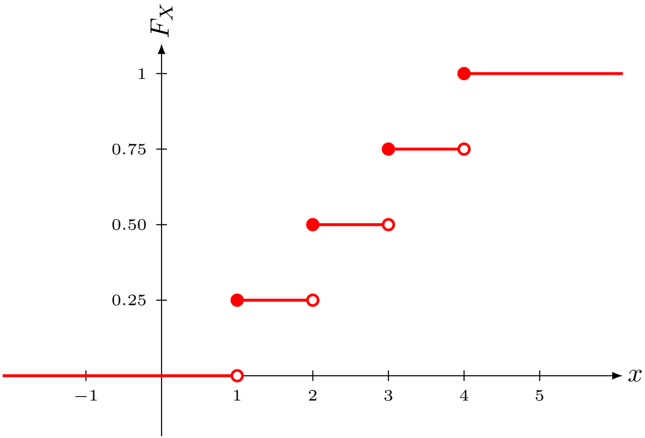
$$F_X(0,99) =$$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



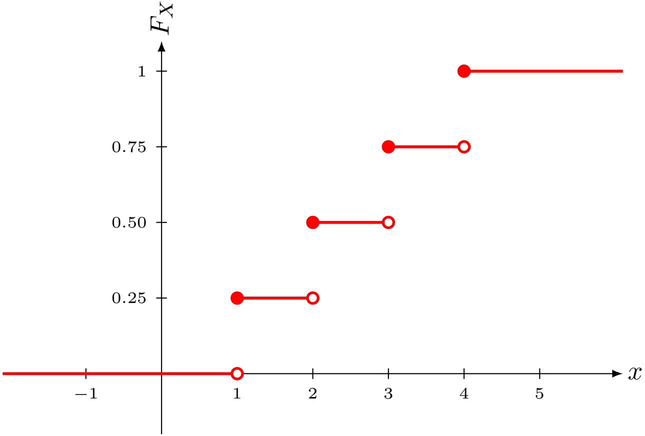
$$F_X(0,99) = P(X \leqslant 0,99) =$$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



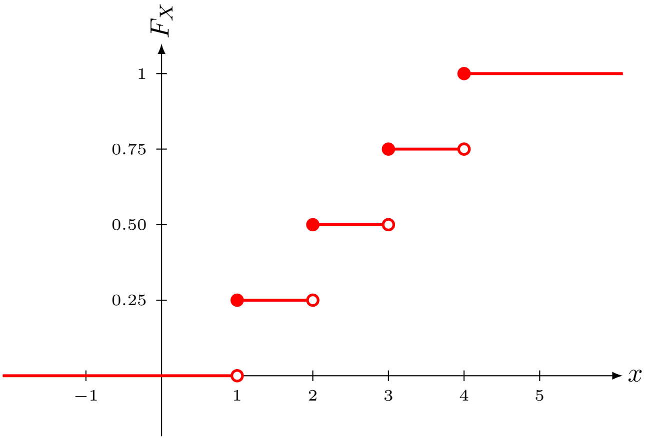
$$F_X(0,99) = P(X \leqslant 0,99) = 0$$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



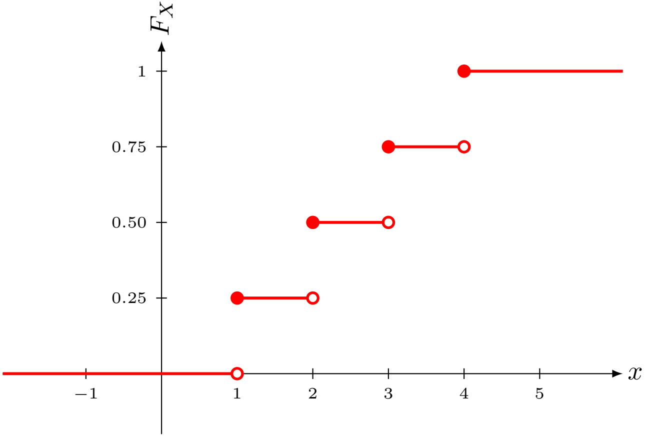
$F_X(1) =$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



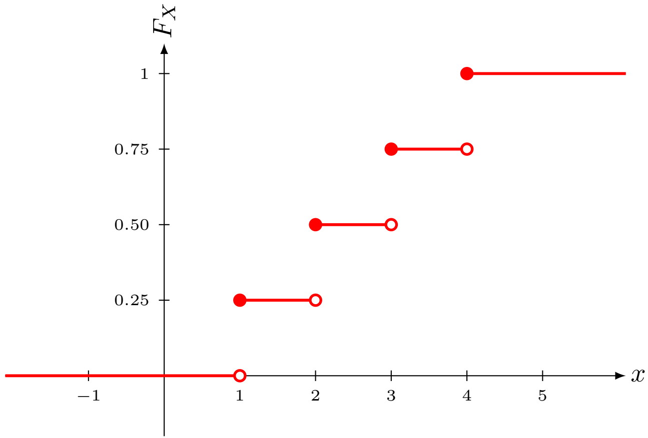
$$F_X(1) = P(X \leqslant 1) =$$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



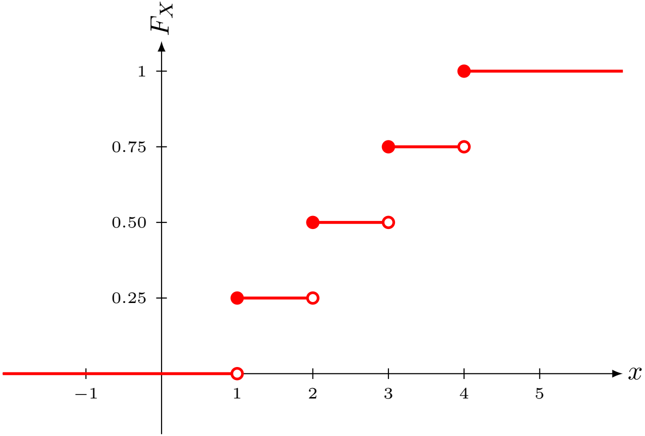
$$F_X(1) = P(X \leqslant 1) = P(X = 1) =$$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



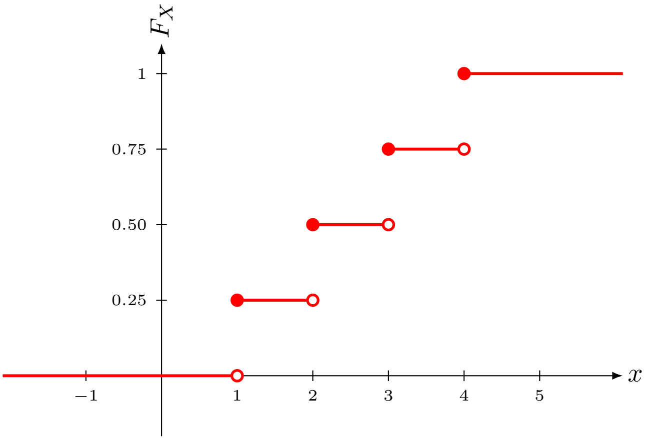
$$F_X(1) = P(X \leqslant 1) = P(X = 1) = \frac{1}{4} =$$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



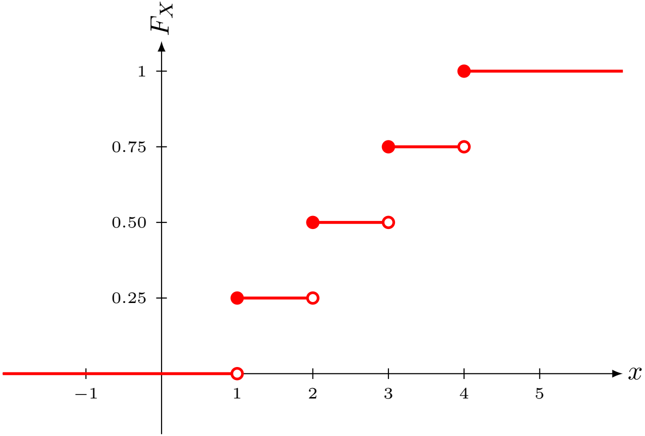
$$F_X(1) = P(X \leqslant 1) = P(X = 1) = \frac{1}{4} = 0,25$$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



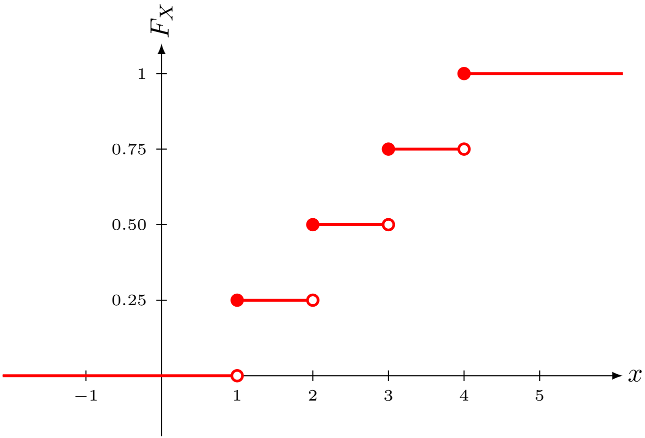
$$F_X(1,0001) =$$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



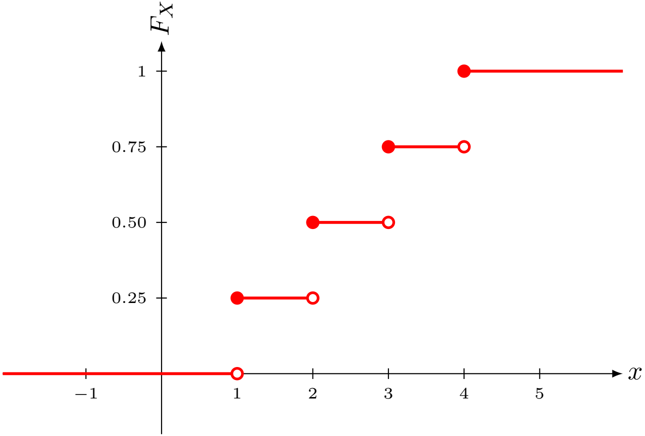
$$F_X(1,0001) = P(X \leqslant 1,0001) =$$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



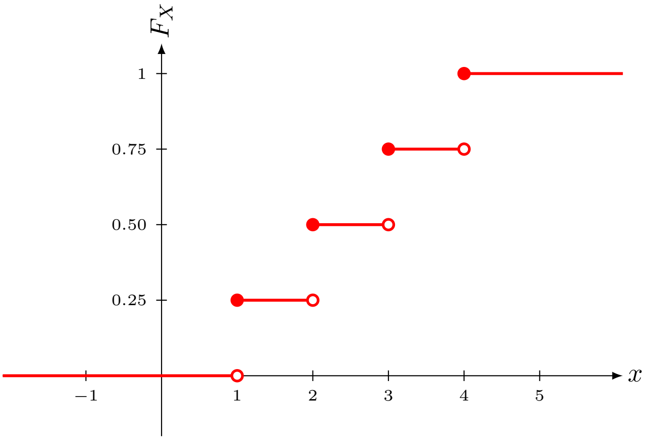
$$F_X(1{,}0001) = P(X \leqslant 1{,}0001) = P(X = 1) =$$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



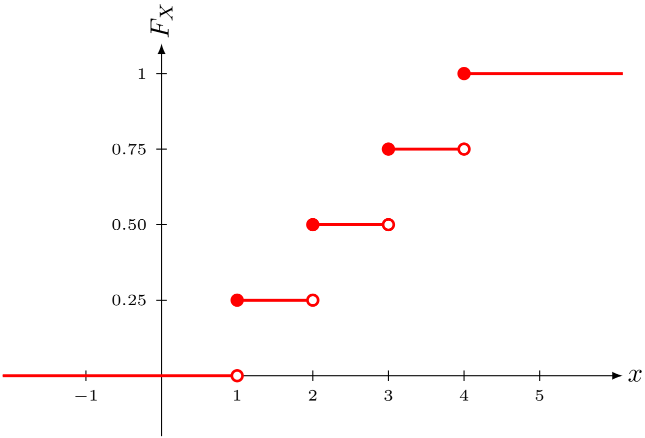
$$F_X(1,0001) = P(X \leqslant 1,0001) = P(X = 1) = 0,25$$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



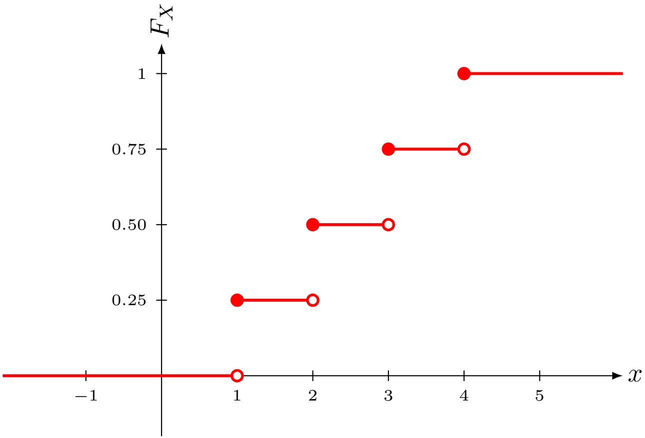
$F_X(2) =$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



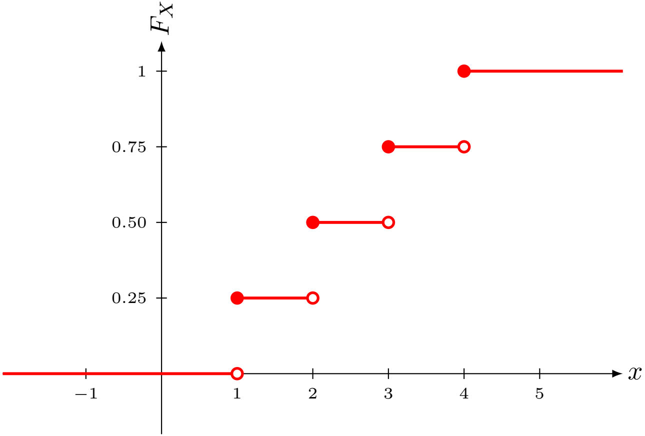
$F_X(2) = P(X \leqslant 2) =$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



$$F_X(2) = P(X \leqslant 2) = P(X = 1) + P(X = 2) =$$

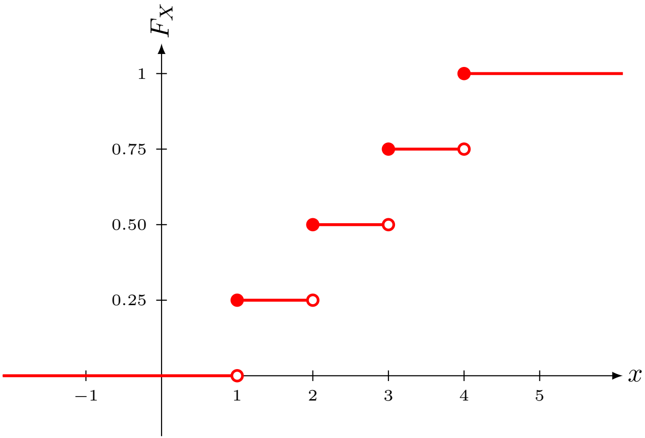
Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



$$F_X(2) = P(X \leqslant 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,5$$

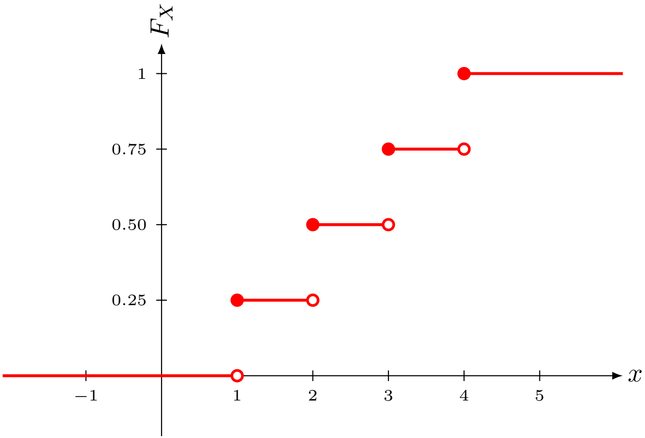
Exemple n

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



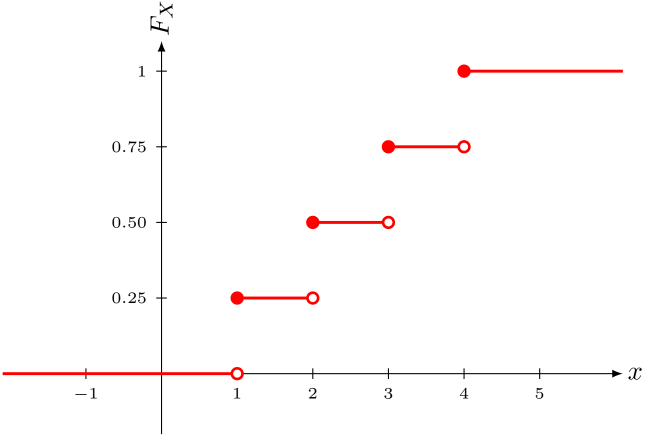
$F_X(6) =$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



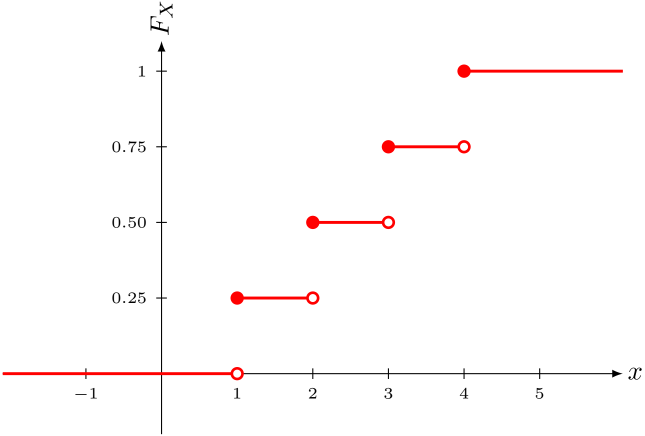
$F_X(6) = P(X \leqslant 6) =$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



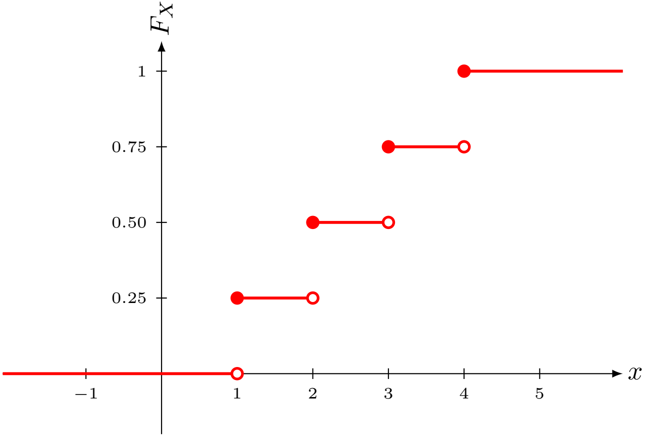
$F_X(6) = P(X \leqslant 6) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



$$F_X(6) = P(X \leqslant 6) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1$$

Exemple n° 1 : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



$$F_X(6) = P(X \leqslant 6) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1$$

Propriété

Soit X une **variable aléatoire**

Dans l'exemple précédent, on voit bien que :

- $P(X=2) = F_X(2) - F_X\left(2^-\right) = F_X(2) - \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} F_X(x) = 0,50 - 0,25 = 0,25$
- $P(X=3,4) = F_X(3,4) - F_X\left(3,4^-\right)$

$$= F_X(3,4) - \lim_{\substack{x \to 3,4 \\ x<3,4}} F_X(x) = 0,75 - 0,75 = 0$$

Propriété

Soit X une **variable aléatoire** et soit F_X **sa fonction de répartition**

Dans l'exemple précédent, on voit bien que :

- $P(X=2) = F_X(2) - F_X\left(2^-\right) = F_X(2) - \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} F_X(x) = 0,50 - 0,25 = 0,25$
- $P(X=3,4) = F_X(3,4) - F_X\left(3,4^-\right)$

$$= F_X(3,4) - \lim_{\substack{x \to 3,4 \\ x<3,4}} F_X(x) = 0,75 - 0,75 = 0$$

Propriété

Soit X une **variable aléatoire** et soit F_X **sa fonction de répartition** . On a :

i. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$

Dans l'exemple précédent, on voit bien que :

- $P(X = 2) = F_X(2) - F_X\left(2^-\right) = F_X(2) - \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} F_X(x) = 0,50 - 0,25 = 0,25$
- $P(X = 3,4) = F_X(3,4) - F_X\left(3,4^-\right)$

$$= F_X(3,4) - \lim_{\substack{x \to 3,4 \\ x < 3,4}} F_X(x) = 0,75 - 0,75 = 0$$

Propriété

Soit X une **variable aléatoire** et soit F_X **sa fonction de répartition** . On a :

i. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$

ii. $\forall a \in \mathbb{R}, P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$

Dans l'exemple précédent, on voit bien que :

Propriété

Soit X une **variable aléatoire** et soit F_X **sa fonction de répartition** . On a :

i. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$

ii. $\forall a \in \mathbb{R}, P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$

Dans l'exemple précédent, on voit bien que :

- $P(X = 2) = F_X(2) - F_X\left(2^-\right) =$

Propriété

Soit X une **variable aléatoire** et soit F_X **sa fonction de répartition** . On a :

i. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$

ii. $\forall a \in \mathbb{R}, P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$

Dans l'exemple précédent, on voit bien que :

- $P(X = 2) = F_X(2) - F_X\left(2^-\right) = F_X(2) - \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} F_X(x) =$

Propriété

Soit X une **variable aléatoire** et soit F_X **sa fonction de répartition** . On a :

i. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$

ii. $\forall a \in \mathbb{R}, P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$

Dans l'exemple précédent, on voit bien que :

- $P(X = 2) = F_X(2) - F_X\left(2^-\right) = F_X(2) - \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} F_X(x) = 0,50 - 0,25 =$

Propriété

Soit X une **variable aléatoire** et soit F_X **sa fonction de répartition** . On a :

i. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$

ii. $\forall a \in \mathbb{R}, P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$

Dans l'exemple précédent, on voit bien que :

- $P(X = 2) = F_X(2) - F_X\left(2^-\right) = F_X(2) - \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} F_X(x) = 0,50 - 0,25 = 0,25$

Propriété

Soit X une **variable aléatoire** et soit F_X **sa fonction de répartition** . On a :

i. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$

ii. $\forall a \in \mathbb{R}, P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$

Dans l'exemple précédent, on voit bien que :

- $P(X = 2) = F_X(2) - F_X\left(2^-\right) = F_X(2) - \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} F_X(x) = 0,50 - 0,25 = 0,25$
- $P(X = 3,4) = F_X(3,4) - F_X\left(3,4^-\right)$

  $=$

Propriété

Soit X une **variable aléatoire** et soit F_X **sa fonction de répartition** . On a :

i. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$

ii. $\forall a \in \mathbb{R}, P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$

Dans l'exemple précédent, on voit bien que :

- $P(X = 2) = F_X(2) - F_X\left(2^-\right) = F_X(2) - \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} F_X(x) = 0,50 - 0,25 = 0,25$
- $P(X = 3,4) = F_X(3,4) - F_X\left(3,4^-\right)$

$$= F_X(3,4) - \lim_{\substack{x \to 3,4 \\ x < 3,4}} F_X(x) =$$

Propriété

Soit X une **variable aléatoire** et soit F_X **sa fonction de répartition** . On a :

i. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$

ii. $\forall a \in \mathbb{R}, P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$

Dans l'exemple précédent, on voit bien que :

- $P(X = 2) = F_X(2) - F_X\left(2^-\right) = F_X(2) - \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} F_X(x) = 0,50 - 0,25 = 0,25$
- $P(X = 3,4) = F_X(3,4) - F_X\left(3,4^-\right)$

$$= F_X(3,4) - \lim_{\substack{x \to 3,4 \\ x < 3,4}} F_X(x) = 0,75 - 0,75 =$$

Propriété

Soit X une **variable aléatoire** et soit F_X **sa fonction de répartition** . On a :

i. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$

ii. $\forall a \in \mathbb{R}, P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$

Dans l'exemple précédent, on voit bien que :

- $P(X = 2) = F_X(2) - F_X\left(2^-\right) = F_X(2) - \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} F_X(x) = 0,50 - 0,25 = 0,25$
- $P(X = 3,4) = F_X(3,4) - F_X\left(3,4^-\right)$

$$= F_X(3,4) - \lim_{\substack{x \to 3,4 \\ x < 3,4}} F_X(x) = 0,75 - 0,75 = 0$$

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète**

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**.

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega =$

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \boldsymbol{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2}$

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \boldsymbol{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2}$ que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés,

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \boldsymbol{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2}$ que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés, autrement dit, cet univers est

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \boldsymbol{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2}$ que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés, autrement dit, cet univers est **équiprobable**.

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \boldsymbol{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2}$que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés, autrement dit, cet univers est **équiprobable**.

L'évènement $X = 1$ est par définition, $\boldsymbol{X^{-1}(1)}$

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}^{\mathbf{2}}$que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés, autrement dit, cet univers est **équiprobable**.

L'évènement $X = 1$ est par définition, $\boldsymbol{X^{-1}(1)}$ il est égale à $\{\mathbf{(1, 1)}\}$ et donc $P(X = 1) = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \boldsymbol{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2}$ que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés, autrement dit, cet univers est **équiprobable**.

L'évènement $X = 1$ est par définition, $\boldsymbol{X^{-1}(1)}$ il est égale à $\boldsymbol{\{(1, 1)\}}$ et donc $P(X = 1) = \boldsymbol{\frac{1}{36}}$

De même on a :

- $P(X = 2) =$

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}^{\mathbf{2}}$que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés, autrement dit, cet univers est **équiprobable**.

L'évènement $X = 1$ est par définition, $\boldsymbol{X^{-1}(1)}$ il est égale à $\{(\mathbf{1, 1})\}$ et donc $P(X = 1) = \mathbf{\frac{1}{36}}$

De même on a :

- $P(X = 2) = \boldsymbol{P}\Big(\{(\mathbf{1, 2}), (\mathbf{2, 1}), (\mathbf{2, 2})\}\Big) =$

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}^{\mathbf{2}}$que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés, autrement dit, cet univers est **équiprobable**.

L'évènement $X = 1$ est par définition, $\boldsymbol{X^{-1}(1)}$ il est égale à $\{\mathbf{(1, 1)}\}$ et donc $P(X = 1) = \mathbf{\dfrac{1}{36}}$

De même on a :

- $P(X = 2) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 2), (2, 1), (2, 2)}\}\Big) = \mathbf{\dfrac{3}{36}} = \mathbf{\dfrac{1}{12}}$

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}^{\mathbf{2}}$que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés, autrement dit, cet univers est **équiprobable**.

L'évènement $X = 1$ est par définition, $\boldsymbol{X^{-1}(1)}$ il est égale à $\{\mathbf{(1, 1)}\}$ et donc $P(X = 1) = \mathbf{\frac{1}{36}}$

De même on a :

- $P(X = 2) = \boldsymbol{P\Big(\{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}\Big) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}}$
- $P(X = 3) =$

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}^{\mathbf{2}}$ que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés, autrement dit, cet univers est **équiprobable**.

L'évènement $X = 1$ est par définition, $\boldsymbol{X^{-1}(1)}$ il est égale à $\{\mathbf{(1, 1)}\}$ et donc $P(X = 1) = \mathbf{\dfrac{1}{36}}$

De même on a :

- $P(X = 2) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 2), (2, 1), (2, 2)}\}\Big) = \mathbf{\dfrac{3}{36}} = \mathbf{\dfrac{1}{12}}$
- $P(X = 3) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 1), (3, 2)}\}\Big) =$

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}^{\mathbf{2}}$que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés, autrement dit, cet univers est **équiprobable**.

L'évènement $X = 1$ est par définition, $\boldsymbol{X^{-1}(1)}$ il est égale à $\{\mathbf{(1,1)}\}$ et donc $P(X = 1) = \mathbf{\dfrac{1}{36}}$

De même on a :

- $P(X = 2) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1,2), (2,1), (2,2)}\}\Big) = \mathbf{\dfrac{3}{36}} = \mathbf{\dfrac{1}{12}}$
- $P(X = 3) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1,3), (2,3), (3,3), (3,1), (3,2)}\}\Big) = \mathbf{\dfrac{5}{36}}$

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}^{\mathbf{2}}$que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés, autrement dit, cet univers est **équiprobable**.

L'évènement $X = 1$ est par définition, $\boldsymbol{X^{-1}(1)}$ il est égale à $\{(\mathbf{1}, \mathbf{1})\}$ et donc $P(X = 1) = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$

De même on a :

- $P(X = 2) = \boldsymbol{P}\Big(\{(\mathbf{1}, \mathbf{2}), (\mathbf{2}, \mathbf{1}), (\mathbf{2}, \mathbf{2})\}\Big) = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{36}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}$
- $P(X = 3) = \boldsymbol{P}\Big(\{(\mathbf{1}, \mathbf{3}), (\mathbf{2}, \mathbf{3}), (\mathbf{3}, \mathbf{3}), (\mathbf{3}, \mathbf{1}), (\mathbf{3}, \mathbf{2})\}\Big) = \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}}$
- $P(X = 4) =$

VIII. Variables aléatoires réelles discrètes

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}^{\mathbf{2}}$que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés, autrement dit, cet univers est **équiprobable**.

L'évènement $X = 1$ est par définition, $\boldsymbol{X^{-1}(1)}$ il est égale à $\{(\mathbf{1, 1})\}$ et donc $P(X = 1) = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$

De même on a :

- $P(X = 2) = \boldsymbol{P}\Big(\{(\mathbf{1, 2}), (\mathbf{2, 1}), (\mathbf{2, 2})\}\Big) = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{36}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}$
- $P(X = 3) = \boldsymbol{P}\Big(\{(\mathbf{1, 3}), (\mathbf{2, 3}), (\mathbf{3, 3}), (\mathbf{3, 1}), (\mathbf{3, 2})\}\Big) = \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}}$
- $P(X = 4) = \boldsymbol{P}\Big(\{(\mathbf{1, 4}), (\mathbf{2, 4}), (\mathbf{3, 4}), (\mathbf{4, 4}), (\mathbf{4, 3}), (\mathbf{4, 2}), (\mathbf{4, 1})\}\Big) =$

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}^{\mathbf{2}}$que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés, autrement dit, cet univers est **équiprobable**.

L'évènement $X = 1$ est par définition, $\boldsymbol{X^{-1}(1)}$ il est égale à $\{\mathbf{(1, 1)}\}$ et donc $P(X = 1) = \mathbf{\frac{1}{36}}$

De même on a :

- $P(X = 2) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 2), (2, 1), (2, 2)}\}\Big) = \mathbf{\frac{3}{36}} = \mathbf{\frac{1}{12}}$
- $P(X = 3) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 1), (3, 2)}\}\Big) = \mathbf{\frac{5}{36}}$
- $P(X = 4) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 3), (4, 2), (4, 1)}\}\Big) = \mathbf{\frac{7}{36}}$

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}^{\mathbf{2}}$que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés, autrement dit, cet univers est **équiprobable**.

L'évènement $X = 1$ est par définition, $\boldsymbol{X^{-1}(1)}$ il est égale à $\{\mathbf{(1, 1)}\}$ et donc $P(X = 1) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$

De même on a :

- $P(X = 2) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 2), (2, 1), (2, 2)}\}\Big) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{36}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}$
- $P(X = 3) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 1), (3, 2)}\}\Big) = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}}$
- $P(X = 4) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 3), (4, 2), (4, 1)}\}\Big) = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{36}}$
- $P(X = 5) =$

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}^{\mathbf{2}}$que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés, autrement dit, cet univers est **équiprobable**.

L'évènement $X = 1$ est par définition, $\boldsymbol{X^{-1}(1)}$ il est égale à $\{\mathbf{(1, 1)}\}$ et donc $P(X = 1) = \mathbf{\dfrac{1}{36}}$

De même on a :

- $P(X = 2) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 2), (2, 1), (2, 2)}\}\Big) = \mathbf{\dfrac{3}{36}} = \mathbf{\dfrac{1}{12}}$
- $P(X = 3) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 1), (3, 2)}\}\Big) = \mathbf{\dfrac{5}{36}}$
- $P(X = 4) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 3), (4, 2), (4, 1)}\}\Big) = \mathbf{\dfrac{7}{36}}$
- $P(X = 5) = \mathbf{\dfrac{9}{36}} =$

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}^{\mathbf{2}}$que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés, autrement dit, cet univers est **équiprobable**.

L'évènement $X = 1$ est par définition, $\boldsymbol{X^{-1}(1)}$ il est égale à $\{\mathbf{(1, 1)}\}$ et donc $P(X = 1) = \mathbf{\dfrac{1}{36}}$

De même on a :

- $P(X = 2) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 2), (2, 1), (2, 2)}\}\Big) = \mathbf{\dfrac{3}{36}} = \mathbf{\dfrac{1}{12}}$
- $P(X = 3) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 1), (3, 2)}\}\Big) = \mathbf{\dfrac{5}{36}}$
- $P(X = 4) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 3), (4, 2), (4, 1)}\}\Big) = \mathbf{\dfrac{7}{36}}$
- $P(X = 5) = \mathbf{\dfrac{9}{36}} = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}^{\mathbf{2}}$que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés, autrement dit, cet univers est **équiprobable**.

L'évènement $X = 1$ est par définition, $\boldsymbol{X^{-1}(1)}$ il est égale à $\{\mathbf{(1, 1)}\}$ et donc $P(X = 1) = \mathbf{\frac{1}{36}}$

De même on a :

- $P(X = 2) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 2), (2, 1), (2, 2)}\}\Big) = \mathbf{\frac{3}{36}} = \mathbf{\frac{1}{12}}$
- $P(X = 3) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 1), (3, 2)}\}\Big) = \mathbf{\frac{5}{36}}$
- $P(X = 4) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 3), (4, 2), (4, 1)}\}\Big) = \mathbf{\frac{7}{36}}$
- $P(X = 5) = \mathbf{\frac{9}{36}} = \mathbf{\frac{1}{4}}$
- $P(X = 6) =$

Définition:

Une variable aléatoire X est **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est **dénombrable**. Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{Z}$ ou si $X(\Omega)$ est **fini**.

Exemple n° 2 : On lance deux dés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}^{\mathbf{2}}$que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés, autrement dit, cet univers est **équiprobable**.

L'évènement $X = 1$ est par définition, $\boldsymbol{X^{-1}(1)}$ il est égale à $\{\mathbf{(1, 1)}\}$ et donc $P(X = 1) = \mathbf{\frac{1}{36}}$

De même on a :

- $P(X = 2) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 2), (2, 1), (2, 2)}\}\Big) = \mathbf{\frac{3}{36}} = \mathbf{\frac{1}{12}}$
- $P(X = 3) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 1), (3, 2)}\}\Big) = \mathbf{\frac{5}{36}}$
- $P(X = 4) = \boldsymbol{P}\Big(\{\mathbf{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 3), (4, 2), (4, 1)}\}\Big) = \mathbf{\frac{7}{36}}$
- $P(X = 5) = \mathbf{\frac{9}{36}} = \mathbf{\frac{1}{4}}$
- $P(X = 6) = \mathbf{\frac{11}{36}}$

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète. L'application $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à tout $x \in X(\Omega)$ associe $P(X = x)$ s'appelle la **loi de probabilité** de X.

On dit aussi **distribution de probabilité** ou **densité** de X.

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète. L'application $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à tout $x \in X(\Omega)$ associe $P(X = x)$ s'appelle la **loi de probabilité** de X.

On dit aussi **distribution de probabilité** ou **densité** de X.

Propriété

Soit X une variable aléatoire discrète. Si $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est sa loi de probabilité, alors $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) = \quad .$

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète. L'application $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à tout $x \in X(\Omega)$ associe $P(X = x)$ s'appelle la **loi de probabilité** de X.

On dit aussi **distribution de probabilité** ou **densité** de X.

Propriété

Soit X une variable aléatoire discrète. Si $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est sa loi de probabilité, alors $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) = \mathbf{1}$.

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète. L'application $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à tout $x \in X(\Omega)$ associe $P(X = x)$ s'appelle la **loi de probabilité** de X.

On dit aussi **distribution de probabilité** ou **densité** de X.

Propriété

Soit X une variable aléatoire discrète. Si $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est sa loi de probabilité, alors $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) = \quad .$

En effet, $\Omega = \displaystyle\bigcup_{x \in X(\Omega)} (X = x)$ et cette union est disjointe et dénombrable.

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète. L'application $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à tout $x \in X(\Omega)$ associe $P(X = x)$ s'appelle la **loi de probabilité** de X.

On dit aussi **distribution de probabilité** ou **densité** de X.

Propriété

Soit X une variable aléatoire discrète. Si $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est sa loi de probabilité, alors $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) = \quad .$

En effet, $\Omega = \displaystyle\bigcup_{x \in X(\Omega)} (X = x)$ et cette union est disjointe et dénombrable.

En appliquant la $\sigma-$additivité de P, on obtient bien

$$\mathbf{1 = P(\Omega) =}$$

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète. L'application $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à tout $x \in X(\Omega)$ associe $P(X = x)$ s'appelle la **loi de probabilité** de X.

On dit aussi **distribution de probabilité** ou **densité** de X.

Propriété

Soit X une variable aléatoire discrète. Si $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est sa loi de probabilité, alors $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) =$.

En effet, $\Omega = \displaystyle\bigcup_{x \in X(\Omega)} (X = x)$ et cette union est disjointe et dénombrable.

En appliquant la $\sigma-$additivité de P, on obtient bien

$$\mathbf{1 = P(\Omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) =}$$

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète. L'application $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à tout $x \in X(\Omega)$ associe $P(X = x)$ s'appelle la **loi de probabilité** de X.

On dit aussi **distribution de probabilité** ou **densité** de X.

Propriété

Soit X une variable aléatoire discrète. Si $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est sa loi de probabilité, alors $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) =\quad$.

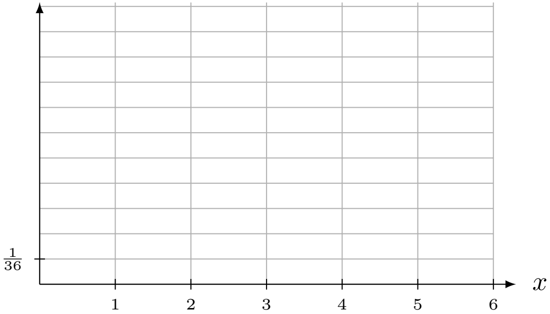
En effet, $\Omega = \displaystyle\bigcup_{x \in X(\Omega)} (X = x)$ et cette union est disjointe et dénombrable.

En appliquant la $\sigma-$additivité de P, on obtient bien

$$\mathbf{1 = P(\Omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x).}$$

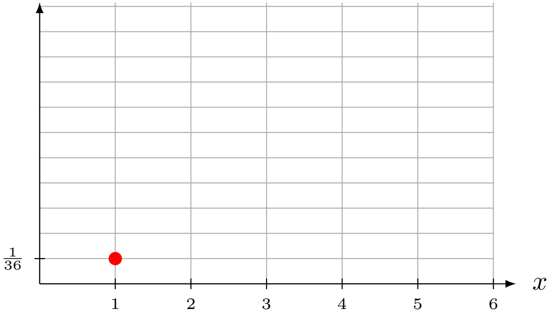
Dans l'exemple précédent, on représente la loi de X par le tableau de valeurs suivants :

x	1	2	3	4	5	6	Total
$P(X=x)$							



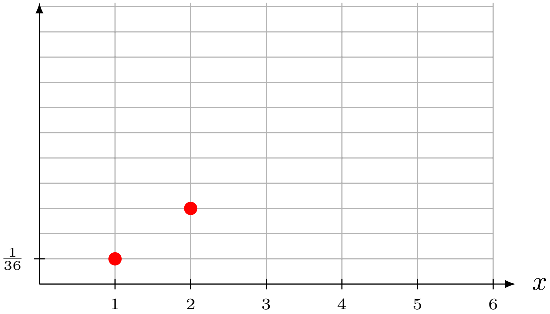
Dans l'exemple précédent, on représente la loi de X par le tableau de valeurs suivants :

x	1	2	3	4	5	6	Total
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$						



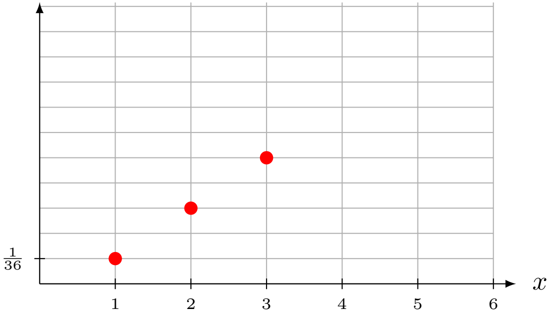
Dans l'exemple précédent, on représente la loi de X par le tableau de valeurs suivants :

x	1	2	3	4	5	6	Total
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$					



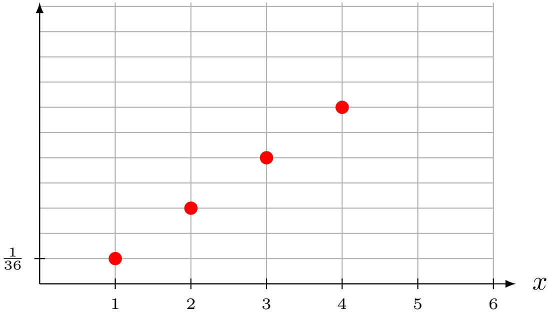
Dans l'exemple précédent, on représente la loi de X par le tableau de valeurs suivants :

x	1	2	3	4	5	6	Total
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$				



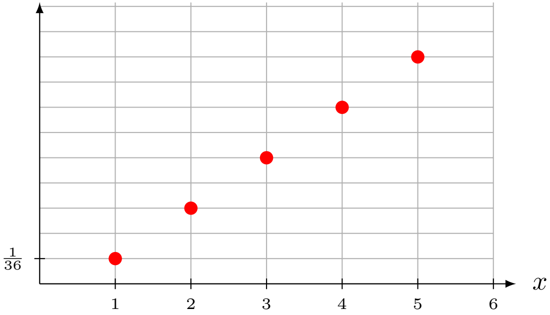
Dans l'exemple précédent, on représente la loi de X par le tableau de valeurs suivants :

x	1	2	3	4	5	6	Total
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$			



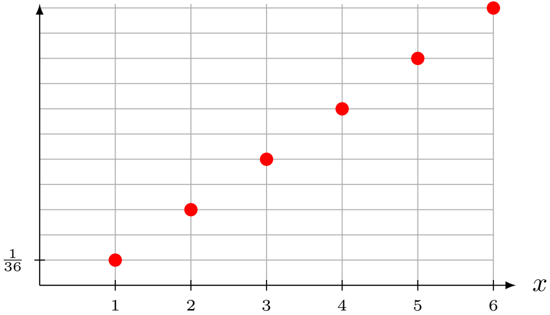
Dans l'exemple précédent, on représente la loi de X par le tableau de valeurs suivants :

x	1	2	3	4	5	6	Total
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$		



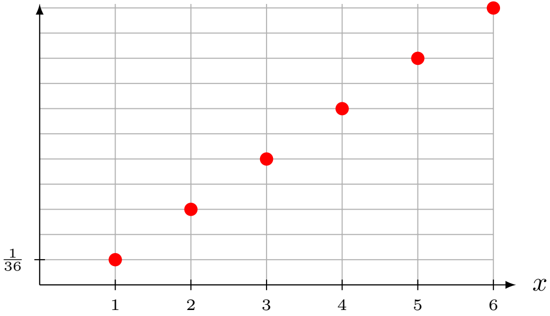
Dans l'exemple précédent, on représente la loi de X par le tableau de valeurs suivants :

x	1	2	3	4	5	6	Total
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	



Dans l'exemple précédent, on représente la loi de X par le tableau de valeurs suivants :

x	1	2	3	4	5	6	Total
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1



3. Moments d'une variable aléatoire discrète

3. Moments d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

3. Moments d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. $X(\Omega)$ est, par définition, un ensemble dénombrable, c'est-à-dire que l'on peut numéroter ses éléments.

3. Moments d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. $X(\Omega)$ est, par définition, un ensemble dénombrable, c'est-à-dire que l'on peut numéroter ses éléments. Dans la suite de ce paragraphe nous écrirons $X(\Omega) = \{\boldsymbol{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots}\}$,

3. Moments d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. $X(\Omega)$ est, par définition, un ensemble dénombrable, c'est-à-dire que l'on peut numéroter ses éléments. Dans la suite de ce paragraphe nous écrirons $X(\Omega) = \{\boldsymbol{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots}\}$, en convenant de poser dans le cas où Card$X(\Omega) = n$: $P(X = x_i) = 0$ dès que $i > n$. Ceci ,nous permettra de pas avoir à distinguer le cas fini du cas infini dénombrable.

3. Moments d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. $X(\Omega)$ est, par définition, un ensemble dénombrable, c'est-à-dire que l'on peut numéroter ses éléments. Dans la suite de ce paragraphe nous écrirons $X(\Omega) = \{\boldsymbol{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots}\}$, en convenant de poser dans le cas où Card$X(\Omega) = n$: $P(X = x_i) = 0$ dès que $i > n$. Ceci ,nous permettra de pas avoir à distinguer le cas fini du cas infini dénombrable.

Rappelons enfin qu'il n'y a pas unicité de la numérotation des éléments de $X(\Omega)$ et que cela pose des problèmes pour les sommations.

3. Moments d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. $X(\Omega)$ est, par définition, un ensemble dénombrable, c'est-à-dire que l'on peut numéroter ses éléments. Dans la suite de ce paragraphe nous écrirons $X(\Omega) = \{\boldsymbol{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots}\}$, en convenant de poser dans le cas où Card$X(\Omega) = n$: $P(X = x_i) = 0$ dès que $i > n$. Ceci ,nous permettra de pas avoir à distinguer le cas fini du cas infini dénombrable.

Rappelons enfin qu'il n'y a pas unicité de la numérotation des éléments de $X(\Omega)$ et que cela pose des problèmes pour les sommations. Nous serons donc amenés à supposer l'absolue convergence des séries concernées.

3. Moments d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. $X(\Omega)$ est, par définition, un ensemble dénombrable, c'est-à-dire que l'on peut numéroter ses éléments. Dans la suite de ce paragraphe nous écrirons $X(\Omega) = \{\boldsymbol{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots}\}$, en convenant de poser dans le cas où Card$X(\Omega) = n$: $P(X = x_i) = 0$ dès que $i > n$. Ceci ,nous permettra de pas avoir à distinguer le cas fini du cas infini dénombrable.

Rappelons enfin qu'il n'y a pas unicité de la numérotation des éléments de $X(\Omega)$ et que cela pose des problèmes pour les sommations. Nous serons donc amenés à supposer l'absolue convergence des séries concernées.

Rappel :

3. Moments d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. $X(\Omega)$ est, par définition, un ensemble dénombrable, c'est-à-dire que l'on peut numéroter ses éléments. Dans la suite de ce paragraphe nous écrirons $X(\Omega) = \{\boldsymbol{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots}\}$, en convenant de poser dans le cas où $\text{Card}X(\Omega) = n$: $P(X = x_i) = 0$ dès que $i > n$. Ceci ,nous permettra de pas avoir à distinguer le cas fini du cas infini dénombrable.

Rappelons enfin qu'il n'y a pas unicité de la numérotation des éléments de $X(\Omega)$ et que cela pose des problèmes pour les sommations. Nous serons donc amenés à supposer l'absolue convergence des séries concernées.

Rappel : *Etant donné une série de terme général u_n absolument convergente. Si φ est une permutation de $\mathbb{N}$ alors la série de de terme général $u_{\varphi(n)}$ est absolument convergente, et on a :*

3. Moments d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. $X(\Omega)$ est, par définition, un ensemble dénombrable, c'est-à-dire que l'on peut numéroter ses éléments. Dans la suite de ce paragraphe nous écrirons $X(\Omega) = \{\boldsymbol{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots}\}$, en convenant de poser dans le cas où Card$X(\Omega) = n$: $P(X = x_i) = 0$ dès que $i > n$. Ceci ,nous permettra de pas avoir à distinguer le cas fini du cas infini dénombrable.

Rappelons enfin qu'il n'y a pas unicité de la numérotation des éléments de $X(\Omega)$ et que cela pose des problèmes pour les sommations. Nous serons donc amenés à supposer l'absolue convergence des séries concernées.

Rappel : *Etant donné une série de terme général u_n absolument convergente. Si φ est une permutation de $\mathbb{N}$ alors la série de de terme général $u_{\varphi(n)}$ est absolument convergente, et on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)}.$$

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète et notons $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_n, \dots\}$.

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète et notons $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_n, \dots\}$.

On dit que X possède une **espérance** si la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète et notons $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$.

On dit que X possède une **espérance** si la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.

On appelle alors **espérance** de X, le nombre $\boldsymbol{E(X)}$ défini par

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète et notons $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$.

On dit que X possède une **espérance** si la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.

On appelle alors **espérance** de X, le nombre $\boldsymbol{E(X)}$ défini par

$$\boldsymbol{E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n)}$$

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète et notons $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_n, \dots\}$.

On dit que X possède une **espérance** si la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.

On appelle alors **espérance** de X, le nombre $\boldsymbol{E(X)}$ défini par

$$\boldsymbol{E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n)}$$

Remarque :

i. Dans le cas où (a_n) est une série semi-convergente, alors on sait que pour tout nombre réel a, il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $a = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)}$.

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète et notons $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_n, \dots\}$.

On dit que X possède une **espérance** si la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.

On appelle alors **espérance** de X, le nombre $\boldsymbol{E(X)}$ défini par

$$\boldsymbol{E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n)}$$

Remarque :

i. Dans le cas où (a_n) est une série semi-convergente, alors on sait que pour tout nombre réel a, il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $a = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)}$.

On ne peut donc définir l'**espérance** d'une variable aléatoire discrète X que dans le cas de série absolument convergente.

Remarque :

ii. Une variable aléatoire discrète qui ne prend qu'un **nombre fini** de valeurs admet toujours une espérance.

Remarque :

ii. Une variable aléatoire discrète qui ne prend qu'un **nombre fini** de valeurs admet toujours une espérance.

iii. Si X a une espérance. On a toujours $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = x_n) = 1$. On peut donc écrire

$$E(X) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n)}{\sum_{n=0}^{\infty} P(X = x_n)}$$

Remarque :

ii. Une variable aléatoire discrète qui ne prend qu'un **nombre fini** de valeurs admet toujours une espérance.

iii. Si X a une espérance. On a toujours $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = x_n) = \mathbf{1}$. On peut donc écrire

$$E(X) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n)}{\sum_{n=0}^{\infty} P(X = x_n)}$$

L'espérance de X apparaît donc comme le moyenne des valeurs prises par X **pondérées** par leur probabilités.

Exemple nº 3 :

i. On reprend l'exemple précédent où l'on lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

Exemple n° 3 :

i. On reprend l'exemple précédent où l'on lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + \ldots 6 \times \frac{11}{36}$$

Exemple n° 3 :

i. On reprend l'exemple précédent où l'on lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + \ldots 6 \times \frac{11}{36}$$

$$= \frac{1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 7 + 5 \times 9 + 6 \times 11}{36} = \frac{161}{36} \simeq 4,47$$

Exemple n° 3 :

i. On reprend l'exemple précédent où l'on lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

$$E(X) = 1\times\frac{1}{36}+2\times\frac{3}{36}+3\times\frac{5}{36}+\dots 6\times\frac{11}{36}$$

$$= \frac{1\times 1+2\times 3+3\times 5+4\times 7+5\times 9+6\times 11}{36} = \frac{161}{36} \simeq 4,47$$

ii. On jette un dé cubique à six faces. On note X la face obtenue.

Exemple n° 3 :

i. On reprend l'exemple précédent où l'on lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + \ldots 6 \times \frac{11}{36}$$

$$= \frac{1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 7 + 5 \times 9 + 6 \times 11}{36} = \frac{161}{36} \simeq 4,47$$

ii. On jette un dé cubique à six faces. On note X la face obtenue.

$$E(X) =$$

Exemple n° 3 :

i. On reprend l'exemple précédent où l'on lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + \ldots 6 \times \frac{11}{36}$$

$$= \frac{1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 7 + 5 \times 9 + 6 \times 11}{36} = \frac{161}{36} \simeq 4,47$$

ii. On jette un dé cubique à six faces. On note X la face obtenue.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6}$$

Exemple n° 3 :

i. On reprend l'exemple précédent où l'on lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + \ldots 6 \times \frac{11}{36}$$

$$= \frac{1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 7 + 5 \times 9 + 6 \times 11}{36} = \frac{161}{36} \simeq 4,47$$

ii. On jette un dé cubique à six faces. On note X la face obtenue.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6}$$

$$=$$

Exemple n° 3 :

i. On reprend l'exemple précédent où l'on lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + \ldots 6 \times \frac{11}{36}$$

$$= \frac{1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 7 + 5 \times 9 + 6 \times 11}{36} = \frac{161}{36} \simeq 4,47$$

ii. On jette un dé cubique à six faces. On note X la face obtenue.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} =$$

Exemple n° 3 :

i. On reprend l'exemple précédent où l'on lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + \dots 6 \times \frac{11}{36}$$

$$= \frac{1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 7 + 5 \times 9 + 6 \times 11}{36} = \frac{161}{36} \simeq 4,47$$

ii. On jette un dé cubique à six faces. On note X la face obtenue.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$$

iii. On considère la variable aléatoire réelle X dont la loi est donnée par :

x	2	5
$P(X = x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$E(X) =$

iii. On considère la variable aléatoire réelle X dont la loi est donnée par :

x	2	5
$P(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$E(X) = 2 \times \frac{2}{3} + 5 \times \frac{1}{3} =$$

iii. On considère la variable aléatoire réelle X dont la loi est donnée par :

x	2	5
$P(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$E(X) = 2 \times \frac{2}{3} + 5 \times \frac{1}{3} = \frac{2 \times 2 + 5 \times 1}{3} =$$

iii. On considère la variable aléatoire réelle X dont la loi est donnée par :

x	2	5
$P(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$E(X) = 2\times\frac{2}{3}+5\times\frac{1}{3} = \frac{2\times 2+5\times 1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

iii. On considère la variable aléatoire réelle X dont la loi est donnée par :

x	2	5
$P(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$E(X) = 2 \times \frac{2}{3} + 5 \times \frac{1}{3} = \frac{2 \times 2 + 5 \times 1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Interprétation mécanique :

iii. On considère la variable aléatoire réelle X dont la loi est donnée par :

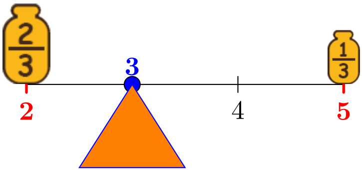
x	2	5
$P(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$E(X) = 2\times\frac{2}{3} + 5\times\frac{1}{3} = \frac{2\times 2+5\times 1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Interprétation mécanique :

Propriété

L'espérance est le point d'équilibre des valeurs pondérées par leurs probabilités.



Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète ayant une espérance $E(X)$, alors on appelle **variance** de X le nombre $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x_n - E(X)\right)^2 \times P(X = x_n)$$

sous réserve de la convergence de cette série.

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète ayant une espérance $E(X)$, alors on appelle **variance** de X le nombre $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x_n - E(X)\right)^2 \times P(X = x_n)$$

sous réserve de la convergence de cette série.

Remarque :

i. Cette série est à termes positifs ce qui dispense de parler de convergence absolue.

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète ayant une espérance $E(X)$, alors on appelle **variance** de X le nombre $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x_n - E(X)\right)^2 \times P(X = x_n)$$

sous réserve de la convergence de cette série.

Remarque :

i. Cette série est à termes positifs ce qui dispense de parler de convergence absolue.

ii. Une variable aléatoire discrète qui ne prend qu'un **nombre fini** de valeurs admet toujours une variance.

Remarque :

iii. En pratique, la variance $V(X)$ n'a pas les **mêmes unités** que la v.a.r X, puisque les écarts sont élevés aux carrés. On lui préfère donc :

Remarque :

iii. En pratique, la variance $V(X)$ n'a pas les **mêmes unités** que la v.a.r X, puisque les écarts sont élevés aux carrés. On lui préfère donc :

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète ayant une variance $V(X)$, alors on appelle **écart-type** de X le nombre $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète, notons $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$, et soit $r \in \mathbb{N}$.

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète, notons $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_n, \dots\}$, et soit $r \in \mathbb{N}$.

i. On appelle **moment d'ordre** r de X le nombre $m_r(X)$ défini par :

$$m_r(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n)^r \times P(X = x_n)$$

sous réserve de la convergence de cette série.

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète, notons $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$, et soit $r \in \mathbb{N}$.

i. On appelle **moment d'ordre** r de X le nombre $m_r(X)$ défini par :

$$m_r(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n)^r \times P(X = x_n)$$

sous réserve de la convergence de cette série.

ii. On appelle **moment centré d'ordre** r de X le nombre $\mu_r(X)$ défini par :

$$\mu_r(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x_n - E(X)\right)^r \times P(X = x_n)$$

sous réserve de la convergence de cette série.

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète, notons $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_n, \dots\}$, et soit $r \in \mathbb{N}$.

i. On appelle **moment d'ordre r** de X le nombre $m_r(X)$ défini par :

$$m_r(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n)^r \times P(X = x_n)$$

sous réserve de la convergence de cette série.

ii. On appelle **moment centré d'ordre r** de X le nombre $\mu_r(X)$ défini par :

$$\mu_r(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \big(x_n - E(X)\big)^r \times P(X = x_n)$$

sous réserve de la convergence de cette série.

Remarque : la variance de X est **le moment centré d'ordre 2 de X.**

Propriété

Etant donné, un entier naturel r, la convergence de $m_{r+1}(X)$ entraîne celle de $m_r(X)$

Propriété

Etant donné, un entier naturel r, la convergence de $m_{r+1}(X)$ entraîne celle de $m_r(X)$

Démonstration

On commence par démontrer en exercice que pour tout nombre réel positif x,

$$x^r \leqslant x^{r+1} + 1$$

Propriété

Etant donné, un entier naturel r, la convergence de $\boldsymbol{m_{r+1}(X)}$ entraîne celle de $\boldsymbol{m_r(X)}$

Démonstration

On commence par démontrer en exercice que pour tout nombre réel positif x,

$$x^r \leqslant x^{r+1} + 1$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^r P(X = x_n) \leqslant$$

Propriété

Etant donné, un entier naturel r, la convergence de $\boldsymbol{m_{r+1}(X)}$ entraîne celle de $\boldsymbol{m_r(X)}$

Démonstration

On commence par démontrer en exercice que pour tout nombre réel positif x,

$$x^r \leqslant x^{r+1} + 1$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^r P(X = x_n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^{r+1} P(X = x_n) + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P(X = x_n)}_{=1}$$

Propriété

Etant donné, un entier naturel r, la convergence de $\boldsymbol{m_{r+1}(X)}$ entraîne celle de $\boldsymbol{m_r(X)}$

Démonstration

On commence par démontrer en exercice que pour tout nombre réel positif x,

$$x^r \leqslant x^{r+1} + 1$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^r P(X = x_n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^{r+1} P(X = x_n) + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P(X = x_n)}_{=1}$$

Le théorème de comparaison des séries à termes positifs montre que l'existence de $m_{r+1}(X)$ entraîne celle de $m_r(X)$.

Propriété

Etant donnée une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application $\varphi \circ X$ de Ω dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "\varphi \circ X"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

notée $\boldsymbol{\varphi(X)}$, est une variable aléatoire discrète.

Propriété

Etant donnée une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application $\varphi \circ X$ de Ω dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "\varphi \circ X"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

notée $\boldsymbol{\varphi(X)}$, est une variable aléatoire discrète.

Démonstration

- $\varphi(X)(\Omega) = \varphi\big(X(\Omega)\big)$, or $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable, il en est donc de même de $\varphi(X)(\Omega)$.

Propriété

Etant donnée une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application $\varphi \circ X$ de Ω dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "\varphi \circ X"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

notée $\boldsymbol{\varphi(X)}$, est une variable aléatoire discrète.

Démonstration

- $\varphi(X)(\Omega) = \varphi\big(X(\Omega)\big)$, or $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable, il en est donc de même de $\varphi(X)(\Omega)$.
- De plus, pour tout $y \in \varphi(X)(\Omega)$,

Propriété

Etant donnée une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application $\varphi \circ X$ de Ω dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "\varphi \circ X"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

notée $\boldsymbol{\varphi(X)}$, est une variable aléatoire discrète.

Démonstration

- $\varphi(X)(\Omega) = \varphi\big(X(\Omega)\big)$, or $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable, il en est donc de même de $\varphi(X)(\Omega)$.
- De plus, pour tout $y \in \varphi(X)(\Omega)$, $\varphi^{-1}(y) \cap X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable

Propriété

Etant donnée une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application $\varphi \circ X$ de Ω dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "\varphi \circ X"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

notée $\boldsymbol{\varphi(X)}$, est une variable aléatoire discrète.

Démonstration

- $\varphi(X)(\Omega) = \varphi\big(X(\Omega)\big)$, or $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable, il en est donc de même de $\varphi(X)(\Omega)$.
- De plus, pour tout $y \in \varphi(X)(\Omega)$, $\varphi^{-1}(y) \cap X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable et $\big[\varphi(X)\big]^{-1}(y) = X^{-1}\big(\varphi^{-1}(y)\big) = X^{-1}\big(\varphi^{-1}(y) \cap X(\Omega)\big)$.

Propriété

Etant donnée une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application $\varphi \circ X$ de Ω dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "\varphi \circ X"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

notée $\boldsymbol{\varphi(X)}$, est une variable aléatoire discrète.

Démonstration

- $\varphi(X)(\Omega) = \varphi\big(X(\Omega)\big)$, or $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable, il en est donc de même de $\varphi(X)(\Omega)$.
- De plus, pour tout $y \in \varphi(X)(\Omega)$, $\varphi^{-1}(y) \cap X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable et $\big[\varphi(X)\big]^{-1}(y) = X^{-1}\big(\varphi^{-1}(y)\big) = X^{-1}\big(\varphi^{-1}(y) \cap X(\Omega)\big)$.

  Par conséquent, $\big[\varphi(X)\big]^{-1}(y)$ est une réunion dénombrables d'évènements,

Propriété

Etant donnée une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application $\varphi \circ X$ de Ω dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "\varphi \circ X"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

notée $\boldsymbol{\varphi(X)}$, est une variable aléatoire discrète.

Démonstration

- $\varphi(X)(\Omega) = \varphi\big(X(\Omega)\big)$, or $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable, il en est donc de même de $\varphi(X)(\Omega)$.
- De plus, pour tout $y \in \varphi(X)(\Omega)$, $\varphi^{-1}(y) \cap X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable et $\big[\varphi(X)\big]^{-1}(y) = X^{-1}\big(\varphi^{-1}(y)\big) = X^{-1}\big(\varphi^{-1}(y) \cap X(\Omega)\big)$.

  Par conséquent, $\big[\varphi(X)\big]^{-1}(y)$ est une réunion dénombrables d'évènements, comme $\mathcal{T}$ est une $\sigma-$algèbre, c'est encore un évènement.

Propriété

Etant donnée une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application $\varphi \circ X$ de Ω dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "\varphi \circ X"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

notée $\boldsymbol{\varphi(X)}$, est une variable aléatoire discrète.

Démonstration

- $\varphi(X)(\Omega) = \varphi\big(X(\Omega)\big)$, or $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable, il en est donc de même de $\varphi(X)(\Omega)$.

- De plus, pour tout $y \in \varphi(X)(\Omega)$, $\varphi^{-1}(y) \cap X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable et $\big[\varphi(X)\big]^{-1}(y) = X^{-1}\big(\varphi^{-1}(y)\big) = X^{-1}\big(\varphi^{-1}(y) \cap X(\Omega)\big)$.

  Par conséquent, $\big[\varphi(X)\big]^{-1}(y)$ est une réunion dénombrables d'évènements, comme $\mathcal{T}$ est une $\sigma-$algèbre, c'est encore un évènement. Donc, $\varphi(X)$ est une variable aléatoire discrète.

Théorème de transport

Soit X une variable aléatoire discrète. Alors, si la variable aléatoire discrète $\varphi(X)$ admet une espérance, celle-ci est donnée par la formule :

$$E\big(\varphi(X)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x_n) \times P(X = x_n)$$

Théorème de transport

Soit X une variable aléatoire discrète. Alors, si la variable aléatoire discrète $\varphi(X)$ admet une espérance, celle-ci est donnée par la formule :

$$E\big(\varphi(X)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x_n) \times P(X = x_n)$$

Démonstration

Avec les notations $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$ et $\varphi(X)(\Omega) = \{y_j\}_{j \in J}$ on a :

Théorème de transport

Soit X une variable aléatoire discrète. Alors, si la variable aléatoire discrète $\varphi(X)$ admet une espérance, celle-ci est donnée par la formule :

$$E\big(\varphi(X)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x_n) \times P(X = x_n)$$

Démonstration

Avec les notations $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$ et $\varphi(X)(\Omega) = \{y_j\}_{j \in J}$ on a :

$$E\big(\varphi(X)\big) = \sum_{j \in J} y_j P\big(\varphi(X) = y_j)\big)$$

Théorème de transport

Soit X une variable aléatoire discrète. Alors, si la variable aléatoire discrète $\varphi(X)$ admet une espérance, celle-ci est donnée par la formule :

$$E\big(\varphi(X)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x_n) \times P(X = x_n)$$

Démonstration

Avec les notations $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$ et $\varphi(X)(\Omega) = \{y_j\}_{j \in J}$ on a :

$$E\big(\varphi(X)\big) = \sum_{j \in J} y_j P\big(\varphi(X) = y_j)\big)$$

Soit $I_j = \{i \in \mathbb{N} / \varphi(x_i) = y_j\}$ (l'ensemble des indices des antécédents de y_j). La famille $(I_j)_{j \in J}$ est une **partition** de $\mathbb{N}$ et on a :

$$\big(\varphi(X) = y_j\big) = \bigcup_{i \in I_j} (X = x_i)$$

Théorème de transport

Soit X une variable aléatoire discrète. Alors, si la variable aléatoire discrète $\varphi(X)$ admet une espérance, celle-ci est donnée par la formule :

$$E\big(\varphi(X)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x_n) \times P(X = x_n)$$

Démonstration

Avec les notations $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$ et $\varphi(X)(\Omega) = \{y_j\}_{j \in J}$ on a :

$$E\big(\varphi(X)\big) = \sum_{j \in J} y_j P\big(\varphi(X) = y_j)\big)$$

Soit $I_j = \{i \in \mathbb{N} / \varphi(x_i) = y_j\}$ (l'ensemble des indices des antécédents de y_j). La famille $(I_j)_{j \in J}$ est une **partition** de $\mathbb{N}$ et on a :

$$\big(\varphi(X) = y_j\big) = \bigcup_{i \in I_j} (X = x_i)$$

Cette réunion est disjointes et donc $P\big(\varphi(X) = y_j\big) = \sum_{i \in I_j} \boldsymbol{P(X = x_i)}$

Démonstration

$$E(\varphi(X)) = \sum_{j \in J} y_j P(\varphi(X) = y_j))$$

Soit $I_j = \{i \in \mathbb{N} / \varphi(x_i) = y_j\}$ (l'ensemble des indices des antécédents de y_j). La famille $(I_j)_{j \in J}$ est une **partition** de $\mathbb{N}$ et on a :

$$(\varphi(X) = y_j) = \bigcup_{i \in I_j} (X = x_i)$$

Cette réunion est disjointes et donc $P(\varphi(X) = y_j) = \boldsymbol{\sum_{i \in I_j} P(X = x_i)}$

Démonstration

$$E\big(\varphi(X)\big) = \sum_{j\in J} y_j P\big(\varphi(X) = y_j)\big)$$

Soit $I_j = \big\{i \in \mathbb{N} / \varphi(x_i) = y_j\big\}$ (l'ensemble des indices des antécédents de y_j). La famille $\big(I_j\big)_{j\in J}$ est une **partition** de $\mathbb{N}$ et on a :

$$\big(\varphi(X) = y_j\big) = \bigcup_{i\in I_j} (X = x_i)$$

Cette réunion est disjointes et donc $P\big(\varphi(X) = y_j\big) = \boldsymbol{\sum_{i\in I_j} P(X = x_i)}$

Soit en remplaçant dans la formule précédente :

$$E\big(\varphi(X)\big) = \sum_{j\in J}\Big(y_j \times \sum_{i\in I_j} P(X = x_i)\Big)$$

Démonstration

$$E(\varphi(X)) = \sum_{j \in J} y_j P(\varphi(X) = y_j))$$

Soit $I_j = \{i \in \mathbb{N} / \varphi(x_i) = y_j\}$ (l'ensemble des indices des antécédents de y_j). La famille $(I_j)_{j \in J}$ est une **partition** de $\mathbb{N}$ et on a :

$$(\varphi(X) = y_j) = \bigcup_{i \in I_j} (X = x_i)$$

Cette réunion est disjointes et donc $P(\varphi(X) = y_j) = \boldsymbol{\sum_{i \in I_j} P(X = x_i)}$

Soit en remplaçant dans la formule précédente :

$$\begin{aligned} E(\varphi(X)) &= \sum_{j \in J} \Big(y_j \times \sum_{i \in I_j} P(X = x_i) \Big) \\ &= \sum_{j \in J} \Big(\sum_{i \in I_j} \varphi(x_i) \times P(X = x_i) \Big) \text{ par définition de } I_j. \end{aligned}$$

Démonstration

$$E(\varphi(X)) = \sum_{j\in J} y_j P(\varphi(X) = y_j))$$

Soit $I_j = \{i \in \mathbb{N} / \varphi(x_i) = y_j\}$ (l'ensemble des indices des antécédents de y_j). La famille $(I_j)_{j\in J}$ est une **partition** de $\mathbb{N}$ et on a :

$$(\varphi(X) = y_j) = \bigcup_{i\in I_j} (X = x_i)$$

Cette réunion est disjointes et donc $P(\varphi(X) = y_j) = \boldsymbol{\sum_{i\in I_j} P(X = x_i)}$

Soit en remplaçant dans la formule précédente :

$$\begin{aligned} E(\varphi(X)) &= \sum_{j\in J}\Big(y_j \times \sum_{i\in I_j} P(X = x_i)\Big) \\ &= \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I_j} \varphi(x_i) \times P(X = x_i)\Big) \text{ par définition de } I_j. \end{aligned}$$

Comme $(I_j)_{j\in J}$ est une **partition** de $\mathbb{N}$ on a :

$$E(\varphi(X)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi(x_i) \times P(X = x_i)$$

$$E\big(\varphi(X)\big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi(x_i) \times P(X = x_i)$$

Ce théorème permet de calculer l'espérance de la variable aléatoire discrète $\varphi(X)$ sans qu'il soit nécessaire de déterminer sa loi de probabilité, mais en utilisant uniquement celle de X.

$$E\big(\varphi(X)\big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi(x_i) \times P(X = x_i)$$

Ce théorème permet de calculer l'espérance de la variable aléatoire discrète $\varphi(X)$ sans qu'il soit nécessaire de déterminer sa loi de probabilité, mais en utilisant uniquement celle de X.

En prenant $\varphi(x) = x^r$

$$E\big(\varphi(X)\big) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi(x_i) \times P(X = x_i)$$

Ce théorème permet de calculer l'espérance de la variable aléatoire discrète $\varphi(X)$ sans qu'il soit nécessaire de déterminer sa loi de probabilité, mais en utilisant uniquement celle de X.

En prenant $\varphi(x) = x^r$ puis $\varphi(x) = \big(x - E(x)\big)^r$ on obtient le corollaire suivant :

$$E\big(\varphi(X)\big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi(x_i) \times P(X = x_i)$$

Ce théorème permet de calculer l'espérance de la variable aléatoire discrète $\varphi(X)$ sans qu'il soit nécessaire de déterminer sa loi de probabilité, mais en utilisant uniquement celle de X.

En prenant $\varphi(x) = x^r$ puis $\varphi(x) = \big(x - E(x)\big)^r$ on obtient le corollaire suivant :

Corollaire

Les moments et moments centrés d'ordre r sont égaux à

$$m_r(X) = \boldsymbol{E(X^r)} \quad \text{et} \quad \mu_r(X) = \boldsymbol{E\big((X - E(X))^r\big)}$$

Corollaire

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions réelles et X une variable aléatoire discrète. Si $\varphi_1(X)$ et $\varphi_2(X)$ admettent une espérance, alors :

$$E\big(\varphi_1(X) + \varphi_2(X)\big) = \boldsymbol{E\big(\varphi_1(X)\big) + E\big(\varphi_2(X)\big)}$$

Corollaire

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions réelles et X une variable aléatoire discrète. Si $\varphi_1(X)$ et $\varphi_2(X)$ admettent une espérance, alors :

$$E\big(\varphi_1(X) + \varphi_2(X)\big) = \boldsymbol{E\big(\varphi_1(X)\big) + E\big(\varphi_2(X)\big)}$$

Démonstration

$$E\big(\varphi_1(X) + \varphi_2(X)\big) = E\big((\varphi_1 + \varphi_2)(X)\big) =$$

Corollaire

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions réelles et X une variable aléatoire discrète. Si $\varphi_1(X)$ et $\varphi_2(X)$ admettent une espérance, alors :

$$E\big(\varphi_1(X)+\varphi_2(X)\big) = \boldsymbol{E\big(\varphi_1(X)\big) + E\big(\varphi_2(X)\big)}$$

Démonstration

$$E\big(\varphi_1(X)+\varphi_2(X)\big) = E\big((\varphi_1+\varphi_2)(X)\big) = \sum_{n=0}^{\infty}(\varphi_1+\varphi_2)(x_n)P(X=x_n)$$

Corollaire

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions réelles et X une variable aléatoire discrète. Si $\varphi_1(X)$ et $\varphi_2(X)$ admettent une espérance, alors :

$$E\big(\varphi_1(X)+\varphi_2(X)\big) = \boldsymbol{E\big(\varphi_1(X)\big) + E\big(\varphi_2(X)\big)}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} E\big(\varphi_1(X)+\varphi_2(X)\big) &= E\big((\varphi_1+\varphi_2)(X)\big) = \sum_{n=0}^{\infty}(\varphi_1+\varphi_2)(x_n)P(X=x_n) \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(\varphi_1)(x_n)P(X=x_n)}_{E\left(\varphi_1(X)\right)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(\varphi_2)(x_n)P(X=x_n)}_{E\left(\varphi_2(X)\right)} \end{aligned}$$

Exercice n° 8: Démontre que :

$$E(X^2) = E\big(X(X+1)\big) - E(X) \text{ et } E(X^2) = E\big(X(X-1)\big) + E(X)$$

Exercice nº 8: Démontre que :

$$E(X^2) = E\big(X(X+1)\big) - E(X) \text{ et } E(X^2) = E\big(X(X-1)\big) + E(X)$$

Exercice nº 9: Etant donnée une variable aléatoire discrète X ayant un moment d'ordre 2.

Exercice n° 8: Démontre que :

$$E(X^2) = E\big(X(X+1)\big) - E(X) \text{ et } E(X^2) = E\big(X(X-1)\big) + E(X)$$

Exercice n° 9: Etant donnée une variable aléatoire discrète X ayant un moment d'ordre 2. Démontre que la variable aléatoire $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma_X}$ vérifie :

Exercice nº 8: Démontre que :

$$E(X^2) = E\big(X(X+1)\big) - E(X) \text{ et } E(X^2) = E\big(X(X-1)\big) + E(X)$$

Exercice nº 9: Etant donnée une variable aléatoire discrète X ayant un moment d'ordre 2. Démontre que la variable aléatoire $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma_X}$ vérifie :

$$E(Y) = 0 \text{ et } V(Y) = 1$$

.

Exercice n° 8: Démontre que :

$$E(X^2) = E\big(X(X+1)\big) - E(X) \text{ et } E(X^2) = E\big(X(X-1)\big) + E(X)$$

Exercice n° 9: Etant donnée une variable aléatoire discrète X ayant un moment d'ordre 2. Démontre que la variable aléatoire $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma_X}$ vérifie :

$$E(Y) = 0 \text{ et } V(Y) = 1$$

.

Définition:

Une variable aléatoire X vérifiant $E(X) = 0$ est dite **centrée** et vérifiant $V(X) = 1$ est dite **réduite**.

Propriété

Etant données deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, ayant chacune une espérance, et deux réels a et b. L'espérance est application linéaire :

$$E(aX + bY) = \boldsymbol{aE(X) + bE(Y)}$$

Propriété

Etant données deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, ayant chacune une espérance, et deux réels a et b. L'espérance est application linéaire :

$$E(aX + bY) = \boldsymbol{aE(X) + bE(Y)}$$

Démonstration

En considérant $\varphi(x) = ax$ on voit trivialement que

$$E(aX) =$$

Propriété

Etant données deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, ayant chacune une espérance, et deux réels a et b. L'espérance est application linéaire :

$$E(aX + bY) = \boldsymbol{aE(X) + bE(Y)}$$

Démonstration

En considérant $\varphi(x) = ax$ on voit trivialement que

$$E(aX) = \boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} ax_n P(X = x_n) =}$$

Propriété

Etant données deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, ayant chacune une espérance, et deux réels a et b. L'espérance est application linéaire :

$$E(aX + bY) = \boldsymbol{aE(X) + bE(Y)}$$

Démonstration

En considérant $\varphi(x) = ax$ on voit trivialement que

$$E(aX) = \sum_{n=0}^{\infty} a x_n P(X = x_n) = a \sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n) =$$

Propriété

Etant données deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, ayant chacune une espérance, et deux réels a et b. L'espérance est application linéaire :

$$E(aX + bY) = \boldsymbol{aE(X) + bE(Y)}$$

Démonstration

En considérant $\varphi(x) = ax$ on voit trivialement que

$$E(aX) = \sum_{n=0}^{\infty} a x_n P(X = x_n) = a \sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n) = aE(X)$$

Propriété

Etant données deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, ayant chacune une espérance, et deux réels a et b. L'espérance est application linéaire :

$$E(aX + bY) = \boldsymbol{aE(X) + bE(Y)}$$

Démonstration

En considérant $\varphi(x) = ax$ on voit trivialement que

$$E(aX) = \sum_{n=0}^{\infty} a x_n P(X = x_n) = a \sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n) = aE(X)$$

Il reste à démontrer que $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Propriété

Etant données deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, ayant chacune une espérance, et deux réels a et b. L'espérance est application linéaire :

$$E(aX + bY) = \boldsymbol{aE(X) + bE(Y)}$$

Démonstration

En considérant $\varphi(x) = ax$ on voit trivialement que

$$E(aX) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{ax_n P(X = x_n) = a \sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n) = aE(X)}$$

Il reste à démontrer que $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$. On pose $Z = X + Y$, $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$, $Y(\Omega) = \{y_0, \ldots, y_n, \ldots\}$, et $p_{ij} = P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$

Propriété

Etant données deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, ayant chacune une espérance, et deux réels a et b. L'espérance est application linéaire :

$$E(aX + bY) = \boldsymbol{aE(X) + bE(Y)}$$

Démonstration

En considérant $\varphi(x) = ax$ on voit trivialement que

$$E(aX) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{ax_n P(X = x_n) = a \sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n) = aE(X)}$$

Il reste à démontrer que $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$. On pose $Z = X + Y$, $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$, $Y(\Omega) = \{y_0, \ldots, y_n, \ldots\}$, et $p_{ij} = P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$

La famille $(Y = y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est un **système complet** d'évènements car :

Propriété

Etant données deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, ayant chacune une espérance, et deux réels a et b. L'espérance est application linéaire :

$$E(aX + bY) = \boldsymbol{aE(X) + bE(Y)}$$

Démonstration

En considérant $\varphi(x) = ax$ on voit trivialement que

$$E(aX) = \sum_{n=0}^{\infty} ax_n P(X = x_n) = a \sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n) = aE(X)$$

Il reste à démontrer que $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$. On pose $Z = X + Y$, $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_n, \dots\}$, $Y(\Omega) = \{y_0, \dots, y_n, \dots\}$, et $p_{ij} = P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$

La famille $(Y = y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est un **système complet** d'évènements car :

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} (Y = y_j) = \Omega \text{ et pour } p \neq q,\ (Y = y_p) \cap (Y = y_q) = \varnothing$$

Propriété

Etant données deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, ayant chacune une espérance, et deux réels a et b. L'espérance est application linéaire :

$$E(aX + bY) = \boldsymbol{aE(X) + bE(Y)}$$

Démonstration

En considérant $\varphi(x) = ax$ on voit trivialement que

$$E(aX) = \sum_{n=0}^{\infty} a x_n P(X = x_n) = a \sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n) = aE(X)$$

Il reste à démontrer que $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$. On pose $Z = X + Y$, $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$, $Y(\Omega) = \{y_0, \ldots, y_n, \ldots\}$, et $p_{ij} = P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$

La famille $(Y = y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est un **système complet** d'évènements car :

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} (Y = y_j) = \Omega \text{ et pour } p \neq q,\ (Y = y_p) \cap (Y = y_q) = \varnothing$$

Donc, la famille $\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)_{j \in \mathbb{N}}$ est une **partition** de l'évènement $(X = x_i)$.

Démonstration

Donc, la famille $\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)_{j \in \mathbb{N}}$ est une **partition** de l'évènement $(X = x_i)$.

Démonstration

Donc, la famille $\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)_{j \in \mathbb{N}}$ est une **partition** de l'évènement $(X = x_i)$.

Ainsi, $P(X = x_i) = \sum_{j=0}^{\infty} P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}$

Démonstration

Donc, la famille $\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)_{j \in \mathbb{N}}$ est une **partition** de l'évènement $(X = x_i)$.

Ainsi, $P(X = x_i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i) =$$

Démonstration

Donc, la famille $\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)_{j \in \mathbb{N}}$ est une **partition** de l'évènement $(X = x_i)$.

Ainsi, $P(X = x_i) = \sum_{j=0}^{\infty} P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(x_i \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} \right) =$$

Démonstration

Donc, la famille $\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)_{j \in \mathbb{N}}$ est une **partition** de l'évènement $(X = x_i)$.

Ainsi, $P(X = x_i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \boldsymbol{\sum_{i=0}^{\infty} \left(x_i \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} \right) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} x_i p_{ij}}$$

Démonstration

Donc, la famille $\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ est une **partition** de l'évènement $(X = x_i)$.

Ainsi, $P(X = x_i) = \sum_{j=0}^{\infty} P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(x_i \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} \right) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i p_{ij}$$

$$E(Y) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j P(Y = y_j) =$$

Démonstration

Donc, la famille $\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)_{j \in \mathbb{N}}$ est une **partition** de l'évènement $(X = x_i)$.

Ainsi, $P(X = x_i) = \sum_{j=0}^{\infty} P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(x_i \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} \right) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} x_i p_{ij}$$

$$E(Y) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j P(Y = y_j) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(y_j \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \right) =$$

Démonstration

Donc, la famille $\big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ est une **partition** de l'évènement $(X=x_i)$.

Ainsi, $P(X=x_i)=\sum_{j=0}^{\infty}P\big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\big)=\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}$

$$E(X)=\sum_{i=0}^{\infty}x_iP(X=x_i)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(x_i\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}\right)=\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}x_ip_{ij}$$

$$E(Y)=\sum_{j=0}^{\infty}y_jP(Y=y_j)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(y_j\sum_{i=0}^{\infty}p_{ij}\right)=\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}y_jp_{ij}$$

Démonstration

Donc, la famille $\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)_{j \in \mathbb{N}}$ est une **partition** de l'évènement $(X = x_i)$.

Ainsi, $P(X = x_i) = \sum_{j=0}^{\infty} P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(x_i \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} \right) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} x_i p_{ij}$$

$$E(Y) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j P(Y = y_j) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(y_j \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} \right) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} y_j p_{ij}$$

Par conséquent, $E(X) + E(Y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} (x_i + y_j) p_{ij}$

Démonstration

Par conséquent, $E(X) + E(Y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} (x_i + y_j)p_{ij}$

Démonstration

Par conséquent, $E(X) + E(Y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} (x_i + y_j)p_{ij}$

Pour tout $z \in Z(\Omega)$ posons $I_z = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 / x_i + y_j = z\}$.

Démonstration

Par conséquent, $E(X)+E(Y)=\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}(x_i+y_j)p_{ij}$

Pour tout $z\in Z(\Omega)$ posons $I_z=\left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2/x_i+y_j=z\right\}$. $\left\{I_z\right\}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$.

Démonstration

Par conséquent, $E(X) + E(Y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} (x_i + y_j)p_{ij}$

Pour tout $z \in Z(\Omega)$ posons $I_z = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 / x_i + y_j = z\right\}$. $\left\{I_z\right\}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$.

Ce qui permet d'écrire :

Démonstration

Par conséquent, $E(X)+E(Y)=\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}(x_i+y_j)p_{ij}$

Pour tout $z\in Z(\Omega)$ posons $I_z=\left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2/x_i+y_j=z\right\}$. $\left\{I_z\right\}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$.
Ce qui permet d'écrire :

$$E(X)+E(Y)=\sum_{z\in Z(\Omega)}\left(\sum_{(i,j)\in I_z}(x_i+y_j)p_{ij}\right)=$$

Démonstration

Par conséquent, $E(X)+E(Y)=\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}(x_i+y_j)p_{ij}$

Pour tout $z\in Z(\Omega)$ posons $I_z=\left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2/x_i+y_j=z\right\}$. $\left\{I_z\right\}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$.
Ce qui permet d'écrire :

$$E(X)+E(Y)=\sum_{z\in Z(\Omega)}\left(\sum_{(i,j)\in I_z}(x_i+y_j)p_{ij}\right)=\sum_{z\in Z(\Omega)}\left(\sum_{(i,j)\in I_z}z\times p_{ij}\right)$$

Démonstration

Par conséquent, $E(X) + E(Y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} (x_i + y_j)p_{ij}$

Pour tout $z \in Z(\Omega)$ posons $I_z = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 / x_i + y_j = z\}$. $\{I_z\}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$.
Ce qui permet d'écrire :

$$E(X) + E(Y) = \sum_{z\in Z(\Omega)} \left(\sum_{(i,j)\in I_z} (x_i + y_j)p_{ij} \right) = \sum_{z\in Z(\Omega)} \left(\sum_{(i,j)\in I_z} z \times p_{ij} \right)$$

$$= \sum_{z\in Z(\Omega)} zP(Z = z)$$

Démonstration

Par conséquent, $E(X)+E(Y)=\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}(x_i+y_j)p_{ij}$

Pour tout $z\in Z(\Omega)$ posons $I_z=\left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2/x_i+y_j=z\right\}$. $\left\{I_z\right\}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$.

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
E(X)+E(Y) &= \sum_{z\in Z(\Omega)}\left(\sum_{(i,j)\in I_z}(x_i+y_j)p_{ij}\right) = \sum_{z\in Z(\Omega)}\left(\sum_{(i,j)\in I_z} z\times p_{ij}\right)\\
&= \sum_{z\in Z(\Omega)} zP(Z=z)\\
&= \sum_{z\in Z(\Omega)} zP(X+Y=z) =
\end{aligned}$$

Démonstration

Par conséquent, $E(X)+E(Y)=\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}(x_i+y_j)p_{ij}$

Pour tout $z\in Z(\Omega)$ posons $I_z=\left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2/x_i+y_j=z\right\}$. $\left\{I_z\right\}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$.
Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
E(X)+E(Y) &= \sum_{z\in Z(\Omega)}\left(\sum_{(i,j)\in I_z}(x_i+y_j)p_{ij}\right)=\sum_{z\in Z(\Omega)}\left(\sum_{(i,j)\in I_z}z\times p_{ij}\right)\\
&= \sum_{z\in Z(\Omega)} zP(Z=z)\\
&= \sum_{z\in Z(\Omega)} zP(X+Y=z)=E(X+Y)
\end{aligned}$$

4. Le théorème de Kœnig-Huyghens

4. Le théorème de Kœnig-Huyghens

Soient X une variable aléatoire discrète et a un nombre réel quelconque. Commençons par démontrer l'égalité :

$$E\left((X-a)^2\right) = \boldsymbol{V(X) + \left(E(X) - a\right)^2}$$

4. Le théorème de Kœnig-Huyghens

Soient X une variable aléatoire discrète et a un nombre réel quelconque. Commençons par démontrer l'égalité :

$$E\big((X-a)^2\big) = \boldsymbol{V(X) + \big(E(X)-a\big)^2}$$

Par une ruse dont l'audace n'échappera à personne, nous nous permettrons d'écrire pour tout x_n de Ω :

$$x_n - a = \boldsymbol{x_n - E(X) + E(X) - a}$$

4. Le théorème de Kœnig-Huyghens

Soient X une variable aléatoire discrète et a un nombre réel quelconque. Commençons par démontrer l'égalité :

$$E\big((X-a)^2\big) = \boldsymbol{V(X) + \big(E(X)-a\big)^2}$$

Par une ruse dont l'audace n'échappera à personne, nous nous permettrons d'écrire pour tout x_n de Ω :

$$x_n - a = \boldsymbol{x_n - E(X) + E(X) - a}$$

d'où $\quad (x_n - a)^2 = \big(x_n - E(X)\big)^2 +$

4. Le théorème de Kœnig-Huyghens

Soient X une variable aléatoire discrète et a un nombre réel quelconque. Commençons par démontrer l'égalité :

$$E\big((X-a)^2\big) = \boldsymbol{V(X) + \big(E(X)-a\big)^2}$$

Par une ruse dont l'audace n'échappera à personne, nous nous permettrons d'écrire pour tout x_n de Ω :

$$x_n - a = \boldsymbol{x_n - E(X) + E(X) - a}$$

d'où $\qquad (x_n-a)^2 = \big(x_n - E(X)\big)^2 + \boldsymbol{2\big(x_n - E(X)\big)\big(E(X)-a\big) + \big(E(X)-a\big)^2}$

4. Le théorème de Kœnig-Huyghens

Soient X une variable aléatoire discrète et a un nombre réel quelconque. Commençons par démontrer l'égalité :

$$E\big((X-a)^2\big) = \boldsymbol{V(X) + \big(E(X)-a\big)^2}$$

Par une ruse dont l'audace n'échappera à personne, nous nous permettrons d'écrire pour tout x_n de Ω :

$$x_n - a = \boldsymbol{x_n - E(X) + E(X) - a}$$

d'où $\quad (x_n-a)^2 = \big(x_n - E(X)\big)^2 + \boldsymbol{2\big(x_n - E(X)\big)\big(E(X)-a\big) + \big(E(X)-a\big)^2}$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $P(X = x_n)$ et sommons pour toutes les valeurs de n :

4. Le théorème de Kœnig-Huyghens

Soient X une variable aléatoire discrète et a un nombre réel quelconque. Commençons par démontrer l'égalité :

$$E\big((X-a)^2\big) = \boldsymbol{V(X) + (E(X)-a)^2}$$

Par une ruse dont l'audace n'échappera à personne, nous nous permettrons d'écrire pour tout x_n de Ω :

$$x_n - a = \boldsymbol{x_n - E(X) + E(X) - a}$$

d'où $\quad (x_n - a)^2 = \big(x_n - E(X)\big)^2 + \boldsymbol{2\big(x_n - E(X)\big)\big(E(X)-a\big) + \big(E(X)-a\big)^2}$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $P(X = x_n)$ et sommons pour toutes les valeurs de n :

$$E\big((X-a)^2\big) = V(X) + 2\big(E(X)-a\big)\sum_{n=0}^{\infty}\big(x_n - E(X)\big)P(X = x_n) + \big(E(X)-a\big)^2\sum_{n=0}^{\infty}P(X = x_n)$$

4. Le théorème de Kœnig-Huyghens

Soient X une variable aléatoire discrète et a un nombre réel quelconque. Commençons par démontrer l'égalité :

$$E\big((X-a)^2\big) = \boldsymbol{V(X) + \big(E(X)-a\big)^2}$$

Par une ruse dont l'audace n'échappera à personne, nous nous permettrons d'écrire pour tout x_n de Ω :

$$x_n - a = \boldsymbol{x_n - E(X) + E(X) - a}$$

d'où $\quad (x_n-a)^2 = \big(x_n - E(X)\big)^2 + \boldsymbol{2\big(x_n - E(X)\big)\big(E(X)-a\big) + \big(E(X)-a\big)^2}$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $P(X = x_n)$ et sommons pour toutes les valeurs de n :

$$E\big((X-a)^2\big) = V(X) + 2\big(E(X)-a\big)\sum_{n=0}^{\infty}\big(x_n - E(X)\big)P(X=x_n) + \big(E(X)-a\big)^2\sum_{n=0}^{\infty}P(X=x_n)$$

$$= V(X) + 2\big(E(X)-a\big)\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\big(x_n - E(X)\big)P(X=x_n)}_{\sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X=x_n) - E(X) = 0} + \big(E(X)-a\big)^2\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}P(X=x_n)}_{=1}$$

d'où le résultat.

Ainsi, on vient de démontrer que $E\big((X-a)^2\big) = V(X) + \big(E(X)-a\big)^2$

Ainsi, on vient de démontrer que $E\big((X-a)^2\big) = V(X) + \big(E(X) - a\big)^2$

En particulier pour $a = 0$ on obtient :

VIII. Variables aléatoires réelles discrètes

Ainsi, on vient de démontrer que $E\big((X-a)^2\big) = V(X) + \big(E(X)-a\big)^2$

En particulier pour $a = 0$ on obtient :

Théorème de Kœnig-Huyghens

$V(X) = \boldsymbol{E\big(X^2\big) - E(X)^2}$

VIII. Variables aléatoires réelles discrètes

Ainsi, on vient de démontrer que $E\big((X-a)^2\big) = V(X) + \big(E(X)-a\big)^2$

En particulier pour $a = 0$ on obtient :

Théorème de Kœnig-Huyghens

$V(X) = \boldsymbol{E(X^2) - E(X)^2}$

Corollaire

Soit X une variable aléatoire discrète ayant une variance $V(X)$, et deux nombres réels a et b, alors

$$V(aX+b) = \boldsymbol{a^2 V(X)} \quad \text{et } \sigma(aX+b) = \boldsymbol{|a|\sigma(X)}$$

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »

<u>Préliminaires :</u>

α. Pour $x \neq 1$, calcule $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »

Préliminaires :

α. Pour $x \neq 1$, calcule $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$

$$S_n = \frac{x^{\text{nb termes}} - 1}{x - 1} =$$

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »

Préliminaires :

α. Pour $x \neq 1$, calcule $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$

$$S_n = \frac{x^{\text{nb termes}} - 1}{x - 1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »

Préliminaires :

α. Pour $x \neq 1$, calcule $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$

$$S_n = \frac{x^{\text{nb termes}} - 1}{x - 1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

β. Calcule $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 2^i$.

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »

Préliminaires :

α. Pour $x \neq 1$, calcule $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$

$$S_n = \frac{x^{\text{nb termes}} - 1}{x - 1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

β. Calcule $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 2^i$.

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i$$

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »

Préliminaires :

α. Pour $x \neq 1$, calcule $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$

$$S_n = \frac{x^{\text{nb termes}} - 1}{x - 1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

β. Calcule $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 2^i$.

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$$

$$=$$

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »

Préliminaires :

α. Pour $x \neq 1$, calcule $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$

$$S_n = \frac{x^{\text{nb termes}} - 1}{x - 1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

β. Calcule $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i$.

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$$

$$= \underbrace{1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}}_{?\ \text{termes}}$$

$$=$$

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »

Préliminaires :

α. Pour $x \neq 1$, calcule $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$

$$S_n = \frac{x^{\text{nb termes}} - 1}{x - 1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

β. Calcule $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 2^i$.

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$$

$$= \underbrace{1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}}_{n \text{ termes}}$$

$$=$$

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »

Préliminaires :

α. Pour $x \neq 1$, calcule $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$

$$S_n = \frac{x^{\text{nb termes}} - 1}{x - 1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

β. Calcule $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 2^i$.

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$$

$$= \underbrace{1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}}_{n \text{ termes}}$$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1} =$$

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »

Préliminaires :

α. Pour $x \neq 1$, calcule $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$

$$S_n = \frac{x^{\text{nb termes}} - 1}{x - 1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

β. Calcule $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i$.

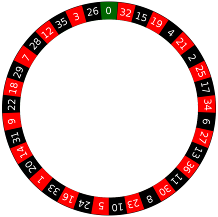
$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$$

$$= \underbrace{1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}}_{n \text{ termes}}$$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

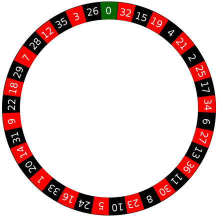
Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »



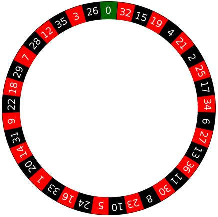
Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire.

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »



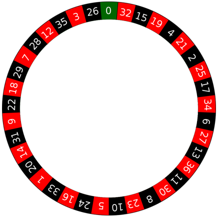
Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise,

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »



Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

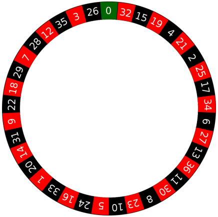
Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »



Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Exercice nº 10: « Rien ne va plus ! »

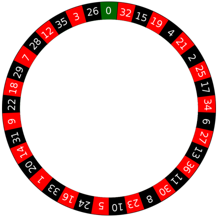


Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Elle mise m€ au départ.

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »

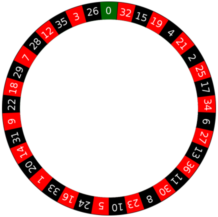


Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ième tour ».

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »

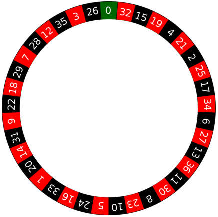


Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ième tour ». Si cet évènement G_i est réalisé, alors Delphine aura perdu à chacun des tours le précédent.

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »



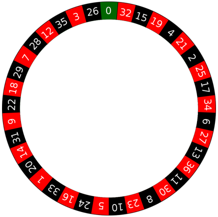
Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ième tour ». Si cet évènement G_i est réalisé, alors Delphine aura perdu à chacun des tours le précédent.

i. Supposons qu'au départ Delphine mise 10 €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au cinquième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux.

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »



Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

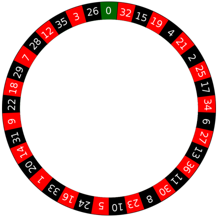
Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ième tour ». Si cet évènement G_i est réalisé, alors Delphine aura perdu à chacun des tours le précédent.

i. Supposons qu'au départ Delphine mise 10 €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au cinquième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux.

mise : 10€

gain total :

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »



Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ième tour ». Si cet évènement G_i est réalisé, alors Delphine aura perdu à chacun des tours le précédent.

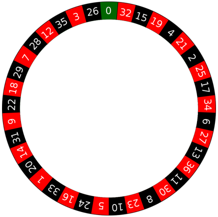
i. Supposons qu'au départ Delphine mise 10 €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au cinquième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux.

mise : 10€

•

gain total : -10€

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »



Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ième tour ». Si cet évènement G_i est réalisé, alors Delphine aura perdu à chacun des tours le précédent.

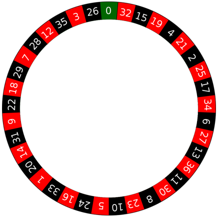
i. Supposons qu'au départ Delphine mise 10 €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au cinquième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux.

mise : 10€

• —— $\overline{G_1}$

gain total : -10€

Exercice nº 10: « Rien ne va plus ! »



Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ième tour ». Si cet évènement G_i est réalisé, alors Delphine aura perdu à chacun des tours le précédent.

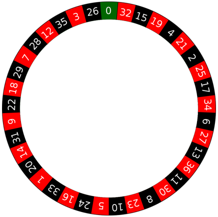
i. Supposons qu'au départ Delphine mise 10 €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au cinquième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux.

mise : $10€$ $\quad$ $20€$

$\bullet$ —— $\overline{G_1}$

gain total : $-10€$

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »



Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ième tour ». Si cet évènement G_i est réalisé, alors Delphine aura perdu à chacun des tours le précédent.

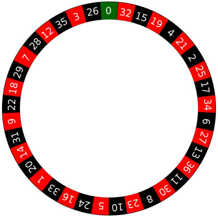
i. Supposons qu'au départ Delphine mise 10 €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au cinquième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux.

mise : 10€ $\quad$ 20€

$\bullet$ —— $\overline{G_1}$

gain total : -10€ $\quad$ -30€

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »



Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ième tour ». Si cet évènement G_i est réalisé, alors Delphine aura perdu à chacun des tours le précédent.

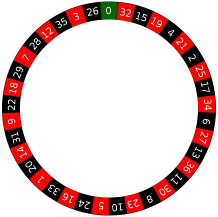
i. Supposons qu'au départ Delphine mise 10 €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au cinquième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux.

mise : 10€ $\quad$ 20€

$\bullet$ —— $\overline{G_1}$ —— $\overline{G_2}$

gain total : -10€ $\quad$ -30€

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »



Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ième tour ». Si cet évènement G_i est réalisé, alors Delphine aura perdu à chacun des tours le précédent.

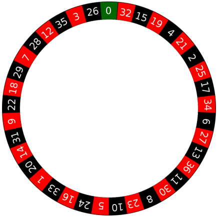
i. Supposons qu'au départ Delphine mise 10 €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au cinquième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux.

mise : $10€$ $\quad 20€ \quad 40€$

$\bullet$ —— $\overline{G_1}$ —— $\overline{G_2}$

gain total : $-10€$ $\quad -30€$

Exercice nº 10: « Rien ne va plus ! »



Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

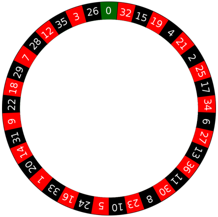
Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ième tour ». Si cet évènement G_i est réalisé, alors Delphine aura perdu à chacun des tours le précédent.

i. Supposons qu'au départ Delphine mise 10 €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au cinquième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux.

mise :	10€	20€	40€
	$\bullet$ ——	$\overline{G_1}$ ——	$\overline{G_2}$
gain total :	-10€	-30€	-70€

Exercice nº 10: « Rien ne va plus ! »



Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

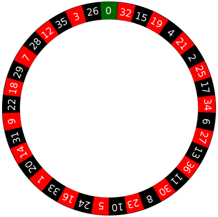
Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ième tour ». Si cet évènement G_i est réalisé, alors Delphine aura perdu à chacun des tours le précédent.

i. Supposons qu'au départ Delphine mise 10 €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au cinquième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux.

mise :	10€	20€	40€	
	$\bullet$ —	$\overline{G_1}$ —	$\overline{G_2}$ —	$\overline{G_3}$
gain total :	-10€	-30€	-70€	

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »



Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

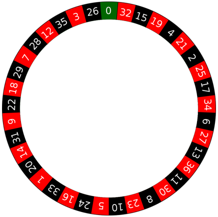
Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ième tour ». Si cet évènement G_i est réalisé, alors Delphine aura perdu à chacun des tours le précédent.

i. Supposons qu'au départ Delphine mise 10 €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au cinquième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux.

mise :	10€	20€	40€	80€
	• ———	$\overline{G_1}$ ———	$\overline{G_2}$ ———	$\overline{G_3}$
gain total :	-10€	-30€	-70€	

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »



Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

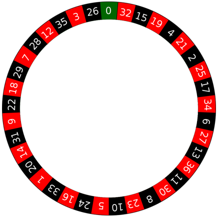
<u>Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :</u>

Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ième tour ». Si cet évènement G_i est réalisé, alors Delphine aura perdu à chacun des tours le précédent.

i. Supposons qu'au départ Delphine mise 10 €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au cinquième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux.

mise :	$10€$	$20€$	$40€$	$80€$
	$\bullet$ ——	$\overline{G_1}$ ——	$\overline{G_2}$ ——	$\overline{G_3}$
gain total :	$-10€$	$-30€$	$-70€$	$-150€$

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »



Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

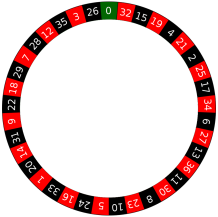
Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ième tour ». Si cet évènement G_i est réalisé, alors Delphine aura perdu à chacun des tours le précédent.

i. Supposons qu'au départ Delphine mise 10 €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au cinquième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux.

mise :	10€	20€	40€	80€	
	•	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$	$\overline{G_4}$
gain total :	-10€	-30€	-70€	-150€	

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »



Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

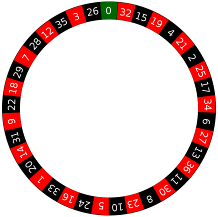
Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ème tour ». Si cet évènement G_i est réalisé, alors Delphine aura perdu à chacun des tours le précédent.

i. Supposons qu'au départ Delphine mise 10 €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au cinquième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux.

mise :	10€	20€	40€	80€	160€
	•	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$	$\overline{G_4}$
gain total :	-10€	-30€	-70€	-150€	

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »



Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

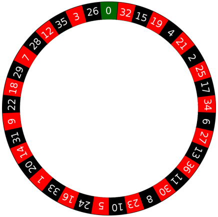
Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ième tour ». Si cet évènement G_i est réalisé, alors Delphine aura perdu à chacun des tours le précédent.

i. Supposons qu'au départ Delphine mise 10 €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au cinquième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux.

mise :	10€	20€	40€	80€	160€
	$\bullet$	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$	$\overline{G_4}$
gain total :	-10€	-30€	-70€	-150€	-310€

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »



Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

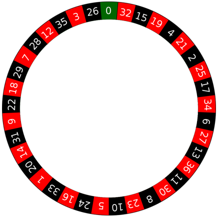
Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ième tour ». Si cet évènement G_i est réalisé, alors Delphine aura perdu à chacun des tours le précédent.

i. Supposons qu'au départ Delphine mise 10 €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au cinquième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux.

mise :	10€	20€	40€	80€	160€	
	• ——	$\overline{G_1}$ ——	$\overline{G_2}$ ——	$\overline{G_3}$ ——	$\overline{G_4}$ ——	G_5
gain total :	-10€	-30€	-70€	-150€	-310€	

Exercice n° 10: « Rien ne va plus ! »



Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ième tour ». Si cet évènement G_i est réalisé, alors Delphine aura perdu à chacun des tours le précédent.

i. Supposons qu'au départ Delphine mise 10 €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au cinquième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux.

mise :	10€	20€	40€	80€	160€	
	•	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$	$\overline{G_4}$	G_5
gain total :	-10€	-30€	-70€	-150€	-310€	10€

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise : m

gain total :

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise : m

•

gain total : $-m$

VIII. Variables aléatoires réelles discrètes

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise : m $2m$

$\bullet$ —— $\overline{G_1}$

gain total : $-m$

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise : m $2m$

$\overline{G_1}$

gain total : $-m$ $-m(2^0 + 2^1)$

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise :	m	$2m$	2^2m
	$\bullet$	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$
gain total :	$-m$	$-m(2^0+2^1)$	

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise :	m	$2m$	$2^2 m$
	$\bullet$ ———	$\overline{G_1}$ ———	$\overline{G_2}$
gain total :	$-m$	$-m(2^0+2^1)$	$-m(2^0+2^1+2^2)$

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise :	m	$2m$	2^2m	2^3m
	$\bullet$	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$
gain total :	$-m$	$-m(2^0+2^1)$	$-m(2^0+2^1+2^2)$	

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise :	m	$2m$	2^2m	2^3m
	$\bullet$	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$
gain total :	$-m$	$-m(2^0+2^1)$	$-m(2^0+2^1+2^2)$	$-m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{3} 2^i\right)}_{=?}$

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise :	m	$2m$	2^2m	2^3m
	$\bullet$	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$
gain total :	$-m$	$-m(2^0+2^1)$	$-m(2^0+2^1+2^2)$	$-m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{3}2^i\right)}_{2^4-1}$

VIII. Variables aléatoires réelles discrètes

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise :	m	$2m$	2^2m	2^3m	
	$\bullet$	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$	$\cdots$
gain total :	$-m$	$-m(2^0+2^1)$	$-m(2^0+2^1+2^2)$	$\underbrace{-m\left(\sum_{i=0}^{3} 2^i\right)}_{2^4-1}$	

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

$$\begin{array}{lccccc}
\text{mise :} & 2^0 m & 2m & 2^2 m & 2^3 m & \\
 & \bullet & \overline{G_1} & \overline{G_2} & \overline{G_3} & \cdots \\
\text{gain total :} & -m & -m(2^0+2^1) & -m(2^0+2^1+2^2) & -m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{3} 2^i\right)}_{2^4-1} &
\end{array}$$

VIII. Variables aléatoires réelles discrètes

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise :	$2^0 m$	$2^1 m$	$2^2 m$	$2^3 m$	
	$\bullet$	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$	$\cdots$
gain total :	$-m$	$-m(2^0+2^1)$	$-m(2^0+2^1+2^2)$	$-m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{3} 2^i\right)}_{2^4-1}$	

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise : $2^0 m$ $\qquad 2^1 m \qquad 2^2 m \qquad 2^3 m$

$$\bullet \text{———} \overline{G_1} \text{———} \overline{G_2} \text{———} \overline{G_3} \text{———} \cdots$$

gain total : $-m \qquad -m(2^0+2^1) \qquad -m(2^0+2^1+2^2) \qquad \underbrace{-m\left(\sum_{i=0}^{3} 2^i\right)}_{2^4-1}$

$$=?$$

$$\cdots \text{———} \overline{G_{n-1}}$$

VIII. Variables aléatoires réelles discrètes

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise :	2^0m	2^1m	2^2m	2^3m	
	$\bullet$	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$	$\cdots$
gain total :	$-m$	$-m(2^0+2^1)$	$-m(2^0+2^1+2^2)$	$-m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{3} 2^i\right)}_{2^4-1}$	

$$2^{n-1}m$$

$$\cdots \;—\; \overline{G_{n-1}}$$

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise :	$2^0 m$	$2^1 m$	$2^2 m$	$2^3 m$	
	$\bullet$ ——	$\overline{G_1}$ ——	$\overline{G_2}$ ——	$\overline{G_3}$ ——	$\cdots$
gain total :	$-m$	$-m(2^0+2^1)$	$-m(2^0+2^1+2^2)$	$-m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{3} 2^i\right)}_{2^4-1}$	

$2^{n-1}m$

$\cdots$ —— $\overline{G_{n-1}}$

$=?$

VIII. Variables aléatoires réelles discrètes

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

$$\begin{array}{lccccccccc}
\text{mise :} & 2^0 m & & 2^1 m & & 2^2 m & & 2^3 m & & \\
 & \bullet & \text{———} & \overline{G_1} & \text{———} & \overline{G_2} & \text{———} & \overline{G_3} & \text{—} & \cdots \\
\text{gain total :} & -m & & -m(2^0+2^1) & & -m(2^0+2^1+2^2) & & -m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{3} 2^i\right)}_{2^4-1} & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
 & 2^{n-1} m \\
\cdots \text{—} & \overline{G_{n-1}} \\
 & -m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^i\right)}_{=?}
\end{array}$$

VIII. Variables aléatoires réelles discrètes

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise :	$2^0 m$	$2^1 m$	$2^2 m$	$2^3 m$	
	$\bullet$	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$	$\cdots$
gain total :	$-m$	$-m(2^0+2^1)$	$-m(2^0+2^1+2^2)$	$-m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{3} 2^i\right)}_{2^4-1}$	

$$\begin{array}{c} 2^{n-1}m \\ \cdots \;—\; \overline{G_{n-1}} \\ -m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^i\right)}_{2^n-1} \end{array}$$

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise :	2^0m	2^1m	2^2m	2^3m	
	$\bullet$	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$	$\cdots$
gain total :	$-m$	$-m(2^0+2^1)$	$-m(2^0+2^1+2^2)$	$-m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{3} 2^i\right)}_{2^4-1}$	

		$2^{n-1}m$	
$\cdots$		$\overline{G_{n-1}}$	G_n
		$-m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^i\right)}_{2^n-1}$	

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

$$
\begin{array}{lccccc}
\text{mise :} & 2^0 m & 2^1 m & 2^2 m & 2^3 m & \\
 & \bullet \text{———} & \overline{G_1} \text{———} & \overline{G_2} \text{———} & \overline{G_3} \text{———} & \cdots \\
\text{gain total :} & -m & -m(2^0+2^1) & -m(2^0+2^1+2^2) & -m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{3} 2^i\right)}_{2^4-1} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & 2^{n-1} m & \\
\cdots \text{———} & \overline{G_{n-1}} \text{———} & G_n \\
 & -m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^i\right)}_{2^n-1} & -m(2^n-1)+2^n m
\end{array}
$$

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise :	$2^0 m$	$2^1 m$	$2^2 m$	$2^3 m$
	$\bullet$	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$ $\cdots$
gain total :	$-m$	$-m(2^0+2^1)$	$-m(2^0+2^1+2^2)$	$-m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{3} 2^i\right)}_{2^4-1}$

$2^{n-1}m$	
$\cdots\ \overline{G_{n-1}}$	G_n
$-m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^i\right)}_{2^n-1}$	$-m(2^n-1)+2^n m$

Son gain final est

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\text{mise :} & 2^0 m & & 2^1 m & & 2^2 m & & 2^3 m & & \\
& \bullet & \text{———} & \overline{G_1} & \text{———} & \overline{G_2} & \text{———} & \overline{G_3} & \text{——} & \cdots \\
\text{gain total :} & -m & & -m(2^0+2^1) & & -m(2^0+2^1+2^2) & & -m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{3} 2^i\right)}_{2^4-1} & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
& & 2^{n-1} m & & \\
\cdots & \text{——} & \overline{G_{n-1}} & \text{———} & G_n \\
& & -m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^i\right)}_{2^n-1} & & -m(2^n-1)+2^n m
\end{array}
$$

Son gain final est $-m\big(2^n-1\big)+2^n m = m$

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise :	2^0m	2^1m	2^2m	2^3m	
	$\bullet$	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$	$\cdots$
gain total :	$-m$	$-m(2^0+2^1)$	$-m(2^0+2^1+2^2)$	$-m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{3} 2^i\right)}_{2^4-1}$	

	$2^{n-1}m$	
$\cdots$	$\overline{G_{n-1}}$	G_n
	$-m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^i\right)}_{2^n-1}$	$\underbrace{-m(2^n-1)+2^n m}_{m}$

Son gain final est $-m\big(2^n-1\big)+2^n m = m$

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise : $2^0 m$ $\quad 2^1 m \quad 2^2 m \quad 2^3 m$

$$\bullet \;\text{———}\; \overline{G_1} \;\text{———}\; \overline{G_2} \;\text{———}\; \overline{G_3} \;\text{———}\; \cdots$$

gain total : $-m$ $\quad -m(2^0+2^1) \quad -m(2^0+2^1+2^2) \quad -m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{3} 2^i\right)}_{2^4-1}$

$$2^{n-1}m$$

$$\cdots \;\text{———}\; \overline{G_{n-1}} \;\text{———}\; G_n$$

$$-m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^i\right)}_{2^n-1} \qquad \underbrace{-m(2^n-1)+2^n m}_{m}$$

Son gain final est $-m(2^n-1)+2^n m = m \geqslant 0$

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

mise : $2^0 m$ — $2^1 m$ — $2^2 m$ — $2^3 m$

$\bullet$ —— $\overline{G_1}$ —— $\overline{G_2}$ —— $\overline{G_3}$ —— $\cdots$

gain total : $-m$ — $-m(2^0+2^1)$ — $-m(2^0+2^1+2^2)$ — $-m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{3} 2^i\right)}_{2^4-1}$

$2^{n-1}m$

$\cdots$ —— $\overline{G_{n-1}}$ —— G_n

$-m\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^i\right)}_{2^n-1}$ — $\underbrace{-m(2^n-1)+2^n m}_{m}$

Son gain final est $-m\big(2^n-1\big)+2^n m = m \geqslant 0$ sa stratégie semble payante.

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

a. Au bout de combien de tours pourrait-elle définitivement perdre ?

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

a. Au bout de combien de tours pourrait-elle définitivement perdre ?

Dans la cas où elle n'aurait plus assez d'argent pour miser le double.

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

a. Au bout de combien de tours pourrait-elle définitivement perdre ?

Dans la cas où elle n'aurait plus assez d'argent pour miser le double.
Au n-ième tour, elle aura perdu $20 \times (2^n - 1)$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

a. Au bout de combien de tours pourrait-elle définitivement perdre ?

Dans la cas où elle n'aurait plus assez d'argent pour miser le double.
Au n-ième tour, elle aura perdu $20 \times (2^n - 1)$ et devra, pour rejouer, miser $2^n \times 20$.

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

a. Au bout de combien de tours pourrait-elle définitivement perdre ?

Dans la cas où elle n'aurait plus assez d'argent pour miser le double.
Au n-ième tour, elle aura perdu $20 \times (2^n - 1)$ et devra, pour rejouer, miser $2^n \times 20$.

$$20 \times (2^n - 1) + 2^n \times 20 \quad > \quad 1500$$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

a. Au bout de combien de tours pourrait-elle définitivement perdre ?

Dans la cas où elle n'aurait plus assez d'argent pour miser le double.
Au n-ième tour, elle aura perdu $20 \times (2^n - 1)$ et devra, pour rejouer, miser $2^n \times 20$.

$$\begin{aligned} 20 \times (2^n - 1) + 2^n \times 20 &> 1500 \\ 20 \times (2^{n+1} - 1) &> 1500 \end{aligned}$$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

a. Au bout de combien de tours pourrait-elle définitivement perdre ?

Dans la cas où elle n'aurait plus assez d'argent pour miser le double.
Au n-ième tour, elle aura perdu $20 \times (2^n - 1)$ et devra, pour rejouer, miser $2^n \times 20$.

$$\begin{aligned} 20 \times (2^n - 1) + 2^n \times 20 &> 1500 \\ 20 \times (2^{n+1} - 1) &> 1500 \\ 2^{n+1} - 1 &> 75 \end{aligned}$$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

a. Au bout de combien de tours pourrait-elle définitivement perdre ?

Dans la cas où elle n'aurait plus assez d'argent pour miser le double.
Au n-ième tour, elle aura perdu $20 \times (2^n - 1)$ et devra, pour rejouer, miser $2^n \times 20$.

$$\begin{aligned}
20 \times (2^n - 1) + 2^n \times 20 &> 1500 \\
20 \times (2^{n+1} - 1) &> 1500 \\
2^{n+1} - 1 &> 75 \\
2^{n+1} &> 76
\end{aligned}$$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

a. Au bout de combien de tours pourrait-elle définitivement perdre ?

Dans la cas où elle n'aurait plus assez d'argent pour miser le double.
Au n-ième tour, elle aura perdu $20 \times (2^n - 1)$ et devra, pour rejouer, miser $2^n \times 20$.

$$\begin{aligned} 20 \times (2^n - 1) + 2^n \times 20 &> 1500 \\ 20 \times (2^{n+1} - 1) &> 1500 \\ 2^{n+1} - 1 &> 75 \\ 2^{n+1} &> 76 \\ (n+1)\ln(2) &> \ln(76) \end{aligned}$$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

a. Au bout de combien de tours pourrait-elle définitivement perdre ?

Dans la cas où elle n'aurait plus assez d'argent pour miser le double.
Au n-ième tour, elle aura perdu $20 \times (2^n - 1)$ et devra, pour rejouer, miser $2^n \times 20$.

$$\begin{aligned}
20 \times (2^n - 1) + 2^n \times 20 &> 1500 \\
20 \times (2^{n+1} - 1) &> 1500 \\
2^{n+1} - 1 &> 75 \\
2^{n+1} &> 76 \\
(n+1)\ln(2) &> \ln(76) \\
n &> \frac{\ln(76)}{\ln(2)} - 1 \simeq 5,2
\end{aligned}$$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

a. Au bout de combien de tours pourrait-elle définitivement perdre ?

Dans la cas où elle n'aurait plus assez d'argent pour miser le double.
Au n-ième tour, elle aura perdu $20 \times (2^n - 1)$ et devra, pour rejouer, miser $2^n \times 20$.

$$\begin{array}{rcl} 20 \times (2^n - 1) + 2^n \times 20 & > & 1500 \\ 20 \times (2^{n+1} - 1) & > & 1500 \\ 2^{n+1} - 1 & > & 75 \\ 2^{n+1} & > & 76 \\ (n+1)\ln(2) & > & \ln(76) \\ n & > & \dfrac{\ln(76)}{\ln(2)} - 1 \simeq 5,2 \end{array}$$

Si elle perd 5 fois de suite, elle n'a plus assez d'argent pour miser à nouveau.

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

   b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise : 20€

gain total :

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise : 20€

•

gain total : -20€

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise : 20€

$\bullet$ —— $\overline{G_1}$

gain total : -20€

VIII. Variables aléatoires réelles discrètes

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise : $20€$ $\qquad$ $40€$

$\bullet$ —— $\overline{G_1}$

gain total : $-20€$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise :	$20€$	$40€$
	$\bullet$ ———	$\overline{G_1}$
gain total :	$-20€$	$-60€$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise : 20€ 40€

$\bullet$ —— $\overline{G_1}$ —— $\overline{G_2}$

gain total : -20€ -60€

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise : 20€ $\quad$ 40€ $\quad$ 80€

$\bullet$ —— $\overline{G_1}$ —— $\overline{G_2}$

gain total : -20€ $\quad$ -60€

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise : $20€$ $\quad$ $40€$ $\quad$ $80€$

$\bullet$ —— $\overline{G_1}$ —— $\overline{G_2}$

gain total : $-20€$ $\quad$ $-60€$ $\quad$ $-140€$

VIII. Variables aléatoires réelles discrètes

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise : $20€$ $\quad 40€ \quad 80€$

$\bullet$ —— $\overline{G_1}$ —— $\overline{G_2}$ —— $\overline{G_3}$

gain total : $-20€ \quad -60€ \quad -140€$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise : $20€$ $\quad 40€ \quad 80€ \quad 160€$

$\bullet$ —— $\overline{G_1}$ —— $\overline{G_2}$ —— $\overline{G_3}$

gain total : $-20€ \quad -60€ \quad -140€$

VIII. Variables aléatoires réelles discrètes

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise :	20€	40€	80€	160€
	$\bullet$ ——	$\overline{G_1}$ ——	$\overline{G_2}$ ——	$\overline{G_3}$
gain total :	-20€	-60€	-140€	-300€

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise : $20€$ $\quad 40€ \quad 80€ \quad 160€$

$$\bullet \;\text{———}\; \overline{G_1} \;\text{———}\; \overline{G_2} \;\text{———}\; \overline{G_3} \;\text{———}\; \overline{G_4}$$

gain total : $-20€ \quad -60€ \quad -140€ \quad -300€$

VIII. Variables aléatoires réelles discrètes

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

   b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise :	20€	40€	80€	160€	320€
	•	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$	$\overline{G_4}$
gain total :	-20€	-60€	-140€	-300€	

VIII. Variables aléatoires réelles discrètes

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise :	$20€$	$40€$	$80€$	$160€$	$320€$
	$\bullet$ —	$\overline{G_1}$ —	$\overline{G_2}$ —	$\overline{G_3}$ —	$\overline{G_4}$
gain total :	$-20€$	$-60€$	$-140€$	$-300€$	$-620€$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise : 20€ 40€ 80€ 160€ 320€

$$\bullet \;——\; \overline{G_1} \;——\; \overline{G_2} \;——\; \overline{G_3} \;——\; \overline{G_4} \;——\; \overline{G_5}$$

gain total : -20€ -60€ -140€ -300€ -620€

VIII. Variables aléatoires réelles discrètes

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

   b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise : $20€$ $40€$ $80€$ $160€$ $320€$ $640€$

$\bullet$ —— $\overline{G_1}$ —— $\overline{G_2}$ —— $\overline{G_3}$ —— $\overline{G_4}$ —— $\overline{G_5}$

gain total : $-20€$ $-60€$ $-140€$ $-300€$ $-620€$

VIII. Variables aléatoires réelles discrètes

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

   b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise :	$20€$	$40€$	$80€$	$160€$	$320€$	$640€$
	$\bullet$	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$	$\overline{G_4}$	$\overline{G_5}$
gain total :	$-20€$	$-60€$	$-140€$	$-300€$	$-620€$	$-1260€$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise :	20€	40€	80€	160€	320€	640€	ne peut
	$\bullet$	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$	$\overline{G_4}$	$\overline{G_5}$	G_6
gain total :	-20€	-60€	-140€	-300€	-620€	-1260€	plus miser

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise :	$20€$	$40€$	$80€$	$160€$	$320€$	$640€$	ne peut
	$\bullet$ ——	$\overline{G_1}$ ——	$\overline{G_2}$ ——	$\overline{G_3}$ ——	$\overline{G_4}$ ——	$\overline{G_5}$ ——	G_6
gain total :	$-20€$	$-60€$	$-140€$	$-300€$	$-620€$	$-1260€$	plus miser

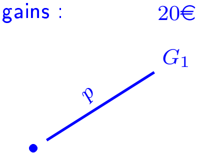
c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise :	20€	40€	80€	160€	320€	640€	ne peut
	•	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$	$\overline{G_4}$	$\overline{G_5}$	G_6
gain total :	-20€	-60€	-140€	-300€	-620€	-1260€	plus miser

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

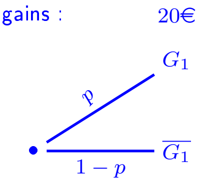


iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise :	$20€$	$40€$	$80€$	$160€$	$320€$	$640€$	ne peut
	$\bullet$	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$	$\overline{G_4}$	$\overline{G_5}$	G_6
gain total :	$-20€$	$-60€$	$-140€$	$-300€$	$-620€$	$-1260€$	plus miser

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.



iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

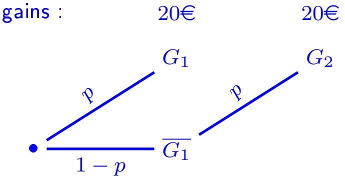
b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

mise : $20€$ $\quad 40€ \quad 80€ \quad 160€ \quad 320€ \quad 640€$ ne peut

$\bullet$ —— $\overline{G_1}$ —— $\overline{G_2}$ —— $\overline{G_3}$ —— $\overline{G_4}$ —— $\overline{G_5}$ —— G_6

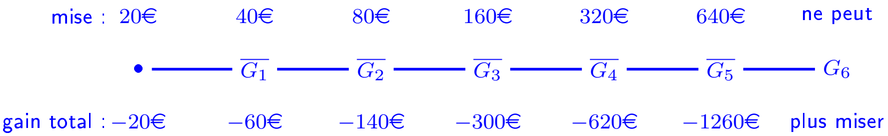
gain total : $-20€ \quad -60€ \quad -140€ \quad -300€ \quad -620€ \quad -1260€$ plus miser

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

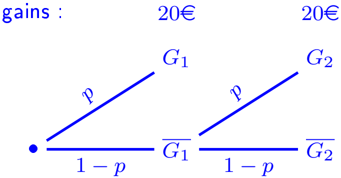


iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.



c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

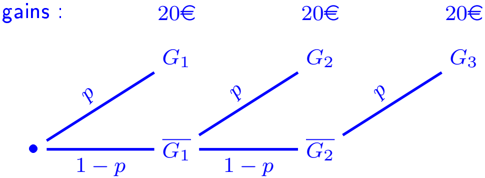


iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

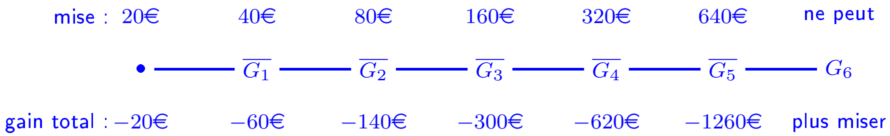
mise :	20€	40€	80€	160€	320€	640€	ne peut
	$\bullet$	$\overline{G_1}$	$\overline{G_2}$	$\overline{G_3}$	$\overline{G_4}$	$\overline{G_5}$	G_6
gain total :	-20€	-60€	-140€	-300€	-620€	-1260€	plus miser

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

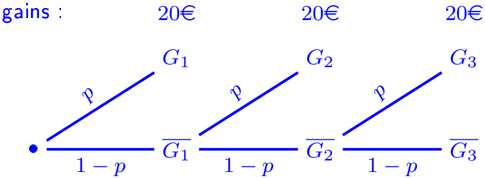


iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

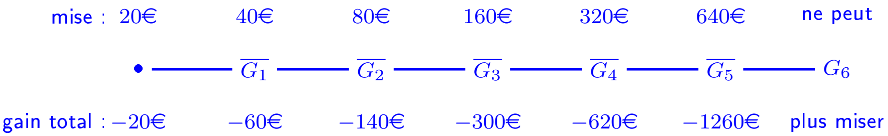


c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

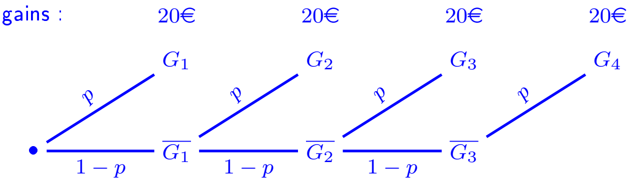


iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

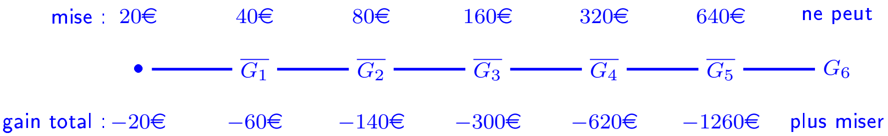


c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

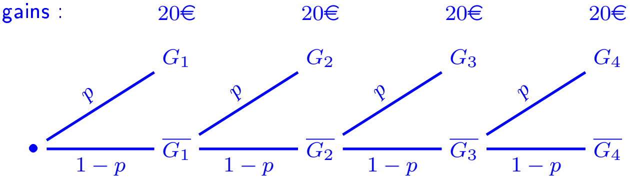


iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

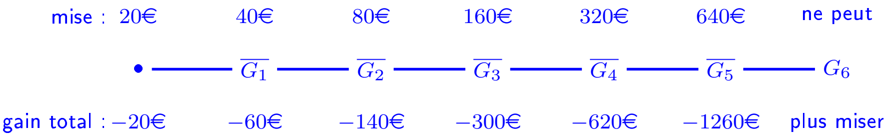


c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

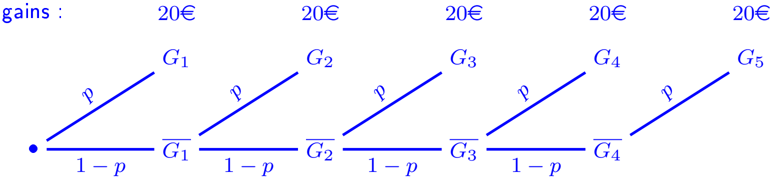


iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

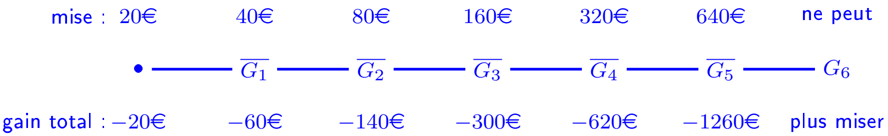


c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

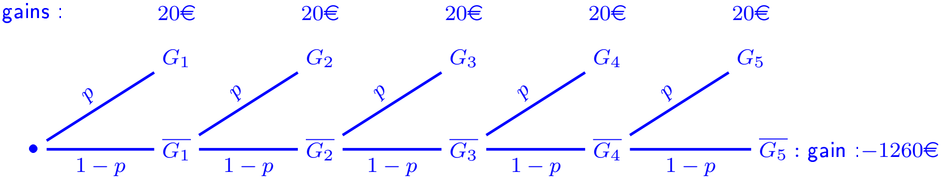


iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.

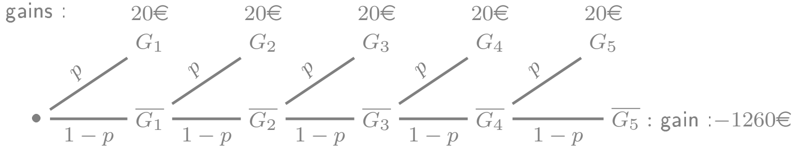


c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.



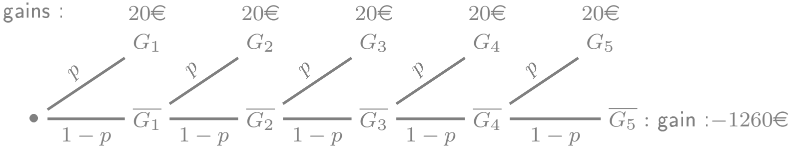
iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

   c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.



iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

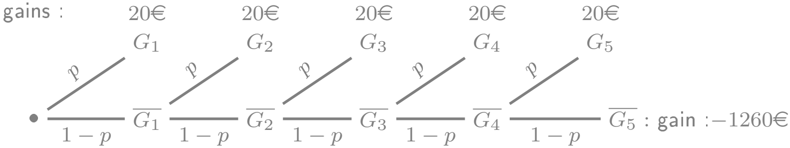
   c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.



$E =$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

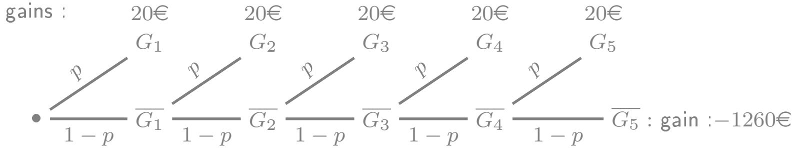
c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.



$$E = 20\underbrace{\left[p + (1-p)p + (1-p)^2p + (1-p)^3p + (1-p)^4p\right]}_{A(p)} - 1260 \times (1-p)^5$$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

   c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

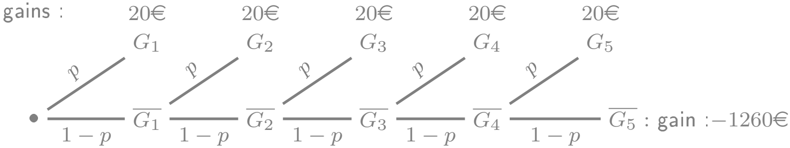


$$E = 20\underbrace{\left[p + (1-p)p + (1-p)^2p + (1-p)^3p + (1-p)^4p\right]}_{A(p)} - 1260 \times (1-p)^5$$

où $A(p) = p\left[1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + (1-p)^4\right] =$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

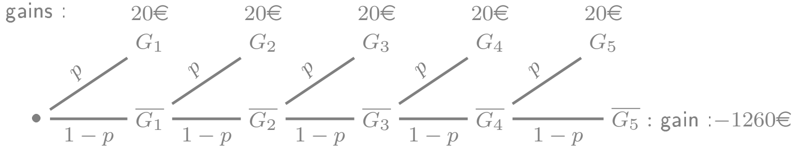


$$E = 20\underbrace{\left[p + (1-p)p + (1-p)^2 p + (1-p)^3 p + (1-p)^4 p\right]}_{A(p)} - 1260 \times (1-p)^5$$

où $A(p) = p\left[1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + (1-p)^4\right] = p\left[\dfrac{(1-p)^5 - 1}{1-p-1}\right]$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.



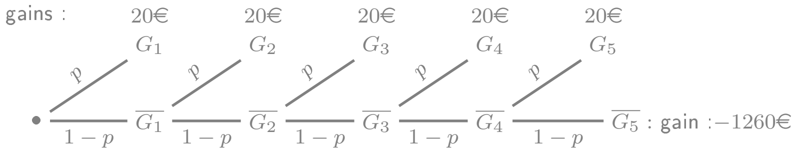
$$E = 20\,\underbrace{\left[p+(1-p)p+(1-p)^2p+(1-p)^3p+(1-p)^4p\right]}_{A(p)} -1260\times(1-p)^5$$

où $A(p) = p\left[1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+(1-p)^4\right] = p\left[\dfrac{(1-p)^5-1}{1-p-1}\right]$

$$= p\left[\frac{(1-p)^5-1}{-p}\right] =$$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.



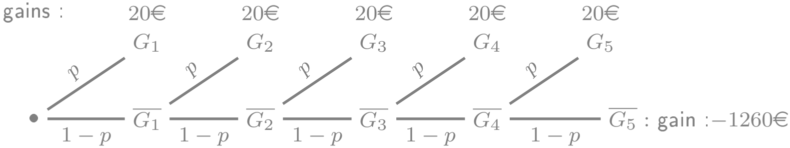
$$E = 20\underbrace{\left[p+(1-p)p+(1-p)^2p+(1-p)^3p+(1-p)^4p\right]}_{A(p)} -1260\times(1-p)^5$$

où $A(p) = p\left[1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+(1-p)^4\right] = p\left[\dfrac{(1-p)^5-1}{1-p-1}\right]$

$$= p\left[\frac{(1-p)^5-1}{-p}\right] = 1-(1-p)^5$$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.



$$E = 20\underbrace{\left[p + (1-p)p + (1-p)^2p + (1-p)^3p + (1-p)^4p\right]}_{A(p)} - 1260 \times (1-p)^5$$

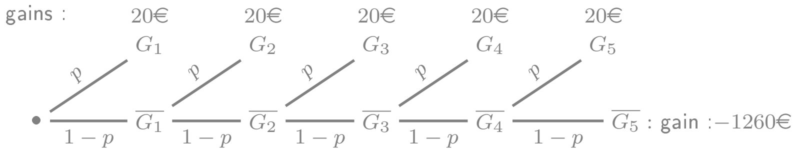
où $A(p) = p\left[1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + (1-p)^4\right] = p\left[\dfrac{(1-p)^5 - 1}{1-p-1}\right]$

$$= p\left[\frac{(1-p)^5 - 1}{-p}\right] = 1 - (1-p)^5$$

Donc, $E = 20 \times \left[1 - (1-p)^5\right] - 1260 \times (1-p)^5 =$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.



$$E = 20\,\underbrace{\left[p + (1-p)p + (1-p)^2p + (1-p)^3p + (1-p)^4p\right]}_{A(p)} - 1260 \times (1-p)^5$$

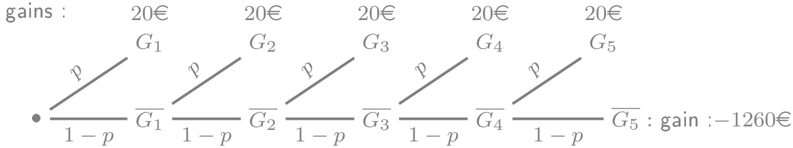
où $A(p) = p\left[1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + (1-p)^4\right] = p\left[\dfrac{(1-p)^5 - 1}{1-p-1}\right]$

$$= p\left[\frac{(1-p)^5 - 1}{-p}\right] = 1 - (1-p)^5$$

Donc, $E = 20 \times \left[1 - (1-p)^5\right] - 1260 \times (1-p)^5 = 20 - 1280 \times (1-p)^5$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.



$$E = 20\underbrace{\left[p + (1-p)p + (1-p)^2p + (1-p)^3p + (1-p)^4p\right]}_{A(p)} - 1260 \times (1-p)^5$$

où $A(p) = p\left[1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + (1-p)^4\right] = p\left[\dfrac{(1-p)^5 - 1}{1-p-1}\right]$

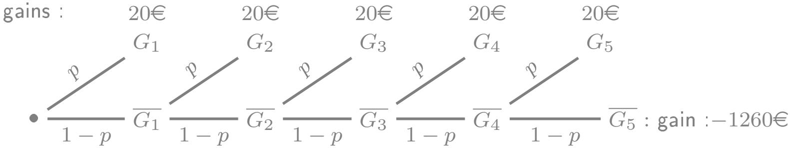
$$= p\left[\frac{(1-p)^5 - 1}{-p}\right] = 1 - (1-p)^5$$

Donc, $E = 20 \times \left[1 - (1-p)^5\right] - 1260 \times (1-p)^5 = 20 - 1280 \times (1-p)^5$

D'après l'énoncé, $p = \dfrac{18}{37}$, ce qui donne $E \simeq$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.



$$E = 20\underbrace{\left[p+(1-p)p+(1-p)^2p+(1-p)^3p+(1-p)^4p\right]}_{A(p)} - 1260\times(1-p)^5$$

où $A(p) = p\left[1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+(1-p)^4\right] = p\left[\dfrac{(1-p)^5-1}{1-p-1}\right]$

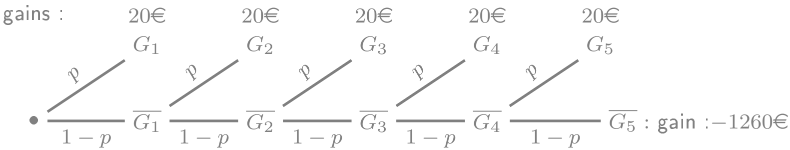
$$= p\left[\frac{(1-p)^5-1}{-p}\right] = 1-(1-p)^5$$

Donc, $E = 20\times\left[1-(1-p)^5\right] - 1260\times(1-p)^5 = 20 - 1280\times(1-p)^5$

D'après l'énoncé, $p = \dfrac{18}{37}$, ce qui donne $E \simeq\ -25,71$€

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.



$$E = 20\underbrace{\left[p + (1-p)p + (1-p)^2p + (1-p)^3p + (1-p)^4p\right]}_{A(p)} -1260 \times (1-p)^5$$

où $A(p) = p\left[1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + (1-p)^4\right] = p\left[\dfrac{(1-p)^5-1}{1-p-1}\right]$

$$= p\left[\frac{(1-p)^5-1}{-p}\right] = 1-(1-p)^5$$

Donc, $E = 20 \times \left[1-(1-p)^5\right] - 1260 \times (1-p)^5 = 20 - 1280 \times (1-p)^5$

D'après l'énoncé, $p = \dfrac{18}{37}$, ce qui donne $E \simeq -25,71$€

Delphine peut espérer perdre $25,71$€

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

Donc, $E = 20 \times \left[1 - (1-p)^5\right] - 1260 \times (1-p)^5 =$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

Donc, $E = 20 \times \left[1 - (1-p)^5\right] - 1260 \times (1-p)^5 = 20 - 1280 \times (1-p)^5$

D'après l'énoncé, $p = \dfrac{18}{37}$, ce qui donne $E \simeq -25,71$€

Delphine peut espérer perdre $25,71$€

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

Donc, $E = 20 \times \left[1 - (1-p)^5\right] - 1260 \times (1-p)^5 = 20 - 1280 \times (1-p)^5$

D'après l'énoncé, $p = \dfrac{18}{37}$, ce qui donne $E \simeq -25,71$€

Delphine peut espérer perdre $25,71$€

Calcul de l'écart-type :

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

Donc, $E = 20 \times \left[1 - (1-p)^5\right] - 1260 \times (1-p)^5 = 20 - 1280 \times (1-p)^5$

D'après l'énoncé, $p = \dfrac{18}{37}$, ce qui donne $E \simeq -25,71$€

Delphine peut espérer perdre $25,71$€

Calcul de l'écart-type :

On commence par calculer la variance : $V(X) =$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

Donc, $E = 20 \times \left[1-(1-p)^5\right] - 1260 \times (1-p)^5 = 20 - 1280 \times (1-p)^5$

D'après l'énoncé, $p = \dfrac{18}{37}$, ce qui donne $E \simeq -25,71$€

Delphine peut espérer perdre $25,71$€

Calcul de l'écart-type :

On commence par calculer la variance : $V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

Donc, $E = 20 \times \left[1 - (1-p)^5\right] - 1260 \times (1-p)^5 = 20 - 1280 \times (1-p)^5$

D'après l'énoncé, $p = \dfrac{18}{37}$, ce qui donne $E \simeq -25,71$€

Delphine peut espérer perdre $25,71$€

Calcul de l'écart-type :

On commence par calculer la variance : $V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$

$E\left(X^2\right) =$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

Donc, $E = 20 \times \left[1 - (1-p)^5\right] - 1260 \times (1-p)^5 = 20 - 1280 \times (1-p)^5$

D'après l'énoncé, $p = \dfrac{18}{37}$, ce qui donne $E \simeq -25,71$€

Delphine peut espérer perdre $25,71$€

Calcul de l'écart-type :

On commence par calculer la variance : $V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$

$$E\left(X^2\right) = 20^2 \times \left[1 - (1-p)^5\right] + (-1260)^2 \times (1-p)^5 \simeq$$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

Donc, $E = 20 \times \left[1-(1-p)^5\right] - 1260 \times (1-p)^5 = 20 - 1280 \times (1-p)^5$

D'après l'énoncé, $p = \dfrac{18}{37}$, ce qui donne $E \simeq -25,71$€

Delphine peut espérer perdre $25,71$€

Calcul de l'écart-type :

On commence par calculer la variance : $V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$

$$E\left(X^2\right) = 20^2 \times \left[1-(1-p)^5\right] + (-1260)^2 \times (1-p)^5 \simeq 57074,94\text{€}^2$$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

Donc, $E = 20 \times \left[1-(1-p)^5\right] - 1260 \times (1-p)^5 = 20 - 1280 \times (1-p)^5$

D'après l'énoncé, $p = \dfrac{18}{37}$, ce qui donne $E \simeq -25,71$€

Delphine peut espérer perdre $25,71$€

Calcul de l'écart-type :

On commence par calculer la variance : $V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$

$E\left(X^2\right) = 20^2 \times \left[1-(1-p)^5\right] + (-1260)^2 \times (1-p)^5 \simeq 57074,94$€^{2}

$V(X) = 57074,94 - (-25,71)^2 \simeq$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

Donc, $E = 20 \times \left[1 - (1-p)^5\right] - 1260 \times (1-p)^5 = 20 - 1280 \times (1-p)^5$

D'après l'énoncé, $p = \dfrac{18}{37}$, ce qui donne $E \simeq -25,71$€

Delphine peut espérer perdre $25,71$€

Calcul de l'écart-type :

On commence par calculer la variance : $V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$

$E\left(X^2\right) = 20^2 \times \left[1 - (1-p)^5\right] + (-1260)^2 \times (1-p)^5 \simeq 57074,94€^2$

$V(X) = 57074,94 - (-25,71)^2 \simeq 56414€^2$ et donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.

Donc, $E = 20 \times \left[1-(1-p)^5\right] - 1260 \times (1-p)^5 = 20 - 1280 \times (1-p)^5$

D'après l'énoncé, $p = \dfrac{18}{37}$, ce qui donne $E \simeq -25,71$€

Delphine peut espérer perdre $25,71$€

Calcul de l'écart-type :

On commence par calculer la variance : $V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$

$$E\left(X^2\right) = 20^2 \times \left[1-(1-p)^5\right] + (-1260)^2 \times (1-p)^5 \simeq 57074,94\text{€}^2$$

$V(X) = 57074,94 - (-25,71)^2 \simeq 56414\text{€}^2$ et donc $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 238\text{€}}$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

   d. Pour quelles valeurs de p, l'espérance de Delphine est-elle positive ?

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

   d. Pour quelles valeurs de p, l'espérance de Delphine est-elle positive ?

$$20 - 1280 \times (1-p)^5 \quad \geqslant \quad 0$$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

d. Pour quelles valeurs de p, l'espérance de Delphine est-elle positive ?

$$\begin{aligned} 20 - 1280 \times (1-p)^5 &\geqslant 0 \\ -1280 \times (1-p)^5 &\geqslant -20 \end{aligned}$$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

d. Pour quelles valeurs de p, l'espérance de Delphine est-elle positive ?

$$\begin{aligned} 20 - 1280 \times (1-p)^5 &\geqslant 0 \\ -1280 \times (1-p)^5 &\geqslant -20 \\ (1-p)^5 &\leqslant \frac{-20}{-1280} = \end{aligned}$$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

d. Pour quelles valeurs de p, l'espérance de Delphine est-elle positive ?

$$\begin{aligned} 20 - 1280 \times (1-p)^5 &\geqslant 0 \\ -1280 \times (1-p)^5 &\geqslant -20 \\ (1-p)^5 &\leqslant \frac{-20}{-1280} = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

d. Pour quelles valeurs de p, l'espérance de Delphine est-elle positive ?

$$\begin{aligned}
20 - 1280 \times (1-p)^5 &\geqslant 0 \\
-1280 \times (1-p)^5 &\geqslant -20 \\
(1-p)^5 &\leqslant \frac{-20}{-1280} = \frac{1}{64} \\
1 - p &\leqslant \sqrt[5]{\frac{1}{64}}
\end{aligned}$$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

d. Pour quelles valeurs de p, l'espérance de Delphine est-elle positive ?

$$\begin{aligned}
20 - 1280 \times (1-p)^5 &\geqslant 0 \\
-1280 \times (1-p)^5 &\geqslant -20 \\
(1-p)^5 &\leqslant \frac{-20}{-1280} = \frac{1}{64} \\
1-p &\leqslant \sqrt[5]{\frac{1}{64}} \\
p &\geqslant 1 - \sqrt[5]{\frac{1}{64}} \simeq
\end{aligned}$$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

d. Pour quelles valeurs de p, l'espérance de Delphine est-elle positive ?

$$\begin{aligned}
20 - 1280 \times (1-p)^5 &\geqslant 0 \\
-1280 \times (1-p)^5 &\geqslant -20 \\
(1-p)^5 &\leqslant \frac{-20}{-1280} = \frac{1}{64} \\
1-p &\leqslant \sqrt[5]{\frac{1}{64}} \\
p &\geqslant 1 - \sqrt[5]{\frac{1}{64}} \simeq 0,56
\end{aligned}$$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

d. Pour quelles valeurs de p, l'espérance de Delphine est-elle positive ?

$$\begin{aligned}
20 - 1280 \times (1-p)^5 &\geqslant 0 \\
-1280 \times (1-p)^5 &\geqslant -20 \\
(1-p)^5 &\leqslant \frac{-20}{-1280} = \frac{1}{64} \\
1 - p &\leqslant \sqrt[5]{\frac{1}{64}} \\
p &\geqslant 1 - \sqrt[5]{\frac{1}{64}} \simeq 0,56
\end{aligned}$$

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

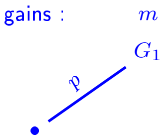
d. Pour quelles valeurs de p, l'espérance de Delphine est-elle positive ?

$$\begin{aligned}
20 - 1280 \times (1-p)^5 &\geqslant 0 \\
-1280 \times (1-p)^5 &\geqslant -20 \\
(1-p)^5 &\leqslant \frac{-20}{-1280} = \frac{1}{64} \\
1-p &\leqslant \sqrt[5]{\frac{1}{64}} \\
p &\geqslant 1 - \sqrt[5]{\frac{1}{64}} \simeq 0,56
\end{aligned}$$

Même si « jouer la couleur » était aussi favorable au joueur qu'au casino, la stratégie de Delphine serait un échec.

iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.

iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.



$$E = m\left[p+(1-p)p+(1-p)^2p+(1-p)^3p+\ldots+(1-p)^{n-1}p\right] - m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$= mp\,\underbrace{\left[1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+\ldots+(1-p)^{n-1}p\right]}_{=?} - m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

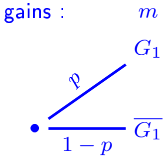
$$= m\left[1-(1-p)^n\right] - m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$= m\left[1-(1-p)^n-(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)\right]$$

$$= m\left[1-(1-p)^n\left(1+\left(2^{n+1}-1\right)\right)\right]$$

$$= m\left[1-(1-p)^n\times 2^{n+1}\right]$$

iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.



$$E = m\big[p+(1-p)p+(1-p)^2p+(1-p)^3p+\ldots+(1-p)^{n-1}p\big]-m\times(1-p)^n\times\big(2^{n+1}-1\big)$$

$$= mp\,\underbrace{\big[1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+\ldots+(1-p)^{n-1}p\big]}_{=?}-m\times(1-p)^n\times\big(2^{n+1}-1\big)$$

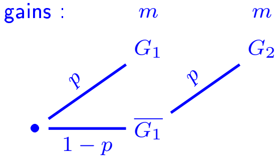
$$= m\big[1-(1-p)^n\big]-m\times(1-p)^n\times\big(2^{n+1}-1\big)$$

$$= m\big[1-(1-p)^n-(1-p)^n\times\big(2^{n+1}-1\big)\big]$$

$$= m\Big[1-(1-p)^n\Big(1+\big(2^{n+1}-1\big)\Big)\Big]$$

$$= m\Big[1-(1-p)^n\times 2^{n+1}\Big]$$

iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.



$$E = m\big[p+(1-p)p+(1-p)^2p+(1-p)^3p+\ldots+(1-p)^{n-1}p\big] - m\times(1-p)^n\times\big(2^{n+1}-1\big)$$

$$= mp\,\underbrace{\big[1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+\ldots+(1-p)^{n-1}p\big]}_{=?} - m\times(1-p)^n\times\big(2^{n+1}-1\big)$$

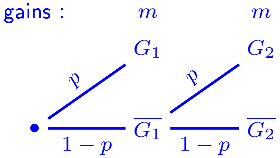
$$= m\big[1-(1-p)^n\big] - m\times(1-p)^n\times\big(2^{n+1}-1\big)$$

$$= m\big[1-(1-p)^n-(1-p)^n\times\big(2^{n+1}-1\big)\big]$$

$$= m\Big[1-(1-p)^n\Big(1+\big(2^{n+1}-1\big)\Big)\Big]$$

$$= m\Big[1-(1-p)^n\times 2^{n+1}\Big]$$

iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.



$$E = m\left[p+(1-p)p+(1-p)^2p+(1-p)^3p+\ldots+(1-p)^{n-1}p\right] - m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$= mp\,\underbrace{\left[1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+\ldots+(1-p)^{n-1}p\right]}_{=?} - m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

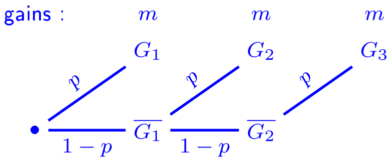
$$= m\left[1-(1-p)^n\right] - m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$= m\left[1-(1-p)^n-(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)\right]$$

$$= m\left[1-(1-p)^n\left(1+\left(2^{n+1}-1\right)\right)\right]$$

$$= m\left[1-(1-p)^n\times 2^{n+1}\right]$$

iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.



$$E = m\big[p+(1-p)p+(1-p)^2p+(1-p)^3p+\ldots+(1-p)^{n-1}p\big]-m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$= mp\,\underbrace{\left[1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+\ldots+(1-p)^{n-1}p\right]}_{=?} - m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

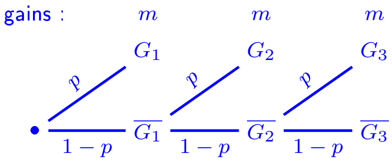
$$= m\big[1-(1-p)^n\big]-m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$= m\big[1-(1-p)^n-(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)\big]$$

$$= m\left[1-(1-p)^n\left(1+\left(2^{n+1}-1\right)\right)\right]$$

$$= m\left[1-(1-p)^n\times 2^{n+1}\right]$$

iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.



$$E = m\big[p + (1-p)p + (1-p)^2 p + (1-p)^3 p + \ldots + (1-p)^{n-1}p\big] - m \times (1-p)^n \times \big(2^{n+1}-1\big)$$

$$= mp\,\underbrace{\left[1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \ldots + (1-p)^{n-1}p\right]}_{=?} - m \times (1-p)^n \times \big(2^{n+1}-1\big)$$

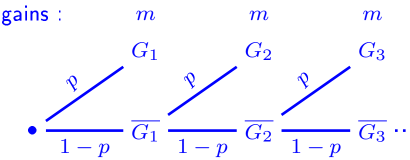
$$= m\big[1 - (1-p)^n\big] - m \times (1-p)^n \times \big(2^{n+1}-1\big)$$

$$= m\big[1 - (1-p)^n - (1-p)^n \times \big(2^{n+1}-1\big)\big]$$

$$= m\Big[1 - (1-p)^n\Big(1 + \big(2^{n+1}-1\big)\Big)\Big]$$

$$= m\Big[1 - (1-p)^n \times 2^{n+1}\Big]$$

iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.



$$E = m\left[p + (1-p)p + (1-p)^2p + (1-p)^3p + \ldots + (1-p)^{n-1}p\right] - m \times (1-p)^n \times \left(2^{n+1} - 1\right)$$

$$= mp\,\underbrace{\left[1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \ldots + (1-p)^{n-1}p\right]}_{=?} - m \times (1-p)^n \times \left(2^{n+1} - 1\right)$$

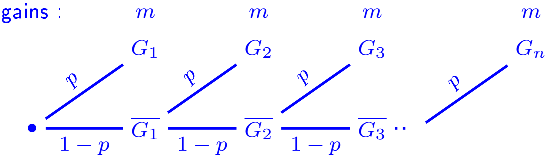
$$= m\left[1 - (1-p)^n\right] - m \times (1-p)^n \times \left(2^{n+1} - 1\right)$$

$$= m\left[1 - (1-p)^n - (1-p)^n \times \left(2^{n+1} - 1\right)\right]$$

$$= m\left[1 - (1-p)^n\left(1 + \left(2^{n+1} - 1\right)\right)\right]$$

$$= m\left[1 - (1-p)^n \times 2^{n+1}\right]$$

iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.



$$E = m\big[p+(1-p)p+(1-p)^2p+(1-p)^3p+\ldots+(1-p)^{n-1}p\big] - m\times(1-p)^n\times\big(2^{n+1}-1\big)$$

$$= mp\,\underbrace{\left[1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+\ldots+(1-p)^{n-1}p\right]}_{=?} - m\times(1-p)^n\times\big(2^{n+1}-1\big)$$

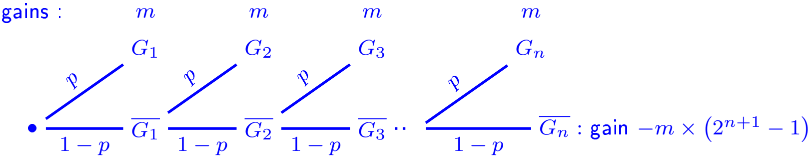
$$= m\big[1-(1-p)^n\big] - m\times(1-p)^n\times\big(2^{n+1}-1\big)$$

$$= m\big[1-(1-p)^n-(1-p)^n\times\big(2^{n+1}-1\big)\big]$$

$$= m\Big[1-(1-p)^n\Big(1+\big(2^{n+1}-1\big)\Big)\Big]$$

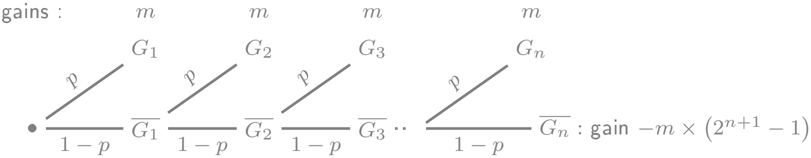
$$= m\Big[1-(1-p)^n\times 2^{n+1}\Big]$$

iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.



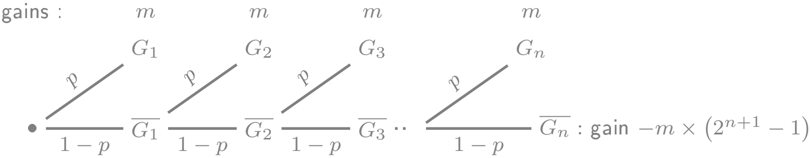
VIII. Variables aléatoires réelles discrètes

iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.



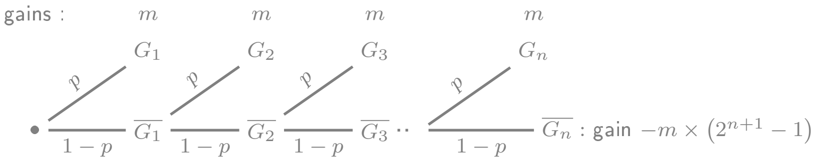
$E =$

iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.



$$E = m\left[p + (1-p)p + (1-p)^2 p + (1-p)^3 p + \ldots + (1-p)^{n-1} p\right] - m \times (1-p)^n \times \left(2^{n+1}-1\right)$$

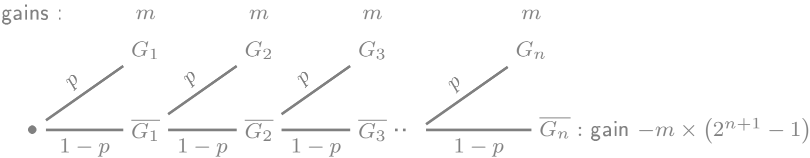
iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.



$$E = m\left[p + (1-p)p + (1-p)^2 p + (1-p)^3 p + \ldots + (1-p)^{n-1} p\right] - m \times (1-p)^n \times \left(2^{n+1}-1\right)$$

$$= mp\,\underbrace{\left[1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \ldots + (1-p)^{n-1} p\right]}_{=?} - m \times (1-p)^n \times \left(2^{n+1}-1\right)$$

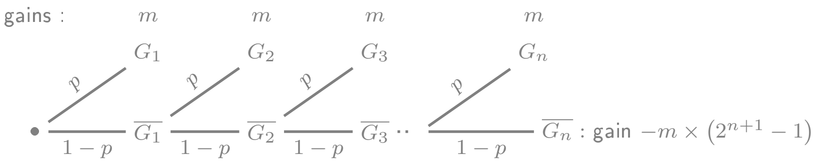
iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.



$$E = m\left[p+(1-p)p+(1-p)^2p+(1-p)^3p+\ldots+(1-p)^{n-1}p\right]-m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$= mp\underbrace{\left[1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+\ldots+(1-p)^{n-1}p\right]}_{=\frac{(1-p)^n-1}{1-p-1}=}-m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

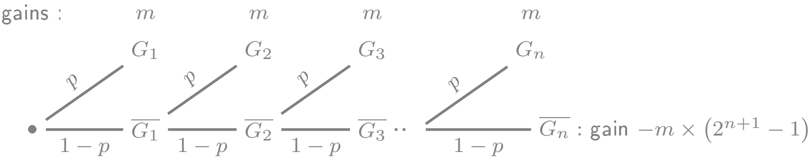
iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.



$$E = m\left[p+(1-p)p+(1-p)^2p+(1-p)^3p+\ldots+(1-p)^{n-1}p\right]-m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$= mp\underbrace{\left[1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+\ldots+(1-p)^{n-1}p\right]}_{=\frac{(1-p)^n-1}{1-p-1}=\frac{1-(1-p)^n}{p}} -m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.

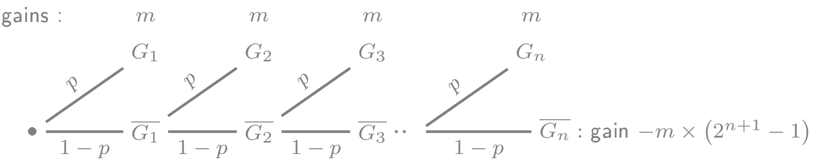


$$E = m\left[p+(1-p)p+(1-p)^2p+(1-p)^3p+\ldots+(1-p)^{n-1}p\right]-m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$= mp\underbrace{\left[1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+\ldots+(1-p)^{n-1}p\right]}_{=\dfrac{(1-p)^n-1}{1-p-1}=\dfrac{1-(1-p)^n}{p}}-m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$= m\left[1-(1-p)^n\right]-m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.



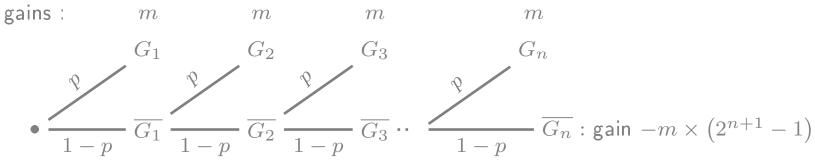
$$E = m\big[p + (1-p)p + (1-p)^2 p + (1-p)^3 p + \ldots + (1-p)^{n-1} p\big] - m \times (1-p)^n \times \left(2^{n+1} - 1\right)$$

$$= mp \underbrace{\left[1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \ldots + (1-p)^{n-1} p\right]}_{= \frac{(1-p)^n - 1}{1-p-1} = \frac{1-(1-p)^n}{p}} - m \times (1-p)^n \times \left(2^{n+1} - 1\right)$$

$$= m\big[1 - (1-p)^n\big] - m \times (1-p)^n \times \left(2^{n+1} - 1\right)$$

$$= m\Big[1 - (1-p)^n - (1-p)^n \times \left(2^{n+1} - 1\right)\Big]$$

iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.



$$E = m\left[p+(1-p)p+(1-p)^2p+(1-p)^3p+\ldots+(1-p)^{n-1}p\right] - m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

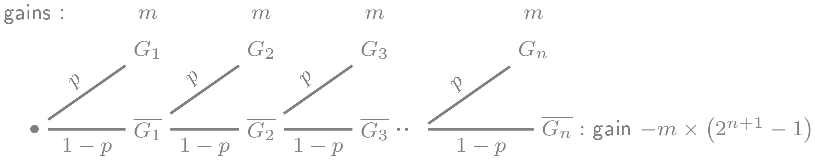
$$= mp\underbrace{\left[1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+\ldots+(1-p)^{n-1}p\right]}_{=\dfrac{(1-p)^n-1}{1-p-1}=\dfrac{1-(1-p)^n}{p}} - m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$= m\left[1-(1-p)^n\right] - m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$= m\left[1-(1-p)^n-(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)\right]$$

$$= m\left[1-(1-p)^n\left(1+\left(2^{n+1}-1\right)\right)\right]$$

iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.



$$E = m\left[p+(1-p)p+(1-p)^2p+(1-p)^3p+\ldots+(1-p)^{n-1}p\right] - m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$= mp\,\underbrace{\left[1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+\ldots+(1-p)^{n-1}p\right]}_{=\frac{(1-p)^n-1}{1-p-1}=\frac{1-(1-p)^n}{p}} - m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$= m\left[1-(1-p)^n\right] - m\times(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$= m\left[1-(1-p)^n-(1-p)^n\times\left(2^{n+1}-1\right)\right]$$

$$= m\left[1-(1-p)^n\left(1+\left(2^{n+1}-1\right)\right)\right]$$

$$= m\left[1-(1-p)^n\times 2^{n+1}\right]$$

v. Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle positive ?

v. Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle positive ?

$$1-(1-p)^n \times 2^{n+1} \quad \geqslant \quad 0$$

v. Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle positive ?

$$\begin{aligned} 1-(1-p)^n \times 2^{n+1} &\geqslant 0 \\ 1-\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

v. Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle positive ?

$$\begin{aligned} 1-(1-p)^n \times 2^{n+1} &\geqslant 0 \\ 1-\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\geqslant 0 \\ \left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\leqslant 1 \end{aligned}$$

v. Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle positive ?

$$\begin{aligned}
1-(1-p)^n \times 2^{n+1} &\geqslant 0\\
1-\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\geqslant 0\\
\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\leqslant 1\\
\left[2\times(1-p)\right]^n &\leqslant \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

v. Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle positive ?

$$\begin{aligned}
1-(1-p)^n \times 2^{n+1} &\geqslant 0 \\
1-\left[2 \times (1-p)\right]^n \times 2 &\geqslant 0 \\
\left[2 \times (1-p)\right]^n \times 2 &\leqslant 1 \\
\left[2 \times (1-p)\right]^n &\leqslant \frac{1}{2} \\
2 \times (1-p) &\leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

v. Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle positive ?

$$\begin{aligned}
1-(1-p)^n \times 2^{n+1} &\geqslant 0 \\
1-\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\geqslant 0 \\
\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\leqslant 1 \\
\left[2\times(1-p)\right]^n &\leqslant \frac{1}{2} \\
2\times(1-p) &\leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \\
p &\geqslant 1-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

v. Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle positive ?

$$\begin{aligned}
1-(1-p)^n \times 2^{n+1} &\geqslant 0\\
1-\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\geqslant 0\\
\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\leqslant 1\\
\left[2\times(1-p)\right]^n &\leqslant \frac{1}{2}\\
2\times(1-p) &\leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{2}}\\
p &\geqslant 1-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

vi. La stratégie de Delphine peut-elle être gagnante ?

v. Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle positive ?

$$\begin{aligned} 1-(1-p)^n \times 2^{n+1} &\geqslant 0 \\ 1-\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\geqslant 0 \\ \left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\leqslant 1 \\ \left[2\times(1-p)\right]^n &\leqslant \frac{1}{2} \\ 2\times(1-p) &\leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \\ p &\geqslant 1-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

vi. La stratégie de Delphine peut-elle être gagnante ?

$$-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}} =$$

v. Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle positive ?

$$\begin{aligned}
1-(1-p)^n \times 2^{n+1} &\geqslant 0\\
1-\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\geqslant 0\\
\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\leqslant 1\\
\left[2\times(1-p)\right]^n &\leqslant \frac{1}{2}\\
2\times(1-p) &\leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{2}}\\
p &\geqslant 1-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

vi. La stratégie de Delphine peut-elle être gagnante ?

$$-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{2}\right)} =$$

v. Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle positive ?

$$\begin{aligned}
1-(1-p)^n \times 2^{n+1} &\geqslant 0\\
1-\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\geqslant 0\\
\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\leqslant 1\\
\left[2\times(1-p)\right]^n &\leqslant \frac{1}{2}\\
2\times(1-p) &\leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{2}}\\
p &\geqslant 1-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

vi. La stratégie de Delphine peut-elle être gagnante ?

$$-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(2)} >$$

v. Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle positive ?

$$\begin{aligned}
1-(1-p)^n \times 2^{n+1} &\geqslant 0 \\
1-\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\geqslant 0 \\
\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\leqslant 1 \\
\left[2\times(1-p)\right]^n &\leqslant \frac{1}{2} \\
2\times(1-p) &\leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \\
p &\geqslant 1-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

vi. La stratégie de Delphine peut-elle être gagnante ?

$$-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(2)} > \frac{1}{2}$$

v. Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle positive ?

$$\begin{aligned}
1-(1-p)^n\times 2^{n+1} &\geqslant 0\\
1-\left[2\times(1-p)\right]^n\times 2 &\geqslant 0\\
\left[2\times(1-p)\right]^n\times 2 &\leqslant 1\\
\left[2\times(1-p)\right]^n &\leqslant \frac{1}{2}\\
2\times(1-p) &\leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{2}}\\
p &\geqslant 1-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

vi. La stratégie de Delphine peut-elle être gagnante ?

$$-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{2}\right)}=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(2)}>\frac{1}{2}\text{ car }0<\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(2)}<1$$

v. Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle positive ?

$$\begin{array}{rcl}
1-(1-p)^n\times 2^{n+1} & \geqslant & 0 \\
1-\left[2\times(1-p)\right]^n\times 2 & \geqslant & 0 \\
\left[2\times(1-p)\right]^n\times 2 & \leqslant & 1 \\
\left[2\times(1-p)\right]^n & \leqslant & \dfrac{1}{2} \\
2\times(1-p) & \leqslant & \sqrt[n]{\dfrac{1}{2}} \\
p & \geqslant & 1-\dfrac{1}{2}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}}
\end{array}$$

vi. La stratégie de Delphine peut-elle être gagnante ?

$$-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{2}\right)}=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(2)}>\frac{1}{2}\text{ car }0<\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(2)}<1$$

$$\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=$$

v. Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle positive ?

$$\begin{aligned}
1-(1-p)^n \times 2^{n+1} &\geqslant 0 \\
1-\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\geqslant 0 \\
\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\leqslant 1 \\
\left[2\times(1-p)\right]^n &\leqslant \frac{1}{2} \\
2\times(1-p) &\leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \\
p &\geqslant 1-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

vi. La stratégie de Delphine peut-elle être gagnante ?

$$-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(2)} > \frac{1}{2} \text{ car } 0 < \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(2)} < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{2}\right)} =$$

v. Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle positive ?

$$\begin{aligned}
1-(1-p)^n \times 2^{n+1} &\geqslant 0\\
1-\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\geqslant 0\\
\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 &\leqslant 1\\
\left[2\times(1-p)\right]^n &\leqslant \frac{1}{2}\\
2\times(1-p) &\leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{2}}\\
p &\geqslant 1-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

vi. La stratégie de Delphine peut-elle être gagnante ?

$$-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(2)} > \frac{1}{2} \text{ car } 0 < \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(2)} < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

v. Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle positive ?

$$\begin{array}{rcl} 1-(1-p)^n \times 2^{n+1} & \geqslant & 0 \\ 1-\left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 & \geqslant & 0 \\ \left[2\times(1-p)\right]^n \times 2 & \leqslant & 1 \\ \left[2\times(1-p)\right]^n & \leqslant & \dfrac{1}{2} \\ 2\times(1-p) & \leqslant & \sqrt[n]{\dfrac{1}{2}} \\ p & \geqslant & 1-\dfrac{1}{2}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}} \end{array}$$

vi. La stratégie de Delphine peut-elle être gagnante ?

$-\dfrac{1}{2}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}} = 1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(2)} > \dfrac{1}{2}$ car $0 < \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(2)} < 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{2}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{2}$. Cette stratégie n'est jamais gagnante.

5. Récréation : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives où nulles :

$\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{N}$.

5. Récréation : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives où nulles : $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{N}$. Considérons la série entière, dépendant de t, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n)$.

5. Récréation : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives où nulles : $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{N}$. Considérons la série entière, dépendant de t, $\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n)$. Cette série converge

pour $t = 1$, car

5. Récréation : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives où nulles : $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{N}$. Considérons la série entière, dépendant de t, $\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=n)$. Cette série converge pour $t=1$, car $\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) = 1$,

5. Récréation : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives où nulles : $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{N}$. Considérons la série entière, dépendant de t, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=n)$. Cette série converge pour $t=1$, car $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)=1$, par conséquent son rayon de convergence est au moins égale à 1.

5. Récréation : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives où nulles : $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{N}$. Considérons la série entière, dépendant de t, $\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n)$. Cette série converge pour $t = 1$, car $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) = 1$, par conséquent son rayon de convergence est au moins égale à 1. D'où la définition suivante :

5. Récréation : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives où nulles : $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{N}$. Considérons la série entière, dépendant de t, $\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=n)$. Cette série converge pour $t=1$, car $\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)=1$, par conséquent son rayon de convergence est au moins égale à 1. D'où la définition suivante :

Définition:

La fonction G_X définie au moins sur $[-1,1]$ par $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=t)$ s'appelle la **fonction génératrice** de la variable aléatoire X.

5. Récréation : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives où nulles : $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{N}$. Considérons la série entière, dépendant de t, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=n)$. Cette série converge pour $t=1$, car $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)=1$, par conséquent son rayon de convergence est au moins égale à 1. D'où la définition suivante :

Définition:

La fonction G_X définie au moins sur $[-1,1]$ par $G_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=t)$ s'appelle la **fonction génératrice** de la variable aléatoire X.

Exemple n° 4 : On considère l'expérience aléatoire du jet d'un dé à 6 faces :

$X(\Omega) =$

5. Récréation : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives où nulles : $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{N}$. Considérons la série entière, dépendant de t, $\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n)$. Cette série converge pour $t = 1$, car $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) = 1$, par conséquent son rayon de convergence est au moins égale à 1. D'où la définition suivante :

Définition:

La fonction G_X définie au moins sur $[-1, 1]$ par $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = t)$ s'appelle la **fonction génératrice** de la variable aléatoire X.

Exemple n° 4 : On considère l'expérience aléatoire du jet d'un dé à 6 faces : $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

5. Récréation : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives où nulles : $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{N}$. Considérons la série entière, dépendant de t, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=n)$. Cette série converge pour $t=1$, car $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)=1$, par conséquent son rayon de convergence est au moins égale à 1. D'où la définition suivante :

Définition:

La fonction G_X définie au moins sur $[-1,1]$ par $G_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=t)$ s'appelle la **fonction génératrice** de la variable aléatoire X.

Exemple n° 4 : On considère l'expérience aléatoire du jet d'un dé à 6 faces : $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$. On note X la variable aléatoire discrète réelle qui donne la face du dé.

5. Récréation : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives où nulles : $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{N}$. Considérons la série entière, dépendant de t, $\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n)$. Cette série converge pour $t = 1$, car $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) = 1$, par conséquent son rayon de convergence est au moins égale à 1. D'où la définition suivante :

Définition:

La fonction G_X définie au moins sur $[-1, 1]$ par $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = t)$ s'appelle la **fonction génératrice** de la variable aléatoire X.

Exemple n° 4 : On considère l'expérience aléatoire du jet d'un dé à 6 faces : $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On note X la variable aléatoire discrète réelle qui donne la face du dé. La fonction génératrice de X est

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n) =$$

5. Récréation : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives où nulles : $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{N}$. Considérons la série entière, dépendant de t, $\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=n)$. Cette série converge pour $t=1$, car $\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)=1$, par conséquent son rayon de convergence est au moins égale à 1. D'où la définition suivante :

Définition:

La fonction G_X définie au moins sur $[-1,1]$ par $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=t)$ s'appelle la **fonction génératrice** de la variable aléatoire X.

Exemple n° 4 : On considère l'expérience aléatoire du jet d'un dé à 6 faces : $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$. On note X la variable aléatoire discrète réelle qui donne la face du dé.
La fonction génératrice de X est

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=n) = \sum_{n=1}^{6} P(X=n)t^n =$$

5. Récréation : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives où nulles : $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{N}$. Considérons la série entière, dépendant de t, $\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=n)$. Cette série converge pour $t=1$, car $\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)=1$, par conséquent son rayon de convergence est au moins égale à 1. D'où la définition suivante :

Définition:

La fonction G_X définie au moins sur $[-1,1]$ par $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=t)$ s'appelle la **fonction génératrice** de la variable aléatoire X.

Exemple n° 4 : On considère l'expérience aléatoire du jet d'un dé à 6 faces : $X(\Omega)=\{1,2,3,4,5,6\}$. On note X la variable aléatoire discrète réelle qui donne la face du dé. La fonction génératrice de X est

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=n) = \sum_{n=1}^{6} P(X=n)t^n = \frac{1}{6}t +$$

5. Récréation : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives où nulles : $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{N}$. Considérons la série entière, dépendant de t, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n)$. Cette série converge pour $t = 1$, car $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) = 1$, par conséquent son rayon de convergence est au moins égale à 1. D'où la définition suivante :

Définition:

La fonction G_X définie au moins sur $[-1, 1]$ par $G_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = t)$ s'appelle la **fonction génératrice** de la variable aléatoire X.

Exemple n° 4 : On considère l'expérience aléatoire du jet d'un dé à 6 faces : $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On note X la variable aléatoire discrète réelle qui donne la face du dé. La fonction génératrice de X est

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n) = \sum_{n=1}^{6} P(X = n) t^n = \frac{1}{6} t + \frac{1}{6} t^2 +$$

5. Récréation : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives où nulles : $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{N}$. Considérons la série entière, dépendant de t, $\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=n)$. Cette série converge pour $t=1$, car $\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)=1$, par conséquent son rayon de convergence est au moins égale à 1. D'où la définition suivante :

Définition:

La fonction G_X définie au moins sur $[-1,1]$ par $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = t)$ s'appelle la **fonction génératrice** de la variable aléatoire X.

Exemple n° 4 : On considère l'expérience aléatoire du jet d'un dé à 6 faces : $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$. On note X la variable aléatoire discrète réelle qui donne la face du dé. La fonction génératrice de X est

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=n) = \sum_{n=1}^{6} P(X=n)t^n = \frac{1}{6}t + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t^3 +$$

5. Récréation : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives où nulles : $\boldsymbol{X(\Omega) \subset \mathbb{N}}$. Considérons la série entière, dépendant de t, $\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=n)$. Cette série converge pour $t=1$, car $\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) = 1$, par conséquent son rayon de convergence est au moins égale à 1. D'où la définition suivante :

Définition:

La fonction G_X définie au moins sur $[-1,1]$ par $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=t)$ s'appelle la **fonction génératrice** de la variable aléatoire X.

Exemple n° 4 : On considère l'expérience aléatoire du jet d'un dé à 6 faces : $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$. On note X la variable aléatoire discrète réelle qui donne la face du dé. La fonction génératrice de X est

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=n) = \sum_{n=1}^{6} P(X=n)t^n = \frac{1}{6}t + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^5 + \frac{1}{6}t^6$$

5. Récréation : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives où nulles : $\boldsymbol{X(\Omega) \subset \mathbb{N}}$. Considérons la série entière, dépendant de t, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n)$. Cette série converge pour $t = 1$, car $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) = 1$, par conséquent son rayon de convergence est au moins égale à 1. D'où la définition suivante :

Définition:

La fonction G_X définie au moins sur $[-1, 1]$ par $G_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = t)$ s'appelle la **fonction génératrice** de la variable aléatoire X.

Exemple n° 4 : On considère l'expérience aléatoire du jet d'un dé à 6 faces : $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On note X la variable aléatoire discrète réelle qui donne la face du dé. La fonction génératrice de X est

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n) = \sum_{n=1}^{6} P(X = n) t^n = \frac{1}{6}t + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^5 + \frac{1}{6}t^6$$

Remarque : Si $X(\Omega)$ est **fini**, G_X est une fonction

5. Récréation : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives où nulles : $\boldsymbol{X(\Omega)} \subset \mathbb{N}$. Considérons la série entière, dépendant de t, $\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=n)$. Cette série converge pour $t=1$, car $\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)=1$, par conséquent son rayon de convergence est au moins égale à 1. D'où la définition suivante :

Définition:

La fonction G_X définie au moins sur $[-1,1]$ par $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=t)$ s'appelle la **fonction génératrice** de la variable aléatoire X.

Exemple n° 4 : On considère l'expérience aléatoire du jet d'un dé à 6 faces : $X(\Omega)=\{1,2,3,4,5,6\}$. On note X la variable aléatoire discrète réelle qui donne la face du dé. La fonction génératrice de X est

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X=n) = \sum_{n=1}^{6} P(X=n)t^n = \frac{1}{6}t + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^5 + \frac{1}{6}t^6$$

Remarque : Si $X(\Omega)$ est **fini**, G_X est une fonction **polynomiale.**

Rappel

Soit $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Rappel

Soit $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors f est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$ et pour tout $t \in]-R, R[$ et tout $k > 0$, on a :

Rappel

Soit $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors f est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$ et pour tout $t \in]-R, R[$ et tout $k > 0$, on a :

$$f^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n t^{n-k}$$

Rappel

Soit $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors f est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$ et pour tout $t \in]-R, R[$ et tout $k > 0$, on a :

$$f^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n t^{n-k}$$

Si série dérivée k-ième converge en $t = R$, alors elle est égale à la dérivée k-ième à gauche de f.

Donc, on a de même, sous réserve de convergence de ces séries :

☞ $G'_X(t) =$

Donc, on a de même, sous réserve de convergence de ces séries :

☞ $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n)t^{n-1}$ **donc**

$G'_X(1) =$

Donc, on a de même, sous réserve de convergence de ces séries :

☞ $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n)t^{n-1}$ **donc**

$G'_X(1) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n) =$

Donc, on a de même, sous réserve de convergence de ces séries :

- $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n)t^{n-1}$ **donc**

  $G'_X(1) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(X=n) =$

Donc, on a de même, sous réserve de convergence de ces séries :

☞ $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n)t^{n-1}$ **donc**

$$G'_X(1) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(X = n) = E(X).$$

Donc, on a de même, sous réserve de convergence de ces séries :

- $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n)t^{n-1}$ **donc**

  $G'_X(1) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(X=n) = E(X)$.

- $G''_X(t) =$

Donc, on a de même, sous réserve de convergence de ces séries :

- $G'_X(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n)t^{n-1}$ **donc**

  $G'_X(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(X=n) = E(X)$.

- $G''_X(t) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X=n)t^{n-2}$

Donc, on a de même, sous réserve de convergence de ces séries :

- $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n)t^{n-1}$ **donc**

  $G'_X(1) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(X=n) = E(X)$.

- $G''_X(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X=n)t^{n-2}$ **donc** $G''_X(1) =$

Donc, on a de même, sous réserve de convergence de ces séries :

- $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n)t^{n-1}$ **donc**

  $G'_X(1) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(X = n) = E(X)$.

- $G''_X(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X = n)t^{n-2}$ **donc** $G''_X(1) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X = n)$

Donc, on a de même, sous réserve de convergence de ces séries :

- $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n)t^{n-1}$ **donc**

  $G'_X(1) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(X=n) = E(X)$.

- $G''_X(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X=n)t^{n-2}$ **donc** $G''_X(1) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X=n)$

  $= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)P(X=n) =$

Donc, on a de même, sous réserve de convergence de ces séries :

- $G'_X(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n)t^{n-1}$ **donc**

  $G'_X(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(X=n) = E(X)$.

- $G''_X(t) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X=n)t^{n-2}$ **donc** $G''_X(1) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X=n)$

  $= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)P(X=n) = E\big(X(X-1)\big)$.

Donc, on a de même, sous réserve de convergence de ces séries :

- $G'_X(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n)t^{n-1}$ **donc**

$$G'_X(1) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(X=n) = E(X).$$

- $G''_X(t) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X=n)t^{n-2}$ **donc** $G''_X(1) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X=n)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)P(X=n) = E\big(X(X-1)\big).$$

$$= E\big(X^2 - X)\big) = E\big(X^2\big) - E(X).$$

Donc, on a de même, sous réserve de convergence de ces séries :

☞ $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n)t^{n-1}$ **donc**

$G'_X(1) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(X=n) = E(X)$.

☞ $G''_X(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X=n)t^{n-2}$ **donc** $G''_X(1) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X=n)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)P(X=n) = E\big(X(X-1)\big)$.

$= E\big(X^2 - X)\big) = E\big(X^2\big) - E(X)$.

d'où $V(X) =$

Donc, on a de même, sous réserve de convergence de ces séries :

☞ $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n)t^{n-1}$ **donc**

$$G'_X(1) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(X=n) = E(X).$$

☞ $G''_X(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X=n)t^{n-2}$ **donc** $G''_X(1) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X=n)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)P(X=n) = E\big(X(X-1)\big).$$

$$= E\big(X^2 - X)\big) = E\big(X^2\big) - E(X).$$

d'où $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left[G'_X(1)\right]^2$

Donc, on a de même, sous réserve de convergence de ces séries :

- $G'_X(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n)t^{n-1}$ **donc**

  $$G'_X(1) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(X = n) = E(X).$$

- $G''_X(t) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X = n)t^{n-2}$ **donc** $G''_X(1) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X = n)$

  $$= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)P(X = n) = E\big(X(X-1)\big).$$

  $$= E\big(X^2 - X)\big) = E\big(X^2\big) - E(X).$$

  d'où $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \big[G'_X(1)\big]^2$

Si le rayon de convergence de la série définissant G_X est exactement 1,

Donc, on a de même, sous réserve de convergence de ces séries :

☞ $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n)t^{n-1}$ **donc**

$$G'_X(1) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(X = n) = E(X).$$

☞ $G''_X(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X = n)t^{n-2}$ **donc** $G''_X(1) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)P(X = n)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)P(X = n) = E\big(X(X-1)\big).$$

$$= E\big(X^2 - X)\big) = E\big(X^2\big) - E(X).$$

d'où $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left[G'_X(1)\right]^2$

Si le rayon de convergence de la série définissant G_X est exactement 1, ces dérivées doivent être comprises comme étant des dérivées à gauche au point $t = 1$.

Exemple n° 5 : On a vu dans l'exemple précédent du jet d'un dé cubique, que

Exemple n° 5 : On a vu dans l'exemple précédent du jet d'un dé cubique, que

$$G_X(t) =$$

Exemple n° 5 : On a vu dans l'exemple précédent du jet d'un dé cubique, que

$$G_X(t) = \frac{1}{6}t + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^5 + \frac{1}{6}t^6.$$

$$G'_X(t) =$$

Exemple n° 5 : On a vu dans l'exemple précédent du jet d'un dé cubique, que

$$G_X(t) = \frac{1}{6}t + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^5 + \frac{1}{6}t^6.$$

$$G'_X(t) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2t + \frac{1}{6} \times 3t + \frac{1}{6} \times 4t + \frac{1}{6} \times 5t + \frac{1}{6} \times 6t$$

Donc, $E(X) =$

Exemple n° 5 : On a vu dans l'exemple précédent du jet d'un dé cubique, que

$$G_X(t) = \frac{1}{6}t + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^5 + \frac{1}{6}t^6.$$

$$G'_X(t) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2t + \frac{1}{6} \times 3t + \frac{1}{6} \times 4t + \frac{1}{6} \times 5t + \frac{1}{6} \times 6t$$

Donc, $E(X) = G'_X(1) = \underbrace{\frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6}_{\text{on retrouve la moyenne des valeurs pondérées par les probabilités}}$

Exemple n° 5 : On a vu dans l'exemple précédent du jet d'un dé cubique, que

$$G_X(t) = \frac{1}{6}t + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^5 + \frac{1}{6}t^6.$$

$$G'_X(t) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2t + \frac{1}{6} \times 3t + \frac{1}{6} \times 4t + \frac{1}{6} \times 5t + \frac{1}{6} \times 6t$$

Donc, $E(X) = G'_X(1) = \underbrace{\frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6}_{\text{on retrouve la moyenne des valeurs pondérées par les probabilités}}$

$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} =$$

Exemple n° 5 : On a vu dans l'exemple précédent du jet d'un dé cubique, que

$$G_X(t) = \frac{1}{6}t + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^5 + \frac{1}{6}t^6.$$

$$G'_X(t) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2t + \frac{1}{6} \times 3t + \frac{1}{6} \times 4t + \frac{1}{6} \times 5t + \frac{1}{6} \times 6t$$

Donc, $E(X) = G'_X(1) = \underbrace{\frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6}_{\text{on retrouve la moyenne des valeurs pondérées par les probabilités}}$

$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} =$$

Exemple n° 5 : On a vu dans l'exemple précédent du jet d'un dé cubique, que

$$G_X(t) = \frac{1}{6}t + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^5 + \frac{1}{6}t^6.$$

$$G'_X(t) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2t + \frac{1}{6} \times 3t + \frac{1}{6} \times 4t + \frac{1}{6} \times 5t + \frac{1}{6} \times 6t$$

Donc, $E(X) = G'_X(1) = \underbrace{\frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6}_{\text{on retrouve la moyenne des valeurs pondérées par les probabilités}}$

$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$$

$$G_X(t) = P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 + P(X=3)t^3 + \ldots + P(X=n)t^n + \ldots$$

$$G_X(t) = P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 + P(X=3)t^3 + \ldots + P(X=n)t^n + \ldots$$

$$G'_X(t) =$$

$G_X(t) = P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 + P(X=3)t^3 + \ldots + P(X=n)t^n + \ldots$

$G'_X(t) = P(X=1) +$

$$G_X(t) = P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 + P(X=3)t^3 + \ldots + P(X=n)t^n + \ldots$$

$$G'_X(t) = P(X=1) + P(X=2) \times 2t +$$

$$G_X(t) = P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 + P(X=3)t^3 + \ldots + P(X=n)t^n + \ldots$$

$$G'_X(t) = P(X=1) + P(X=2) \times 2t + P(X=3) \times 3t^2 + \ldots +$$

$$G_X(t) = P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 + P(X=3)t^3 + \ldots + P(X=n)t^n + \ldots$$

$$G'_X(t) = P(X=1) + P(X=2) \times 2t + P(X=3) \times 3t^2 + \ldots + P(X=n) \times nt^{n-1} + \ldots$$

$$G_X(t) = P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 + P(X=3)t^3 + \ldots + P(X=n)t^n + \ldots$$

$$G'_X(t) = P(X=1) + P(X=2) \times 2t + P(X=3) \times 3t^2 + \ldots + P(X=n) \times nt^{n-1} + \ldots$$

$$G''_X(t) =$$

$$G_X(t) = P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 + P(X=3)t^3 + \ldots + P(X=n)t^n + \ldots$$

$$G'_X(t) = P(X=1) + P(X=2) \times 2t + P(X=3) \times 3t^2 + \ldots + P(X=n) \times nt^{n-1} + \ldots$$

$$G''_X(t) = P(X=2) \times 2 \times 1 +$$

$$G_X(t) = P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 + P(X=3)t^3 + \ldots + P(X=n)t^n + \ldots$$

$$G'_X(t) = P(X=1) + P(X=2) \times 2t + P(X=3) \times 3t^2 + \ldots + P(X=n) \times nt^{n-1} + \ldots$$

$$G''_X(t) = P(X=2) \times 2 \times 1 + P(X=3) \times 3 \times 2t + \ldots +$$

$$G_X(t) = P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 + P(X=3)t^3 + \ldots + P(X=n)t^n + \ldots$$

$$G'_X(t) = P(X=1) + P(X=2) \times 2t + P(X=3) \times 3t^2 + \ldots + P(X=n) \times nt^{n-1} + \ldots$$

$$G''_X(t) = P(X=2) \times 2 \times 1 + P(X=3) \times 3 \times 2t + \ldots + P(X=n) \times n(n-1)t^{n-2} + \ldots$$

$$G_X(t) = P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 + P(X=3)t^3 + \ldots + P(X=n)t^n + \ldots$$

$$G'_X(t) = P(X=1) + P(X=2)\times 2t + P(X=3)\times 3t^2 + \ldots + P(X=n)\times nt^{n-1} + \ldots$$

$$G''_X(t) = P(X=2)\times 2\times 1 + P(X=3)\times 3\times 2t + \ldots + P(X=n)\times n(n-1)t^{n-2} + \ldots$$

$$G^{(3)}_X(t) =$$

$$G_X(t) = P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 + P(X=3)t^3 + \ldots + P(X=n)t^n + \ldots$$

$$G'_X(t) = P(X=1) + P(X=2)\times 2t + P(X=3)\times 3t^2 + \ldots + P(X=n)\times nt^{n-1} + \ldots$$

$$G''_X(t) = P(X=2)\times 2\times 1 + P(X=3)\times 3\times 2t + \ldots + P(X=n)\times n(n-1)t^{n-2} + \ldots$$

$$G_X^{(3)}(t) = P(X=3)\times 3\times 2\times 1 +$$

$$G_X(t) = P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 + P(X=3)t^3 + \ldots + P(X=n)t^n + \ldots$$

$$G'_X(t) = P(X=1) + P(X=2) \times 2t + P(X=3) \times 3t^2 + \ldots + P(X=n) \times nt^{n-1} + \ldots$$

$$G''_X(t) = P(X=2) \times 2 \times 1 + P(X=3) \times 3 \times 2t + \ldots + P(X=n) \times n(n-1)t^{n-2} + \ldots$$

$$G_X^{(3)}(t) = P(X=3) \times 3 \times 2 \times 1 + \ldots +$$

$$G_X(t) = P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 + P(X=3)t^3 + \ldots + P(X=n)t^n + \ldots$$

$$G'_X(t) = P(X=1) + P(X=2)\times 2t + P(X=3)\times 3t^2 + \ldots + P(X=n)\times nt^{n-1} + \ldots$$

$$G''_X(t) = P(X=2)\times 2\times 1 + P(X=3)\times 3\times 2t + \ldots + P(X=n)\times n(n-1)t^{n-2} + \ldots$$

$$G^{(3)}_X(t) = P(X=3)\times 3\times 2\times 1 + \ldots + P(X=n)\times n(n-1)(n-2)t^{n-3} + \ldots$$

$$G_X(t) = P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 + P(X=3)t^3 + \ldots + P(X=n)t^n + \ldots$$

$$G'_X(t) = P(X=1) + P(X=2)\times 2t + P(X=3)\times 3t^2 + \ldots + P(X=n)\times nt^{n-1} + \ldots$$

$$G''_X(t) = P(X=2)\times 2\times 1 + P(X=3)\times 3\times 2t + \ldots + P(X=n)\times n(n-1)t^{n-2} + \ldots$$

$$G^{(3)}_X(t) = P(X=3)\times 3\times 2\times 1 + \ldots + P(X=n)\times n(n-1)(n-2)t^{n-3} + \ldots$$

$$\ldots$$

$$G_X(t) = P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 + P(X=3)t^3 + \ldots + P(X=n)t^n + \ldots$$

$$G'_X(t) = P(X=1) + P(X=2)\times 2t + P(X=3)\times 3t^2 + \ldots + P(X=n)\times nt^{n-1} + \ldots$$

$$G''_X(t) = P(X=2)\times 2\times 1 + P(X=3)\times 3\times 2t + \ldots + P(X=n)\times n(n-1)t^{n-2} + \ldots$$

$$G^{(3)}_X(t) = P(X=3)\times 3\times 2\times 1 + \ldots + P(X=n)\times n(n-1)(n-2)t^{n-3} + \ldots$$

$$\ldots$$

$$G^{(k)}_X(t) = \underbrace{P(X=k)\times k!}_{G^{(k)}_X(0)} + \ldots + P(X=n)\times \underbrace{n(n-1)(n-2)\big(n-(k-1)\big)}_{\frac{n!}{(n-k)!}}\, t^{n-k} + \ldots$$

$$G_X(t) = P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 + P(X=3)t^3 + \ldots + P(X=n)t^n + \ldots$$

$$G'_X(t) = P(X=1) + P(X=2)\times 2t + P(X=3)\times 3t^2 + \ldots + P(X=n)\times nt^{n-1} + \ldots$$

$$G''_X(t) = P(X=2)\times 2\times 1 + P(X=3)\times 3\times 2t + \ldots + P(X=n)\times n(n-1)t^{n-2} + \ldots$$

$$G^{(3)}_X(t) = P(X=3)\times 3\times 2\times 1 + \ldots + P(X=n)\times n(n-1)(n-2)t^{n-3} + \ldots$$

$$\ldots$$

$$G^{(k)}_X(t) = \underbrace{P(X=k)\times k!}_{G^{(k)}_X(0)} + \ldots + P(X=n)\times \underbrace{n(n-1)(n-2)\big(n-(k-1)\big)}_{\frac{n!}{(n-k)!}}\, t^{n-k} + \ldots$$

Propriété

Etant donnée la fonction génératrice G_X d'une variable aléatoire X et $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$P(X=k) =$$

$$G_X(t) = P(X=0) + P(X=1)t + P(X=2)t^2 + P(X=3)t^3 + \ldots + P(X=n)t^n + \ldots$$

$$G'_X(t) = P(X=1) + P(X=2)\times 2t + P(X=3)\times 3t^2 + \ldots + P(X=n)\times nt^{n-1} + \ldots$$

$$G''_X(t) = P(X=2)\times 2\times 1 + P(X=3)\times 3\times 2t + \ldots + P(X=n)\times n(n-1)t^{n-2} + \ldots$$

$$G^{(3)}_X(t) = P(X=3)\times 3\times 2\times 1 + \ldots + P(X=n)\times n(n-1)(n-2)t^{n-3} + \ldots$$

$$\ldots$$

$$G^{(k)}_X(t) = \underbrace{P(X=k)\times k!}_{G^{(k)}_X(0)} + \ldots + P(X=n)\times \underbrace{n(n-1)(n-2)\big(n-(k-1)\big)}_{\frac{n!}{(n-k)!}}\, t^{n-k} + \ldots$$

Propriété

Etant donnée la fonction génératrice G_X d'une variable aléatoire X et $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$P(X=k) = \frac{G^{(k)}_X(0)}{k!}$$

Propriété

Etant donnée la fonction génératrice G_X d'une variable aléatoire X et $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

Corollaire

Si deux variables aléatoires discrètes ont la même fonction génératrice, alors elles ont la même loi.

6. Conséquences de l'indépendance

Propriété

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, **indépendantes**, ayant chacune une espérance, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

6. Conséquences de l'indépendance

Propriété

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, **indépendantes**, ayant chacune une espérance, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

Démonstration

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i y_j P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$$

6. Conséquences de l'indépendance

Propriété

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, **indépendantes**, ayant chacune une espérance, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

Démonstration

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i y_j P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) \\ &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i P(X = x_i) y_j P(Y = y_j) \text{ car} \end{aligned}$$

6. Conséquences de l'indépendance

Propriété

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, **indépendantes**, ayant chacune une espérance, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

Démonstration

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i y_j P\big((X = x_i)\cap(Y = y_j)\big) \\ &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i P(X = x_i) y_j P(Y = y_j) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.} \end{aligned}$$

6. Conséquences de l'indépendance

Propriété

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, **indépendantes**, ayant chacune une espérance, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

Démonstration

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i y_j P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$$

$$= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i P(X = x_i) y_j P(Y = y_j) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i)\right)}_{E(X)} y_j P(Y = y_j) =$$

6. Conséquences de l'indépendance

Propriété

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, **indépendantes**, ayant chacune une espérance, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

Démonstration

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i y_j P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) \\ &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i P(X = x_i) y_j P(Y = y_j) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i)\right)}_{E(X)} y_j P(Y = y_j) = E(X) \sum_{j=0}^{\infty} y_j P(Y = y_j) = \end{aligned}$$

6. Conséquences de l'indépendance

Propriété

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, **indépendantes**, ayant chacune une espérance, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

Démonstration

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i y_j P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$$

$$= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i P(X = x_i) y_j P(Y = y_j)$$ car X et Y sont indépendantes.

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i)\right)}_{E(X)} y_j P(Y = y_j) = E(X) \sum_{j=0}^{\infty} y_j P(Y = y_j) = E(X)E(Y)$$

Corollaire

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, **indépendantes**, ayant chacune un moment d'ordre 2, alors $V(X+Y) = \boldsymbol{V(X)+V(Y)}$

Corollaire

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, **indépendantes**, ayant chacune un moment d'ordre 2, alors $V(X+Y) = \boldsymbol{V(X) + V(Y)}$

Démonstration

$$V(X+Y) = E\left[(X+Y)^2\right] - \left[E(X+Y)\right]^2$$

Corollaire

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, **indépendantes**, ayant chacune un moment d'ordre 2, alors $V(X+Y) = \boldsymbol{V(X)+V(Y)}$

Démonstration

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E\big[(X+Y)^2\big] - \big[E(X+Y)\big]^2 \\ &= E\big[X^2+2XY+Y^2\big] - \big[E(X)+E(Y)\big]^2 \end{aligned}$$

Corollaire

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, **indépendantes**, ayant chacune un moment d'ordre 2, alors $V(X+Y) = \boldsymbol{V(X)+V(Y)}$

Démonstration

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E\big[(X+Y)^2\big] - \big[E(X+Y)\big]^2 \\ &= E\big[X^2+2XY+Y^2\big] - \big[E(X)+E(Y)\big]^2 \\ &= E\big[X^2\big] + 2E\big[XY\big] + \big[Y^2\big] - \big[E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2\big] \end{aligned}$$

Corollaire

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, **indépendantes**, ayant chacune un moment d'ordre 2, alors $V(X+Y) = \boldsymbol{V(X) + V(Y)}$

Démonstration

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E\left[(X+Y)^2\right] - \left[E(X+Y)\right]^2 \\ &= E\left[X^2 + 2XY + Y^2\right] - \left[E(X) + E(Y)\right]^2 \\ &= E\left[X^2\right] + 2E\left[XY\right] + \left[Y^2\right] - \left[E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2\right] \end{aligned}$$

Or $E\left[XY\right] = E(X)E(Y)$ car X et Y sont

Corollaire

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, **indépendantes**, ayant chacune un moment d'ordre 2, alors $V(X+Y) = \boldsymbol{V(X)+V(Y)}$

Démonstration

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E\big[(X+Y)^2\big] - \big[E(X+Y)\big]^2 \\ &= E\big[X^2+2XY+Y^2\big] - \big[E(X)+E(Y)\big]^2 \\ &= E\big[X^2\big] + 2E\big[XY\big] + \big[Y^2\big] - \big[E(X)^2+2E(X)E(Y)+E(Y)^2\big] \end{aligned}$$

Or $E\big[XY\big] = E(X)E(Y)$ car X et Y sont **indépendantes**.

Corollaire

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, **indépendantes**, ayant chacune un moment d'ordre 2, alors $V(X+Y) = \boldsymbol{V(X) + V(Y)}$

Démonstration

$$V(X+Y) = E\left[(X+Y)^2\right] - \left[E(X+Y)\right]^2$$
$$= E\left[X^2 + 2XY + Y^2\right] - \left[E(X) + E(Y)\right]^2$$
$$= E\left[X^2\right] + 2E\left[XY\right] + \left[Y^2\right] - \left[E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2\right]$$

Or $E\left[XY\right] = E(X)E(Y)$ car X et Y sont **indépendantes**.

$$V(X+Y) = E\left[X^2\right] + 2E(X)E(Y) + E\left[Y^2\right] - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2$$

Corollaire

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, **indépendantes**, ayant chacune un moment d'ordre 2, alors $V(X+Y) = \boldsymbol{V(X) + V(Y)}$

Démonstration

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E\left[(X+Y)^2\right] - \left[E(X+Y)\right]^2 \\ &= E\left[X^2 + 2XY + Y^2\right] - \left[E(X) + E(Y)\right]^2 \\ &= E\left[X^2\right] + 2E\left[XY\right] + \left[Y^2\right] - \left[E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2\right] \end{aligned}$$

Or $E\left[XY\right] = E(X)E(Y)$ car X et Y sont **indépendantes**.

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E\left[X^2\right] + 2E(X)E(Y) + E\left[Y^2\right] - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2 \\ &= \underbrace{E\left[X^2\right] - E(X)^2}_{V(X)} + \underbrace{E\left[Y^2\right] - E(Y)^2}_{V(Y)} \end{aligned}$$

Propriété

Etant donnée deux variables aléatoires discrètes X et Y, **indépendantes**, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X et G_Y leurs fonctions génératrices associées : $G_{X+Y} = \boldsymbol{G_X \times G_Y}$.

Propriété

Etant donnée deux variables aléatoires discrètes X et Y, **indépendantes**, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X et G_Y leurs fonctions génératrices associées : $G_{X+Y} = \boldsymbol{G_X \times G_Y}$.

Démonstration

Posons $S = X + Y$,

Propriété

Etant donnée deux variables aléatoires discrètes X et Y, **indépendantes**, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X et G_Y leurs fonctions génératrices associées : $G_{X+Y} = \boldsymbol{G_X \times G_Y}$.

Démonstration

Posons $S = X + Y$, $G_X = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$, et $G_Y = \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j$.

Propriété

Etant donnée deux variables aléatoires discrètes X et Y, **indépendantes**, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X et G_Y leurs fonctions génératrices associées : $G_{X+Y} = \boldsymbol{G_X \times G_Y}$.

Démonstration

Posons $S = X + Y$, $G_X = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$, et $G_Y = \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j$. On rappelle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Propriété

Etant donnée deux variables aléatoires discrètes X et Y, **indépendantes**, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X et G_Y leurs fonctions génératrices associées : $G_{X+Y} = \boldsymbol{G_X \times G_Y}$.

Démonstration

Posons $S = X + Y$, $G_X = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$, et $G_Y = \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j$. On rappelle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Pour calculer $c_k = P(S = k)$, $k \in \mathbb{N}$, utilisons le **système complet** d'évènements $(Y = j)_{j \in \mathbb{N}}$. Il vient :

Propriété

Etant donnée deux variables aléatoires discrètes X et Y, **indépendantes**, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X et G_Y leurs fonctions génératrices associées : $G_{X+Y} = \boldsymbol{G_X \times G_Y}$.

Démonstration

Posons $S = X + Y$, $G_X = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$, et $G_Y = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j$. On rappelle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Pour calculer $c_k = P(S = k)$, $k \in \mathbb{N}$, utilisons le **système complet** d'évènements $(Y = j)_{j\in\mathbb{N}}$. Il vient :

$$c_k = \sum_{j=0}^{\infty} P\big((X + Y = k) \cap (Y = j)\big)$$

Propriété

Etant donnée deux variables aléatoires discrètes X et Y, **indépendantes**, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X et G_Y leurs fonctions génératrices associées : $G_{X+Y} = \boldsymbol{G_X \times G_Y}$.

Démonstration

Posons $S = X + Y$, $G_X = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$, et $G_Y = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j$. On rappelle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Pour calculer $c_k = P(S = k)$, $k \in \mathbb{N}$, utilisons le **système complet** d'évènements $(Y = j)_{j \in \mathbb{N}}$. Il vient :

$$
\begin{aligned}
c_k &= \sum_{j=0}^{\infty} P\big((X+Y=k) \cap (Y=j)\big) \\
&= \sum_{j=0}^{k} P\big((X+Y=k) \cap (Y=j)\big) \text{ car } Y(\Omega) \leqslant k
\end{aligned}
$$

Propriété

Etant donnée deux variables aléatoires discrètes X et Y, **indépendantes**, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X et G_Y leurs fonctions génératrices associées : $G_{X+Y} = \boldsymbol{G_X \times G_Y}$.

Démonstration

Posons $S = X + Y$, $G_X = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$, et $G_Y = \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j$. On rappelle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Pour calculer $c_k = P(S = k)$, $k \in \mathbb{N}$, utilisons le **système complet** d'évènements $(Y = j)_{j \in \mathbb{N}}$. Il vient :

$$
\begin{aligned}
c_k &= \sum_{j=0}^{\infty} P\big((X+Y=k) \cap (Y=j)\big) \\
&= \sum_{j=0}^{k} P\big((X+Y=k) \cap (Y=j)\big) \text{ car } Y(\Omega) \leqslant k \\
&= \sum_{j=0}^{k} P\big((X=k-j) \cap (Y=j)\big) =
\end{aligned}
$$

Propriété

Etant donnée deux variables aléatoires discrètes X et Y, **indépendantes**, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X et G_Y leurs fonctions génératrices associées : $G_{X+Y} = \boldsymbol{G_X \times G_Y}$.

Démonstration

Posons $S = X + Y$, $G_X = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$, et $G_Y = \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j$. On rappelle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Pour calculer $c_k = P(S = k)$, $k \in \mathbb{N}$, utilisons le **système complet** d'évènements $(Y = j)_{j\in\mathbb{N}}$. Il vient :

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{j=0}^{\infty} P\big((X+Y=k) \cap (Y=j)\big) \\ &= \sum_{j=0}^{k} P\big((X+Y=k) \cap (Y=j)\big) \text{ car } Y(\Omega) \leqslant k \\ &= \sum_{j=0}^{k} P\big((X=k-j) \cap (Y=j)\big) = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j \end{aligned}$$

Propriété

Etant donnée deux variables aléatoires discrètes X et Y, **indépendantes**, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X et G_Y leurs fonctions génératrices associées : $G_{X+Y} = \boldsymbol{G_X \times G_Y}$.

Démonstration

Posons $S = X + Y$, $G_X = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$, et $G_Y = \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j$. On rappelle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Pour calculer $c_k = P(S = k)$, $k \in \mathbb{N}$, utilisons le **système complet** d'évènements $(Y = j)_{j \in \mathbb{N}}$. Il vient :

$$c_k = \sum_{j=0}^{\infty} P\big((X + Y = k) \cap (Y = j)\big)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} P\big((X + Y = k) \cap (Y = j)\big) \text{ car } Y(\Omega) \leqslant k$$

$$= \sum_{j=0}^{k} P\big((X = k - j) \cap (Y = j)\big) = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j$$

Donc, c_k est le coefficient du terme t^k dans le développement du produit $G_X(t)G_Y(t)$.