X. Loi absolument continue.

1. Loi continue

Rappel

Si f une fonction continue sur $[a, b]$ sauf peut-être en un **nombre fini de points,**
alors $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est

1. Loi continue

Rappel

Si f une fonction continue sur $[a, b]$ sauf peut-être en un **nombre fini de points,** alors $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est

- **continue** sur $[a, b]$;

1. Loi continue

Rappel

Si f une fonction continue sur $[a,b]$ sauf peut-être en un **nombre fini de points,**
alors $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est

- **continue** sur $[a,b]$;
- dérivable à gauche (resp. à droite) en tout point $x_0 \in [a,b]$ où f admet une limite à gauche (resp. à droite)

1. Loi continue

Rappel

Si f une fonction continue sur $[a, b]$ sauf peut-être en un **nombre fini de points**, alors $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est

- **continue** sur $[a, b]$;
- dérivable à gauche (resp. à droite) en tout point $x_0 \in [a, b]$ où f admet une limite à gauche (resp. à droite) et $F'_g(x_0) = f(x_0^-)$ $\big($resp. $F'_d(x_0) = f(x_0^+)\big)$

1. Loi continue

Rappel

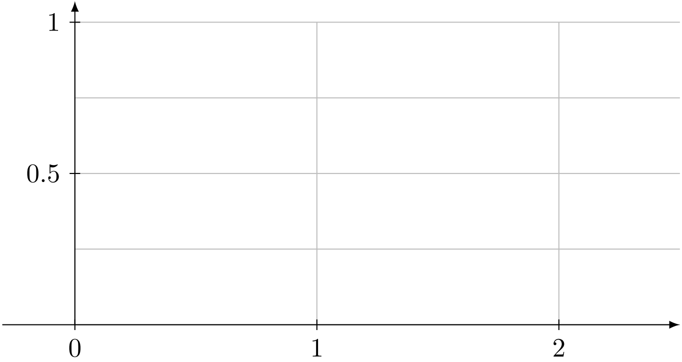
Si f une fonction continue sur $[a,b]$ sauf peut-être en un **nombre fini de points**, alors $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est

- **continue** sur $[a,b]$;
- dérivable à gauche (resp. à droite) en tout point $x_0 \in [a,b]$ où f admet une limite à gauche (resp. à droite) et $F'_g(x_0) = f(x_0^-)$ $\big($resp. $F'_d(x_0) = f(x_0^+)\big)$

Ces résultats restent valables pour $a = -\infty$, sous réserve de convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t$

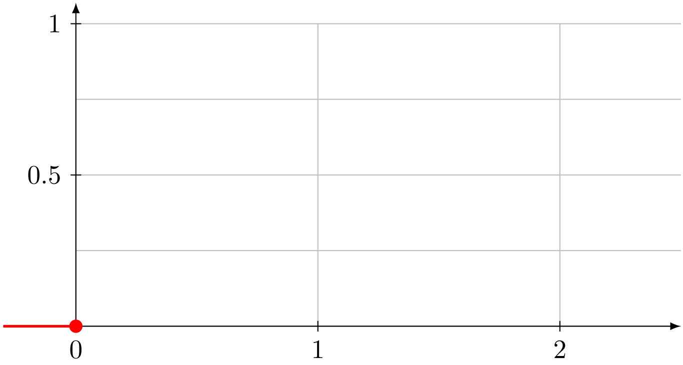
Considérons le fonction de répartition d'une variable aléatoire X définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{4} \text{ si } 0 < x < 1 \\ \frac{x^2}{2} - x + 1 \text{ si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 \text{ si } 2 < x \end{cases}$$



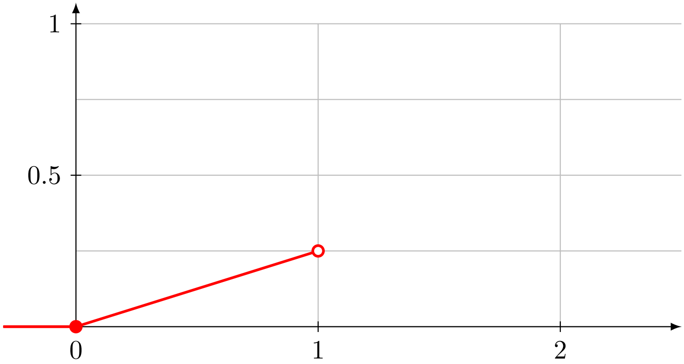
Considérons le fonction de répartition d'une variable aléatoire X définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{4} \text{ si } 0 < x < 1 \\ \frac{x^2}{2} - x + 1 \text{ si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 \text{ si } 2 < x \end{cases}$$



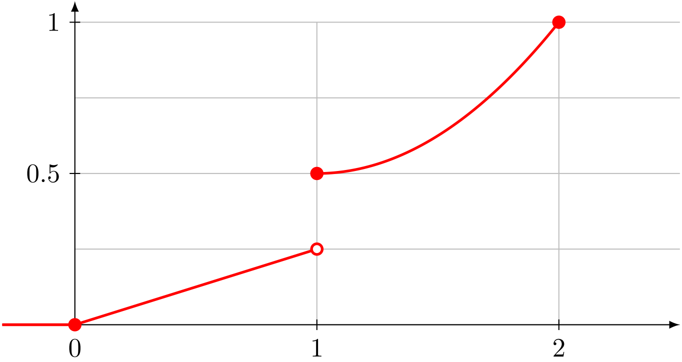
Considérons le fonction de répartition d'une variable aléatoire X définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{4} \text{ si } 0 < x < 1 \\ \frac{x^2}{2} - x + 1 \text{ si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 \text{ si } 2 < x \end{cases}$$



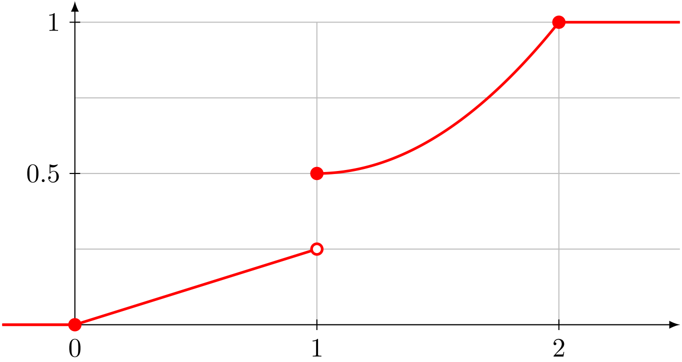
Considérons le fonction de répartition d'une variable aléatoire X définie par :

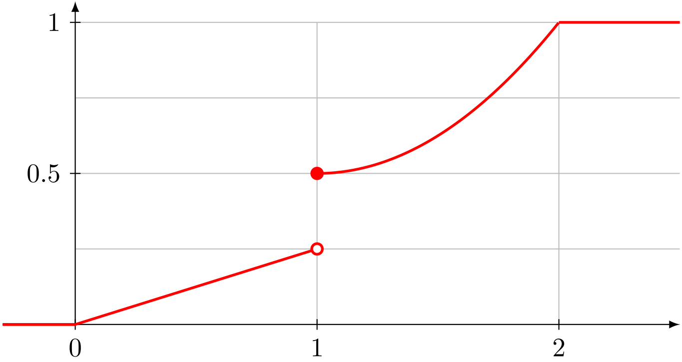
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{4} \text{ si } 0 < x < 1 \\ \frac{x^2}{2} - x + 1 \text{ si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 \text{ si } 2 < x \end{cases}$$



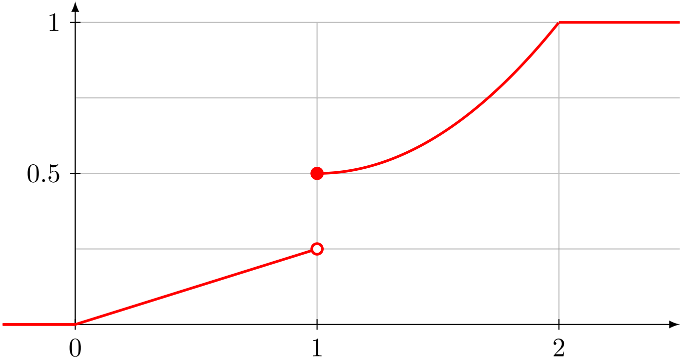
Considérons le fonction de répartition d'une variable aléatoire X définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{4} \text{ si } 0 < x < 1 \\ \frac{x^2}{2} - x + 1 \text{ si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ \color{red}{1 \text{ si } 2 < x} \end{cases}$$

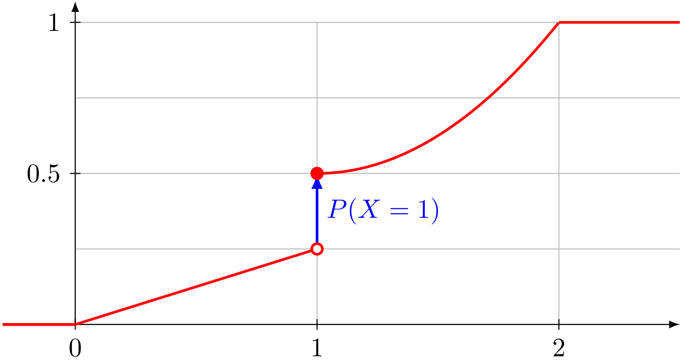




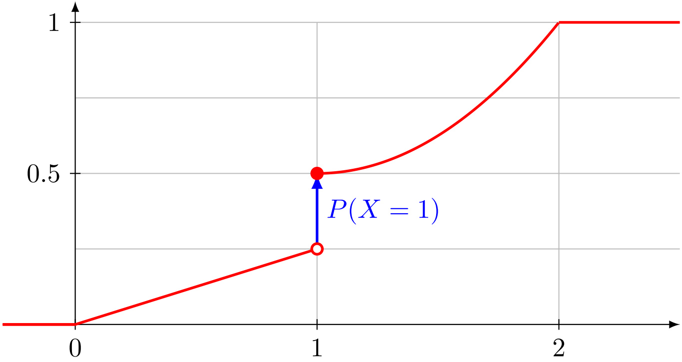
☞ $P(X = 1) =$



☞ $P(X=1) = \boldsymbol{F_X(1) - F_X(1^-) =}$

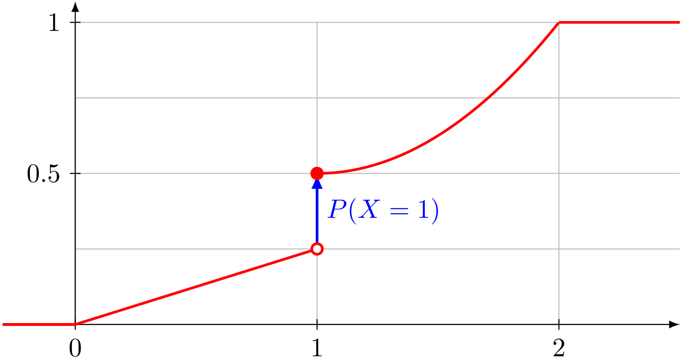


☞ $P(X = 1) = \boldsymbol{F_X(1) - F_X(1^-) = 0,5 - 0,25 = 0,25}$



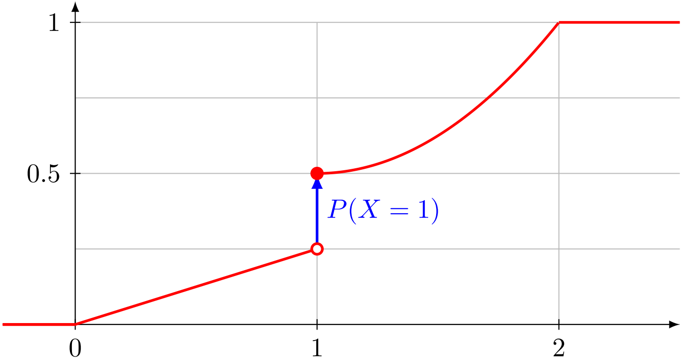
☞ $P(X = 1) = \boldsymbol{F_X(1) - F_X\left(1^-\right) = 0,5 - 0,25 = 0,25}$

☞ $P(X = 2) =$



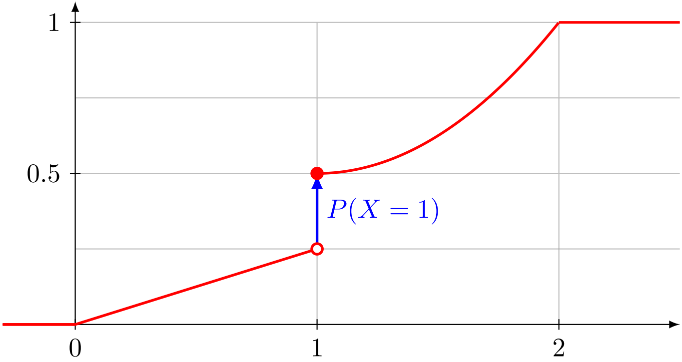
☞ $P(X=1) = \boldsymbol{F_X(1) - F_X\left(1^-\right) = 0,5 - 0,25 = 0,25}$

☞ $P(X=2) = \boldsymbol{F_X(2) - F_X\left(2^-\right) =}$



☞ $P(X=1) = \boldsymbol{F_X(1) - F_X\left(1^-\right) = 0,5 - 0,25 = 0,25}$

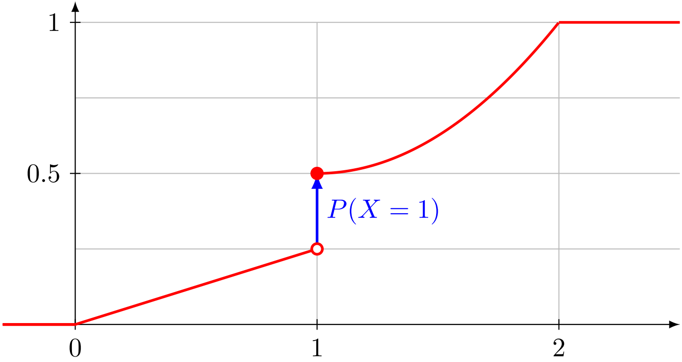
☞ $P(X=2) = \boldsymbol{F_X(2) - F_X\left(2^-\right) = 1 - 1 = 0}$



☞ $P(X=1) = \boldsymbol{F_X(1) - F_X\left(1^-\right) = 0,5 - 0,25 = 0,25}$

☞ $P(X=2) = \boldsymbol{F_X(2) - F_X\left(2^-\right) = 1 - 1 = 0}$

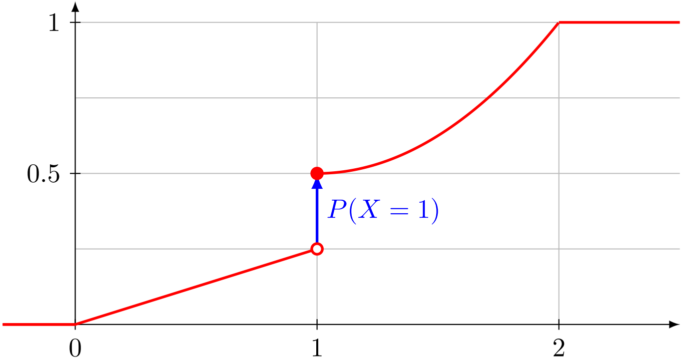
Si la fonction de répartition F_X est continue en a alors $P(X=a) =$



☞ $P(X=1) = \boldsymbol{F_X(1) - F_X\left(1^-\right) = 0,5 - 0,25 = 0,25}$

☞ $P(X=2) = \boldsymbol{F_X(2) - F_X\left(2^-\right) = 1 - 1 = 0}$

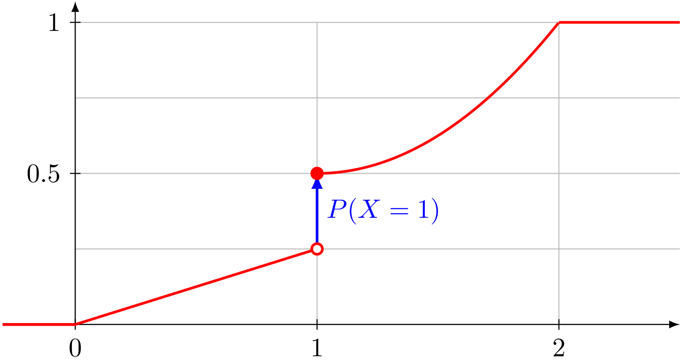
Si la fonction de répartition F_X est continue en a alors $P(X=a) = \mathbf{0}$



☞ $P(X = 1) = \boldsymbol{F_X(1) - F_X\left(1^-\right) = 0,5 - 0,25 = 0,25}$

☞ $P(X = 2) = \boldsymbol{F_X(2) - F_X\left(2^-\right) = 1 - 1 = 0}$

Si la fonction de répartition F_X est continue en a alors $P(X = a) = \mathbf{0}$, par contre, où elle n'est pas continue $P(X = a) =$



☞ $P(X=1) = \boldsymbol{F_X(1) - F_X(1^-) = 0,5 - 0,25 = 0,25}$

☞ $P(X=2) = \boldsymbol{F_X(2) - F_X(2^-) = 1 - 1 = 0}$

Si la fonction de répartition F_X est continue en a alors $P(X=a) = \mathbf{0}$, par contre, où elle n'est pas continue $P(X=a) =$ **« saut de discontinuité »**.

Définition:

Si la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X est

Définition:

Si la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X est

- continue sur $\mathbb{R}$, alors la loi est **absolument continue**. On dit aussi **diffuse**

Définition:

Si la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X est

- continue sur $\mathbb{R}$, alors la loi est **absolument continue**. On dit aussi **diffuse**
- discontinue en un nombre fini de points, alors la loi est **mixte** : elle a une partie continue et une partie discrète.

2. Loi absolument continue

2. Loi absolument continue

Considérons le fonction de répartition d'une variable aléatoire X définie par :

2. Loi absolument continue

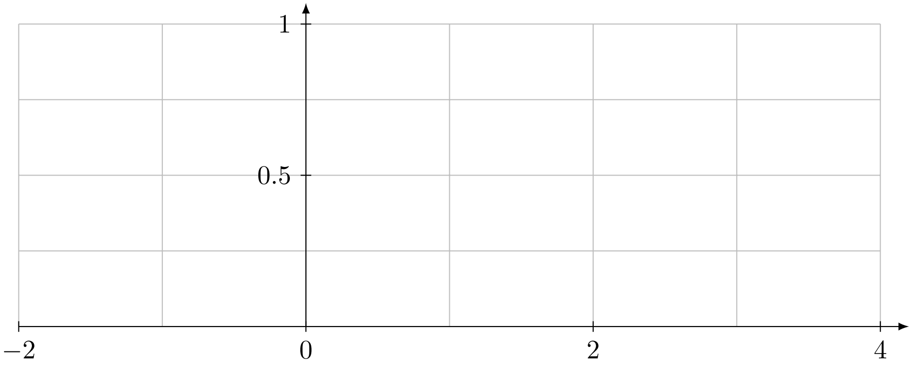
Considérons le fonction de répartition d'une variable aléatoire X définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

2. Loi absolument continue

Considérons le fonction de répartition d'une variable aléatoire X définie par :

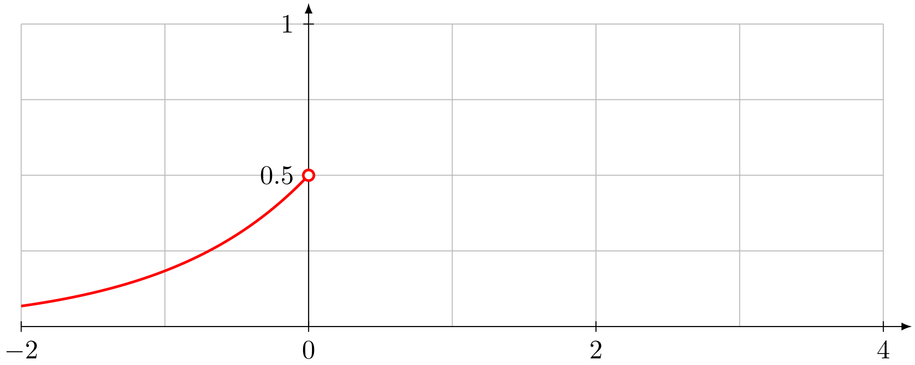
$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$



2. Loi absolument continue

Considérons le fonction de répartition d'une variable aléatoire X définie par :

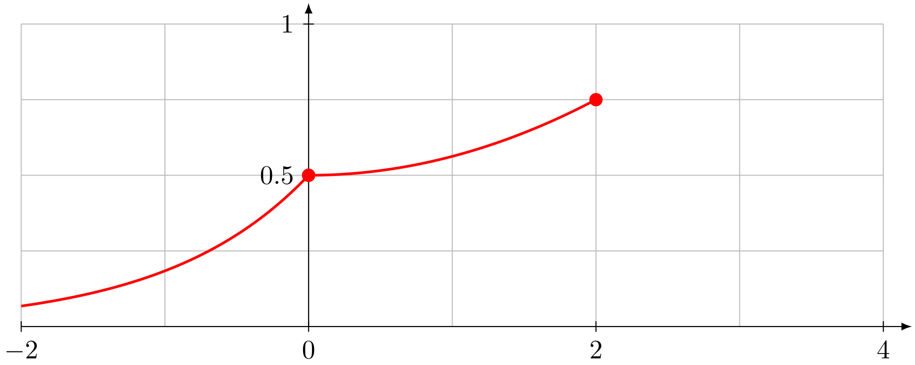
$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$



2. Loi absolument continue

Considérons le fonction de répartition d'une variable aléatoire X définie par :

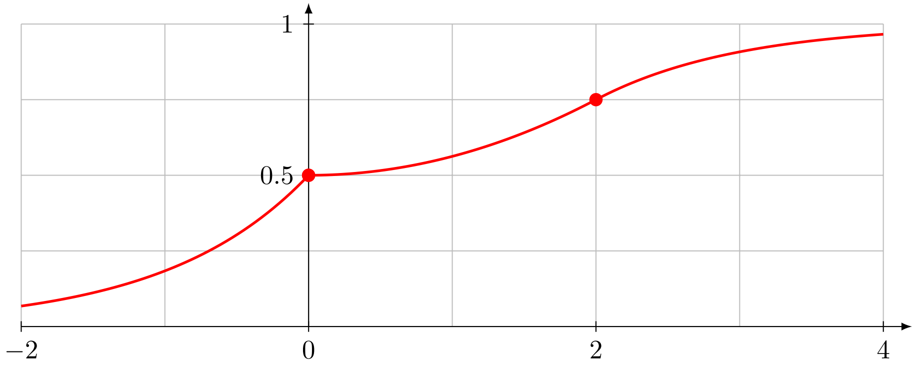
$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

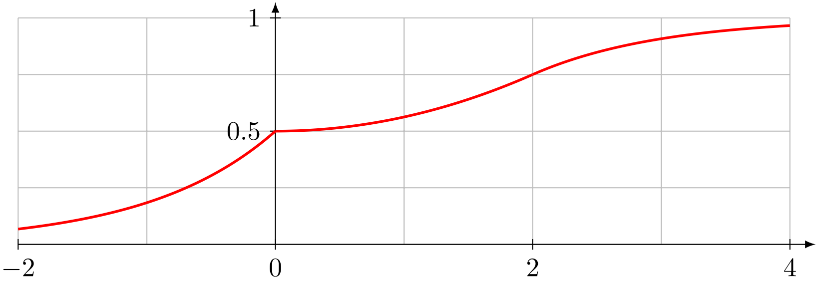


2. Loi absolument continue

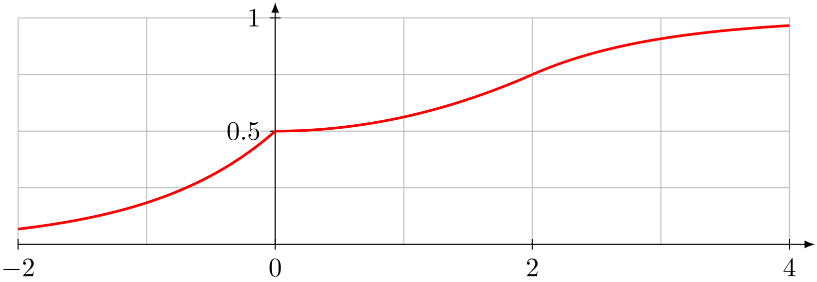
Considérons le fonction de répartition d'une variable aléatoire X définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

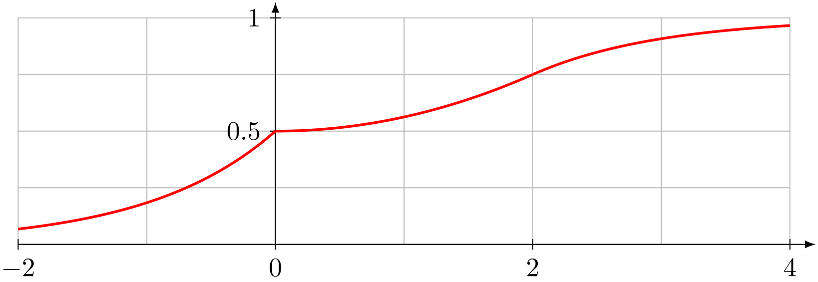




On voit que la loi de probabilité est diffuse :



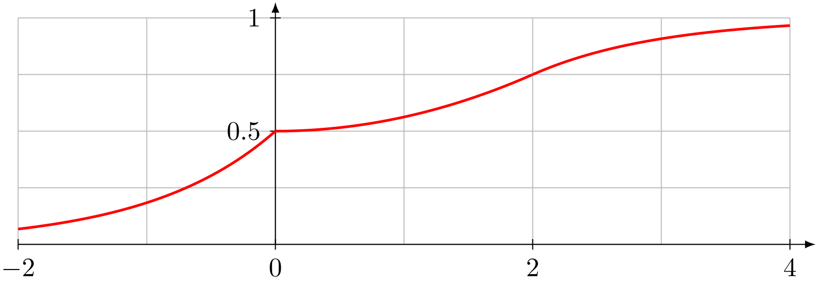
On voit que la loi de probabilité est diffuse : $\forall a \in \mathbb{R}, P(X = a) = 0$ (Elle n'a aucune composante discrète).



On voit que la loi de probabilité est diffuse : $\forall a \in \mathbb{R}, P(X = a) = 0$ (Elle n'a aucune composante discrète).

La valeur moyenne de la probabilité d'un intervalle de longueur $h > 0$ est

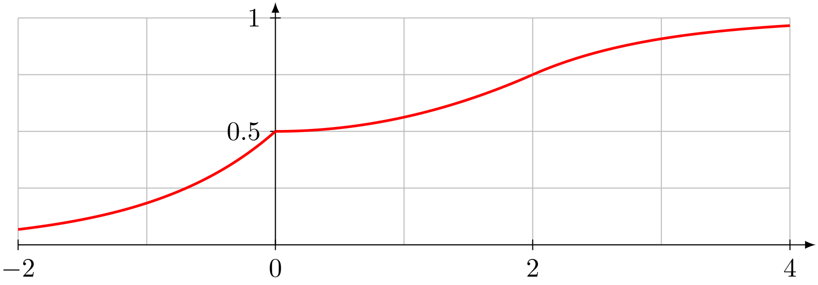
$$\frac{1}{h}P(x < X \leqslant x + h) =$$



On voit que la loi de probabilité est diffuse : $\forall a \in \mathbb{R}, P(X = a) = 0$ (Elle n'a aucune composante discrète).

La valeur moyenne de la probabilité d'un intervalle de longueur $h > 0$ est

$$\frac{1}{h} P(x < X \leqslant x + h) = \frac{F_X(x + h) - F_X(x)}{h}$$

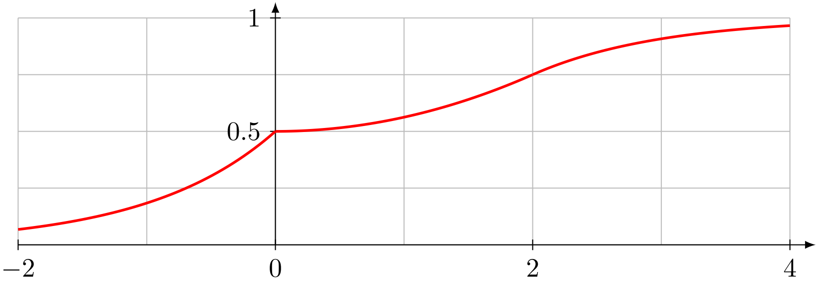


On voit que la loi de probabilité est diffuse : $\forall a \in \mathbb{R}, P(X = a) = 0$ (Elle n'a aucune composante discrète).

La valeur moyenne de la probabilité d'un intervalle de longueur $h > 0$ est

$$\frac{1}{h} P(x < X \leqslant x + h) = \frac{F_X(x+h) - F_X(x)}{h}$$

Elle représente la « **densité moyenne**» de probabilité sur cet intervalle dans la mesure où elle est le poids de la probabilité de l'intervalle divisé par sa longueur.



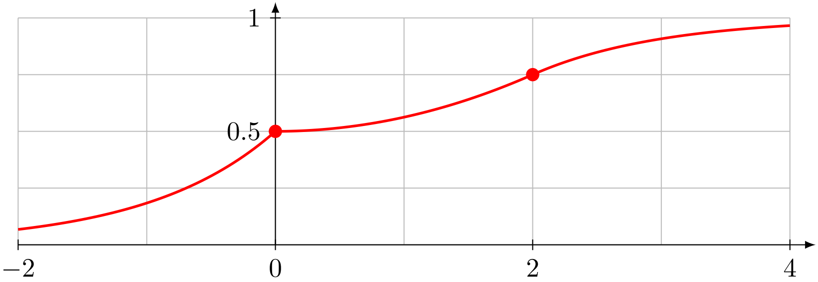
On voit que la loi de probabilité est diffuse : $\forall a \in \mathbb{R}, P(X = a) = 0$ (Elle n'a aucune composante discrète).

La valeur moyenne de la probabilité d'un intervalle de longueur $h > 0$ est

$$\frac{1}{h} P(x < X \leqslant x + h) = \frac{F_X(x+h) - F_X(x)}{h}$$

Elle représente la « **densité moyenne**» de probabilité sur cet intervalle dans la mesure où elle est le poids de la probabilité de l'intervalle divisé par sa longueur.

Si on fait tendre cette longueur vers 0, la limite, si elle existe, représentera la probabilité d'un intervalle de longueur infiniment petite $\mathrm{d}x$.

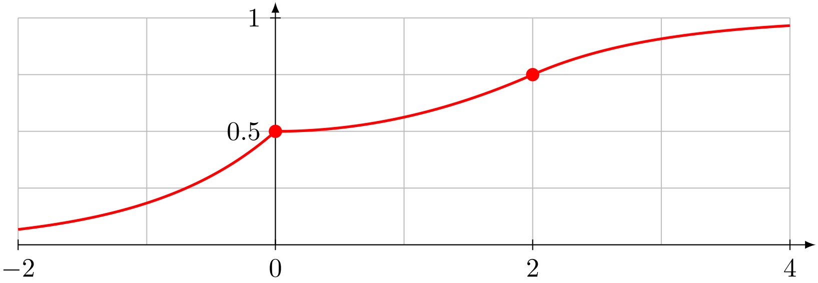


La valeur moyenne de la probabilité d'un intervalle de longueur $h > 0$ est

$$\frac{1}{h}P(x < X \leqslant x + h) = \frac{F_X(x+h) - F_X(x)}{h}$$

Elle représente la « **densité moyenne**» de probabilité sur cet intervalle dans la mesure où elle est le poids de la probabilité de l'intervalle divisé par sa longueur.

Si on fait tendre cette longueur vers 0, la limite, si elle existe, représentera la probabilité d'un intervalle de longueur infiniment petite $\mathrm{d}x$.

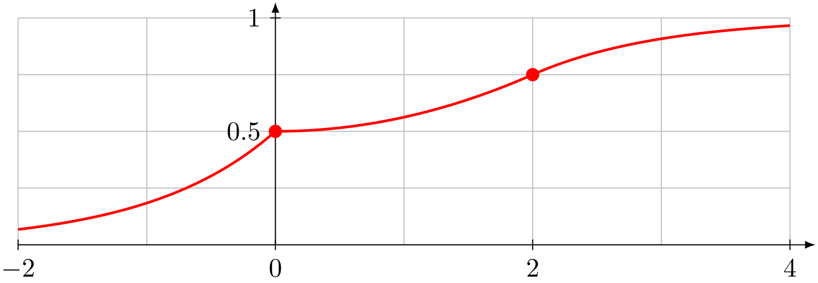


La valeur moyenne de la probabilité d'un intervalle de longueur $h > 0$ est

$$\frac{1}{h}P(x < X \leqslant x+h) = \frac{F_X(x+h) - F_X(x)}{h}$$

Elle représente la « **densité moyenne**» de probabilité sur cet intervalle dans la mesure où elle est le poids de la probabilité de l'intervalle divisé par sa longueur.

Si on fait tendre cette longueur vers 0, la limite, si elle existe, représentera la probabilité d'un intervalle de longueur infiniment petite $\mathrm{d}x$. Ce sera la dérivée f de F_X :



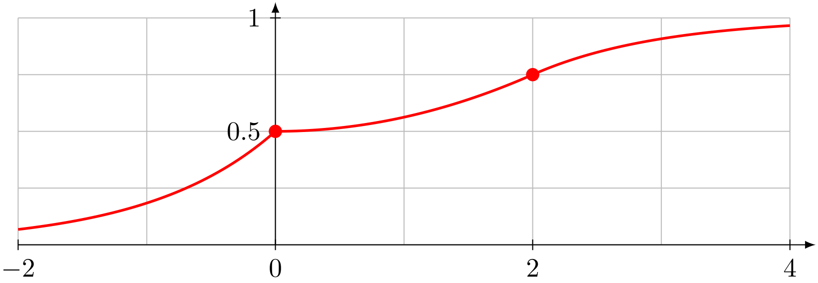
La valeur moyenne de la probabilité d'un intervalle de longueur $h > 0$ est

$$\frac{1}{h} P(x < X \leqslant x + h) = \frac{F_X(x+h) - F_X(x)}{h}$$

Elle représente la « **densité moyenne**» de probabilité sur cet intervalle dans la mesure où elle est le poids de la probabilité de l'intervalle divisé par sa longueur.

Si on fait tendre cette longueur vers 0, la limite, si elle existe, représentera la probabilité d'un intervalle de longueur infiniment petite $\mathrm{d}x$. Ce sera la dérivée f de F_X :

$$\lim_{h \to 0} \frac{F_X(x+h) - F_X(x)}{h} \overset{\text{def}}{=}$$



La valeur moyenne de la probabilité d'un intervalle de longueur $h > 0$ est

$$\frac{1}{h}P(x < X \leqslant x+h) = \frac{F_X(x+h) - F_X(x)}{h}$$

Elle représente la « **densité moyenne**» de probabilité sur cet intervalle dans la mesure où elle est le poids de la probabilité de l'intervalle divisé par sa longueur.

Si on fait tendre cette longueur vers 0, la limite, si elle existe, représentera la probabilité d'un intervalle de longueur infiniment petite $\mathrm{d}x$. Ce sera la dérivée f de F_X :

$$\lim_{h\to 0} \frac{F_X(x+h) - F_X(x)}{h} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{F'_X(x) = f(x)}$$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en $\mathbf{0}$ et peut-être en

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en $\mathbf{0}$ et peut-être en $\mathbf{2}$:

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en $\mathbf{0}$ et peut-être en $\mathbf{2}$:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F_X'(x) = \begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en $\mathbf{0}$ et peut-être en $\mathbf{2}$:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F_X'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \\ \\ \end{cases}$$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en **0** et peut-être en **2** :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 2 \\ \end{cases}$$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en **0** et peut-être en **2** :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F_X'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en **0** et peut-être en **2** :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F_X'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ et

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en $\mathbf{0}$ et peut-être en $\mathbf{2}$:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ et

- $f\left(0^-\right) =$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en **0** et peut-être en **2** :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ et

- $f\left(0^-\right) = F'g(0) =$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en **0** et peut-être en **2** :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ et

- $f\left(0^-\right) = F'g(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0}{2} =$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en **0** et peut-être en **2** :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ et

- $f\left(0^-\right) = F'g(0) = \dfrac{e^0}{2} = \dfrac{1}{2}$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en $\mathbf{0}$ et peut-être en $\mathbf{2}$:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ et

- $f\left(0^-\right) = F'g(0) = \dfrac{e^0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(0^+\right) =$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en **0** et peut-être en **2** :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F_X'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ et

- $f\left(0^-\right) = F'g(0) = \dfrac{e^0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(0^+\right) = F'd(0) =$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en **0** et peut-être en **2** :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ et

- $f\left(0^-\right) = F'g(0) = \dfrac{e^0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(0^+\right) = F'd(0) = \dfrac{0}{8} =$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en **0** et peut-être en **2** :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F_X'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ et

- $f\left(0^-\right) = F'g(0) = \dfrac{e^0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(0^+\right) = F'd(0) = \dfrac{0}{8} = 0$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en **0** et peut-être en **2** :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ et

- $f(0^-) = F'g(0) = \dfrac{e^0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f(0^+) = F'd(0) = \dfrac{0}{8} = 0$
- $f(2^-) =$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en **0** et peut-être en **2** :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ et

- $f\left(0^-\right) = F'g(0) = \dfrac{e^0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(0^+\right) = F'd(0) = \dfrac{0}{8} = 0$
- $f\left(2^-\right) = F'g(2) =$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en **0** et peut-être en **2** :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F_X'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ et

- $f\left(0^-\right) = F'g(0) = \dfrac{e^0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(0^+\right) = F'd(0) = \dfrac{0}{8} = 0$
- $f\left(2^-\right) = F'g(2) = \dfrac{2}{8} =$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en **0** et peut-être en **2** :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ et

- $f\left(0^-\right) = F'g(0) = \dfrac{e^0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(0^+\right) = F'd(0) = \dfrac{0}{8} = 0$
- $f\left(2^-\right) = F'g(2) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en **0** et peut-être en **2** :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F_X'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0;2\}$ et

- $f\left(0^-\right) = F'g(0) = \dfrac{e^0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(0^+\right) = F'd(0) = \dfrac{0}{8} = 0$
- $f\left(2^-\right) = F'g(2) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ et $f\left(2^+\right) =$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en **0** et peut-être en **2** :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F_X'(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0;2\}$ et

- $f\left(0^-\right) = F'g(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(0^+\right) = F'd(0) = \dfrac{0}{8} = 0$
- $f\left(2^-\right) = F'g(2) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ et $f\left(2^+\right) = F'd(2) =$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en **0** et peut-être en **2** :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ et

- $f(0^-) = F'g(0) = \dfrac{e^0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f(0^+) = F'd(0) = \dfrac{0}{8} = 0$
- $f(2^-) = F'g(2) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ et $f(2^+) = F'd(2) = \dfrac{1}{4}e^{2-2} =$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en **0** et peut-être en **2** :

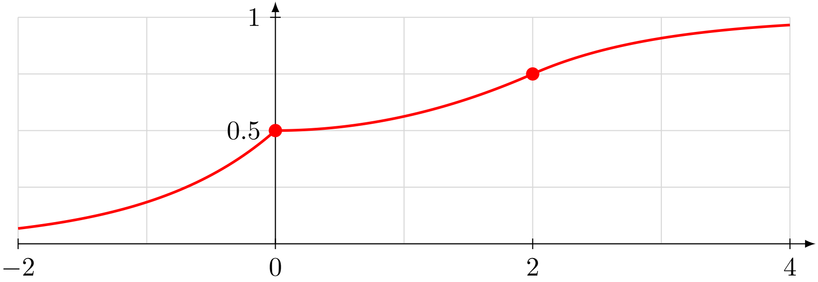
$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{donc } f(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ et

- $f\left(0^-\right) = F'g(0) = \dfrac{e^0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(0^+\right) = F'd(0) = \dfrac{0}{8} = 0$
- $f\left(2^-\right) = F'g(2) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ et $f\left(2^+\right) = F'd(2) = \dfrac{1}{4}e^{2-2} = \dfrac{1}{4}$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0;2\}$ et

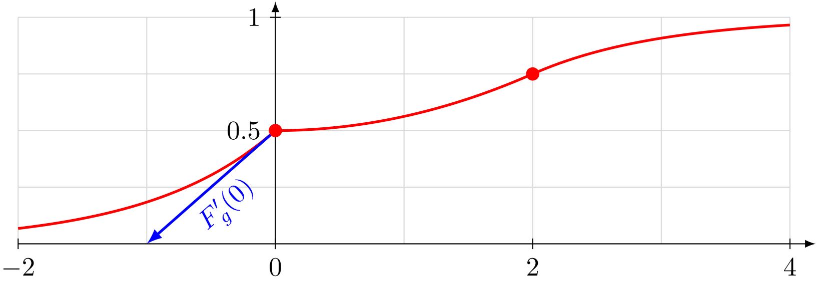
- $f\left(0^-\right) = F'g(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(0^+\right) = F'd(0) = \dfrac{0}{8} = 0$
- $f\left(2^-\right) = F'g(2) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ et $f\left(2^+\right) = F'd(2) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2-2} = \dfrac{1}{4}$



On constate que F_X est dérivable en ...

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0;2\}$ et

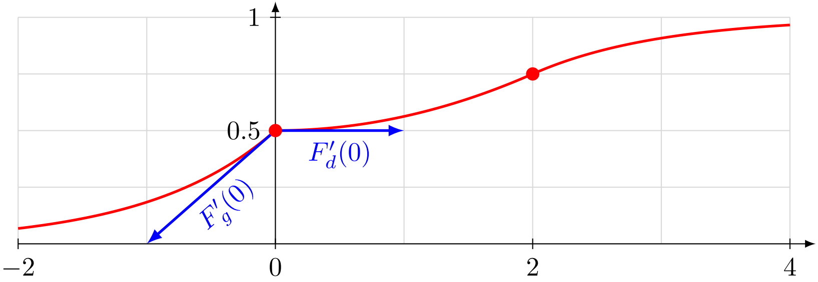
- $f\left(0^-\right) = F'g(0) = \dfrac{e^0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(0^+\right) = F'd(0) = \dfrac{0}{8} = 0$
- $f\left(2^-\right) = F'g(2) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ et $f\left(2^+\right) = F'd(2) = \dfrac{1}{4}e^{2-2} = \dfrac{1}{4}$



On constate que F_X est dérivable en ...

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ et

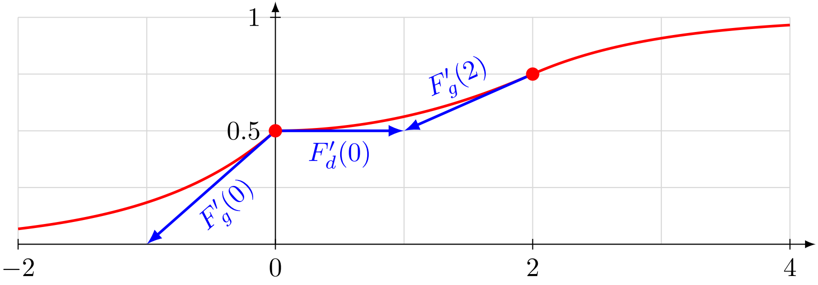
- $f\left(0^-\right) = F'g(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(0^+\right) = F'd(0) = \dfrac{0}{8} = 0$
- $f\left(2^-\right) = F'g(2) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ et $f\left(2^+\right) = F'd(2) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2-2} = \dfrac{1}{4}$



On constate que F_X est dérivable en ...

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0;2\}$ et

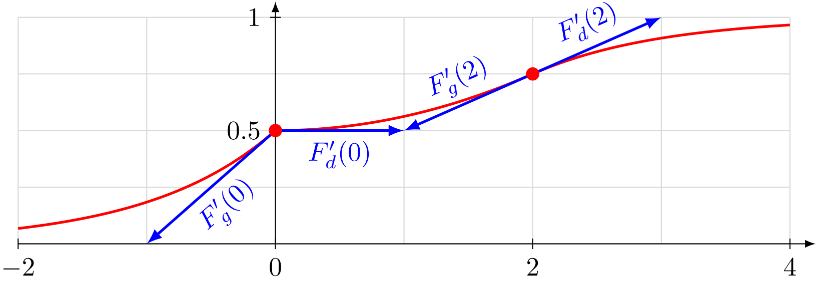
- $f\left(0^-\right) = F'g(0) = \dfrac{e^0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(0^+\right) = F'd(0) = \dfrac{0}{8} = 0$
- $f\left(2^-\right) = F'g(2) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ et $f\left(2^+\right) = F'd(2) = \dfrac{1}{4}e^{2-2} = \dfrac{1}{4}$



On constate que F_X est dérivable en ...

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ et

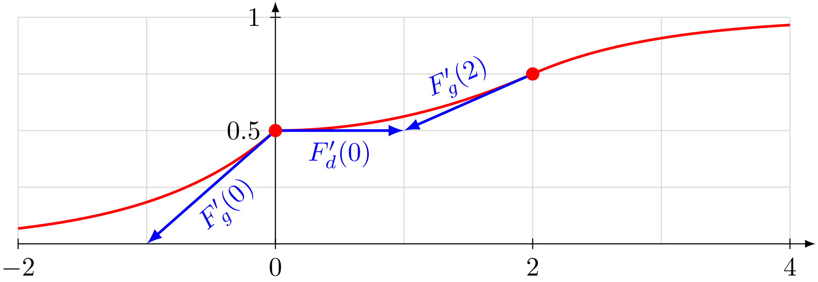
- $f\left(0^-\right) = F'g(0) = \dfrac{e^0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(0^+\right) = F'd(0) = \dfrac{0}{8} = 0$
- $f\left(2^-\right) = F'g(2) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ et $f\left(2^+\right) = F'd(2) = \dfrac{1}{4}e^{2-2} = \dfrac{1}{4}$



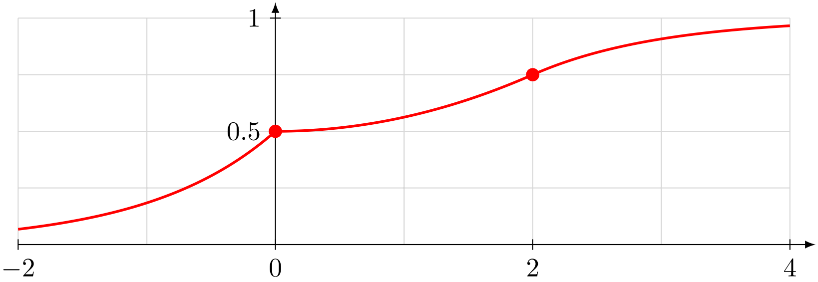
On constate que F_X est dérivable en ...

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0;2\}$ et

- $f\left(0^-\right) = F'g(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(0^+\right) = F'd(0) = \dfrac{0}{8} = 0$
- $f\left(2^-\right) = F'g(2) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ et $f\left(2^+\right) = F'd(2) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2-2} = \dfrac{1}{4}$

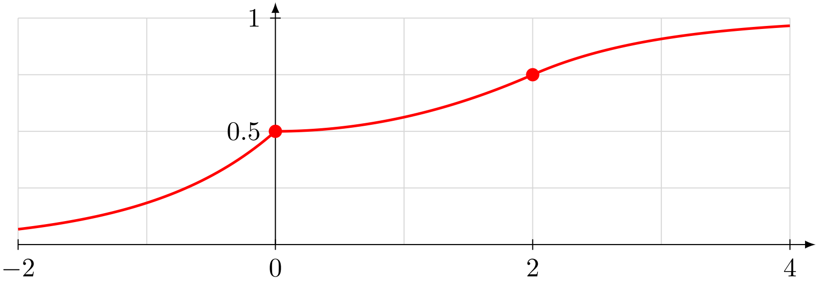


On constate que F_X est dérivable en **2**



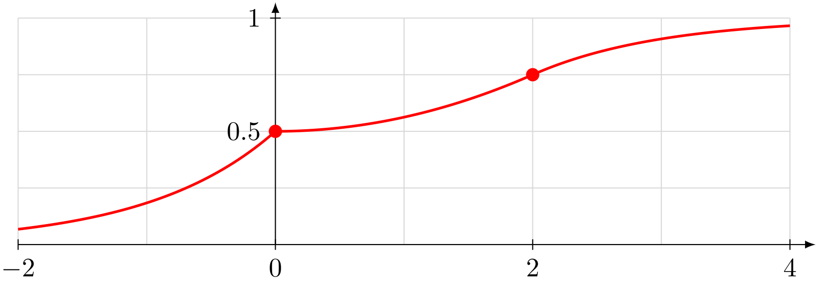
On constate que F_X est dérivable en $\mathbf{2}$ et on peut, par exemple

considérer



On constate que F_X est dérivable en **2** et on peut, par exemple

considérer $f(x) =$



On constate que F_X est dérivable en **2** et on peut, par exemple

considérer $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{8} \text{ si } 0 \leqslant x < 2 \\ \dfrac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x \geqslant 2 \end{cases}$

Définition:

On dit qu'une variable aléatoire réelle X a une densité f si sa fonction de répartition est définie par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Définition:

On dit qu'une variable aléatoire réelle X a une densité f si sa fonction de répartition est définie par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Propriété

Etant une densité f d'une variable aléatoire réelle X, on a :

Définition:

On dit qu'une variable aléatoire réelle X a une densité f si sa fonction de répartition est définie par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Propriété

Etant une densité f d'une variable aléatoire réelle X, on a :

- f est une fonction **positive**

Définition:

On dit qu'une variable aléatoire réelle X a une densité f si sa fonction de répartition est définie par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Propriété

Etant une densité f d'une variable aléatoire réelle X, on a :

- f est une fonction **positive**
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{1}$

Définition:

On dit qu'une variable aléatoire réelle X a une densité f si sa fonction de répartition est définie par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Propriété

Etant une densité f d'une variable aléatoire réelle X, on a :

- f est une fonction **positive**
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{1}$
- $P\big(a \leqslant X \leqslant b\big) = P\big(a < X \leqslant b\big) = P\big(a \leqslant X < b\big) = P\big(a < X < b\big)$
  $\displaystyle = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

3. La loi exponentielle.

3. La loi exponentielle.

Définition:

Une variable aléatoire réelle suit une loi **exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité de probabilité est

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

3. La loi exponentielle.

Définition:

Une variable aléatoire réelle suit une loi **exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité de probabilité est

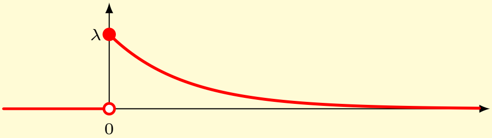
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

3. La loi exponentielle.

Définition:

Une variable aléatoire réelle suit une loi **exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité de probabilité est

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

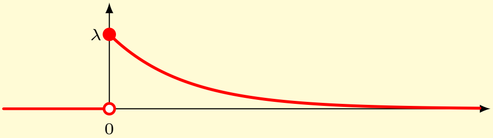


3. La loi exponentielle.

Définition:

Une variable aléatoire réelle suit une loi **exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité de probabilité est

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$



On note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

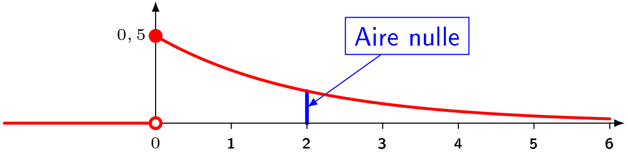
1. $P(T = 2) =$

La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

1. $P(T=2) = \int_2^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x =$

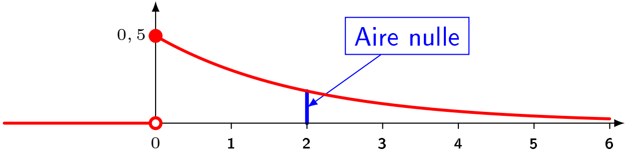
La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

1. $P(T=2) = \int_2^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = 0$



La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

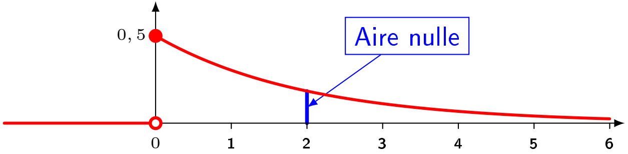
1. $P(T=2) = \int_2^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = 0$



2. $P(T \leqslant 2) =$

La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

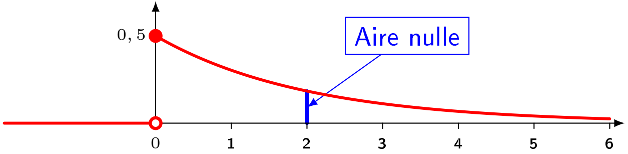
1. $P(T=2) = \int_2^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = 0$



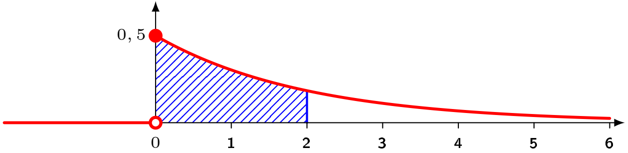
2. $P(T \leqslant 2) = \int_{-\infty}^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x =$

La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

1. $P(T=2) = \int_2^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = 0$

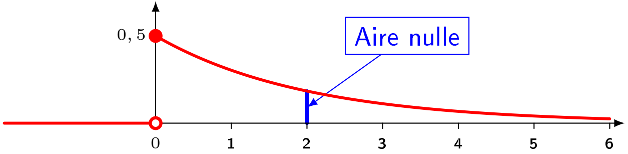


2. $P(T \leqslant 2) = \int_{-\infty}^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x =$

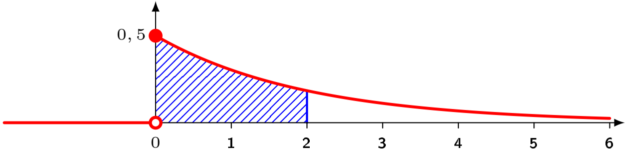


La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

1. $P(T=2) = \int_2^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = 0$

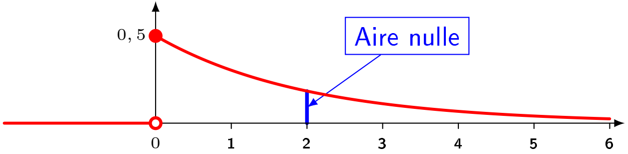


2. $P(T \leqslant 2) = \int_{-\infty}^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x =$



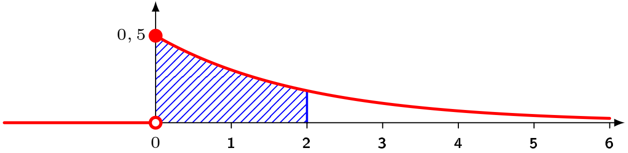
La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

1. $P(T=2) = \int_2^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = 0$



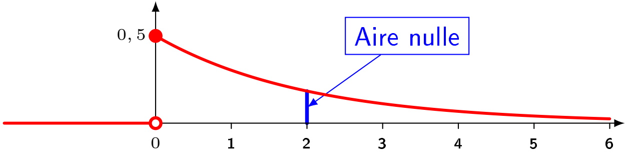
2. $P(T \leqslant 2) = \int_{-\infty}^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{0,5}{-0,5}\mathrm{e}^{-0,5x}\right]_0^2$

$=$



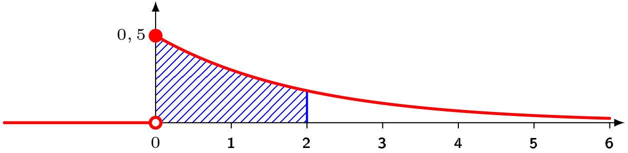
La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

1. $P(T=2) = \int_2^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = 0$



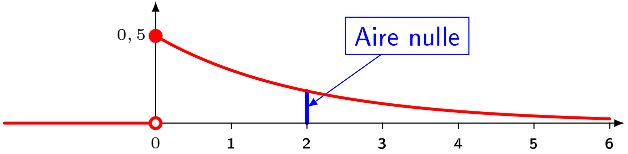
2. $P(T \leqslant 2) = \int_{-\infty}^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{0,5}{-0,5}\mathrm{e}^{-0,5x}\right]_0^2$

$= -\mathrm{e}^{-0,5\times 2} + 1 =$



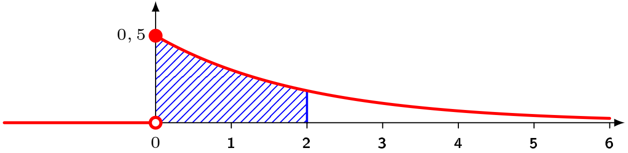
La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

1. $P(T=2) = \int_2^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = 0$



2. $P(T \leqslant 2) = \int_{-\infty}^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{0,5}{-0,5}\mathrm{e}^{-0,5x}\right]_0^2$

$= -\mathrm{e}^{-0,5\times 2} + 1 = -\mathrm{e}^{-1} + 1 \simeq 0,632$

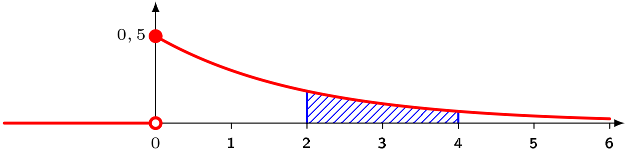


La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

1. $P(2 \leqslant T \leqslant 4) =$

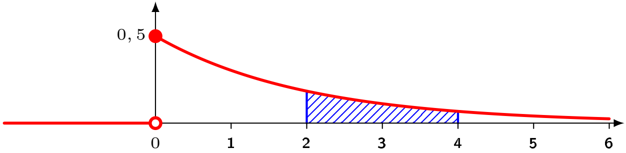
La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

1. $P(2 \leqslant T \leqslant 4) = \displaystyle\int_2^4 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x$



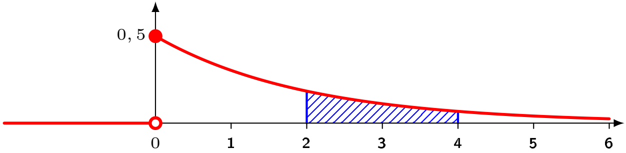
La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

1. $P(2 \leqslant T \leqslant 4) = \int_2^4 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-0,5x}\Big]_2^4 =$



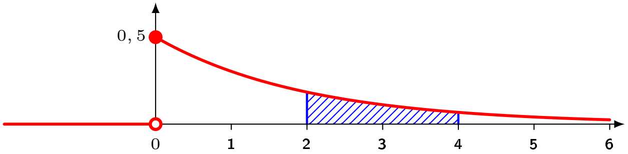
La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

1. $P(2 \leqslant T \leqslant 4) = \int_2^4 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-0,5x}\right]_2^4 = -\mathrm{e}^{-0,5\times 4} - \left(-\mathrm{e}^{-0,5\times 2}\right)$



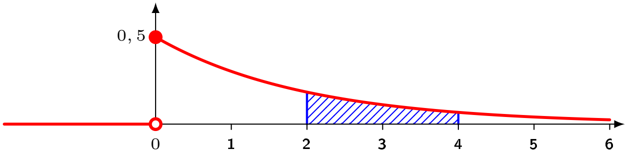
La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

1. $P(2 \leqslant T \leqslant 4) = \int_2^4 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-0,5x}\right]_2^4 = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} \simeq 0,233$



La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

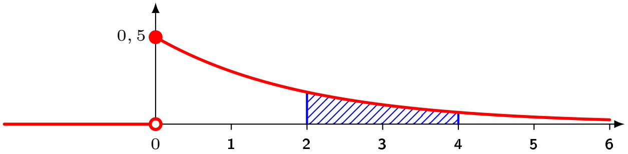
1. $P(2 \leqslant T \leqslant 4) = \displaystyle\int_2^4 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-0,5x}\Big]_2^4 = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} \simeq 0,233$



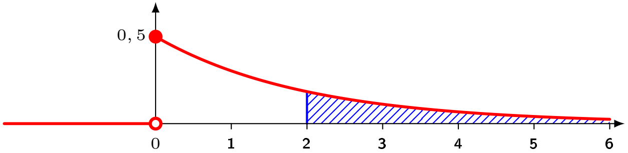
2. $P(T \geqslant 2) =$

La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

1. $P(2 \leqslant T \leqslant 4) = \displaystyle\int_2^4 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-0,5x}\right]_2^4 = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} \simeq 0,233$

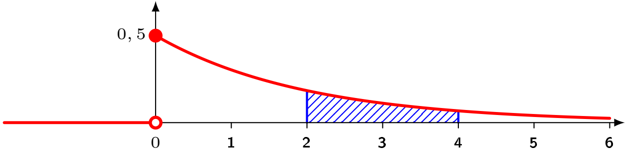


2. $P(T \geqslant 2) =$
$\displaystyle\int_2^{+\infty} 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x =$

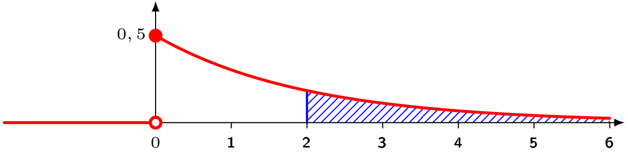


La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

1. $P(2 \leqslant T \leqslant 4) = \displaystyle\int_2^4 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-0,5x}\Big]_2^4 = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} \simeq 0,233$

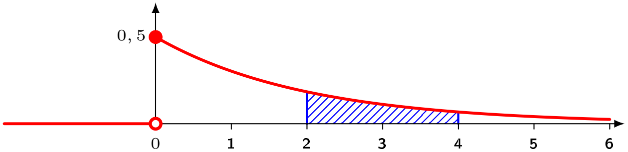


2. $P(T \geqslant 2) =$
$\displaystyle\int_2^{+\infty} 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-0,5x}\Big]_2^{+\infty} =$

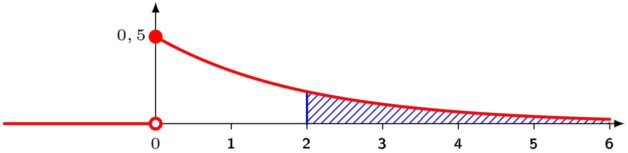


La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

1. $P(2 \leqslant T \leqslant 4) = \int_2^4 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-0,5x}\right]_2^4 = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} \simeq 0,233$

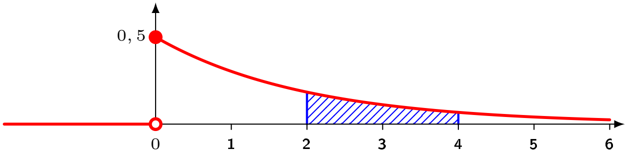


2. $P(T \geqslant 2) =$
$\int_2^{+\infty} 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-0,5x}\right]_2^{+\infty} = \left(-\mathrm{e}^{-\infty}\right) - \left(-\mathrm{e}^{-1}\right) =$

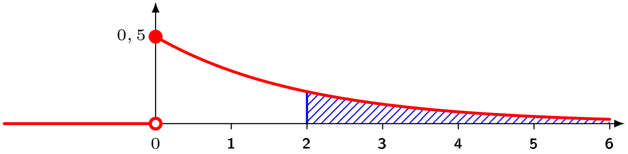


La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

1. $P(2 \leqslant T \leqslant 4) = \displaystyle\int_2^4 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-0,5x}\right]_2^4 = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} \simeq 0,233$



2. $P(T \geqslant 2) =$
$\displaystyle\int_2^{+\infty} 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-0,5x}\right]_2^{+\infty} = \left(-\mathrm{e}^{-\infty}\right) - \left(-\mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1} \simeq 0,368$



On calcule l'espérance en intégrant par parties :

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) =$$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x =$$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x =$$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

De même en intégrant par parties :

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

De même en intégrant par parties :

$$E(X^2) =$$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

De même en intégrant par parties :

$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x =$$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

De même en intégrant par parties :

$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

De même en intégrant par parties :

$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\lambda}E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

De même en intégrant par parties :

$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\lambda}E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

D'où $V(X) =$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

De même en intégrant par parties :

$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\lambda}E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

D'où $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

De même en intégrant par parties :

$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\lambda}E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

D'où $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} =$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

De même en intégrant par parties :

$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\lambda}E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

D'où $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$

On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

De même en intégrant par parties :

$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\lambda}E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

D'où $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

Propriété

Si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Pour $x \geqslant 0$, la fonction de répartition F est définie par :

$F(x) = P(X \leqslant x) =$

Pour $x \geqslant 0$, la fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt =$$

Pour $x \geqslant 0$, la fonction de répartition F est définie par :
$F(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$

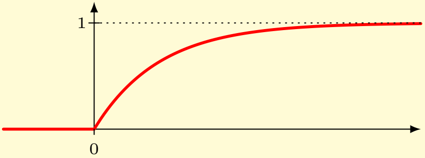
Pour $x \geqslant 0$, la fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

Théorème

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



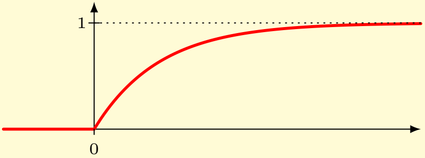
Pour $x \geqslant 0$, la fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Théorème

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Exemple n° 1 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

X. Loi absolument continue

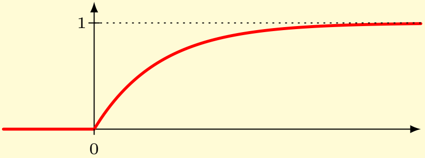
Pour $x \geqslant 0$, la fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Théorème

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



<u>Exemple n° 1 :</u> La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

$P(2 \leqslant T \leqslant 4) =$

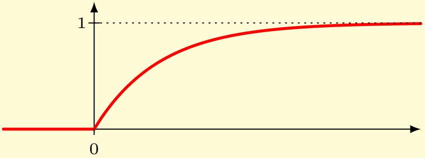
Pour $x \geqslant 0$, la fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Théorème

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Exemple n^o 1 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

$$P(2 \leqslant T \leqslant 4) = F_T(4) - F_T(2)$$

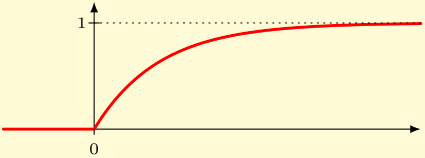
Pour $x \geqslant 0$, la fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Théorème

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Exemple n° 1 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

$$P(2 \leqslant T \leqslant 4) = F_T(4) - F_T(2)$$

$$= 1 - \mathrm{e}^{-0,5\times 4} - \left(1 - \mathrm{e}^{-0,5\times 2}\right) =$$

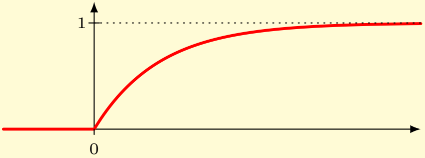
Pour $x \geqslant 0$, la fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Théorème

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Exemple n° 1 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

$$P(2 \leqslant T \leqslant 4) = F_T(4) - F_T(2)$$
$$= 1 - \mathrm{e}^{-0,5\times 4} - \left(1 - \mathrm{e}^{-0,5\times 2}\right) = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} \simeq$$

X. Loi absolument continue

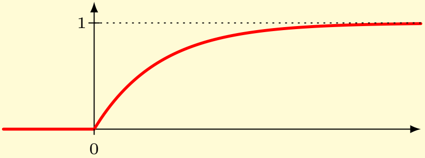
Pour $x \geqslant 0$, la fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Théorème

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Exemple n° 1 : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

$$P(2 \leqslant T \leqslant 4) = F_T(4) - F_T(2)$$

$$= 1 - \mathrm{e}^{-0,5\times 4} - \left(1 - \mathrm{e}^{-0,5\times 2}\right) = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} \simeq 0,233$$

4. La loi uniforme

4. La loi uniforme

Définition:

Une variable aléatoire réelle suit une loi uniforme sur le segment $[a,b]$ si sa **densité** de probabilité est

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a,b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([a,b]\big)$

4. La loi uniforme

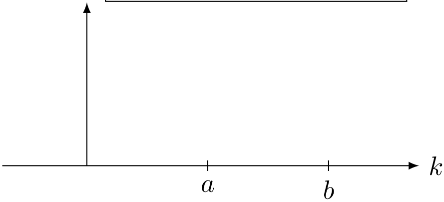
Définition:

Une variable aléatoire réelle suit une loi uniforme sur le segment $[a, b]$ si sa **densité** de probabilité est

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a,b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$

densité de $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$



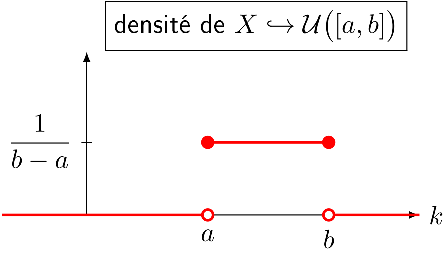
4. La loi uniforme

Définition:

Une variable aléatoire réelle suit une loi uniforme sur le segment $[a,b]$ si sa **densité** de probabilité est

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a,b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$



4. La loi uniforme

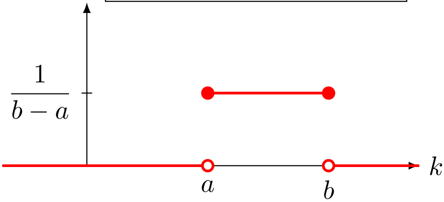
Définition:

Une variable aléatoire réelle suit une loi uniforme sur le segment $[a,b]$ si sa **densité** de probabilité est

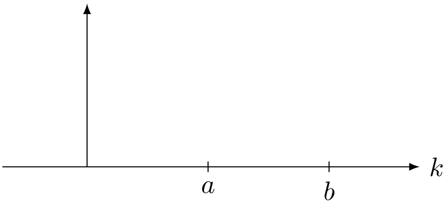
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a,b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$

densité de $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$



Fonction de répartition de X



4. La loi uniforme

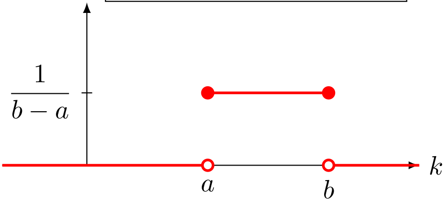
Définition:

Une variable aléatoire réelle suit une loi uniforme sur le segment $[a,b]$ si sa **densité** de probabilité est

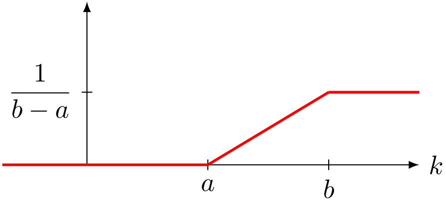
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a,b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$

densité de $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$



Fonction de répartition de X



Propriété

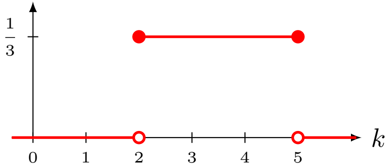
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([a,b]\big)$. On a : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exercice n° 8: Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([2,5]\big)$. Dessine la densité de X et démontre que $E(X) = 3,5$ et que $V(X) = 0,75$

Propriété

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. On a : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exercice n° 8: Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([2,5])$. Dessine la densité de X et démontre que $E(X) = 3,5$ et que $V(X) = 0,75$

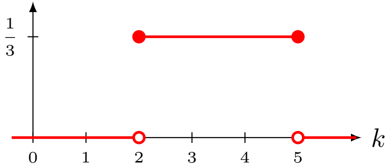


$f(x) =$

Propriété

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([a,b]\big)$. On a : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exercice n° 8: Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([2,5]\big)$. Dessine la densité de X et démontre que $E(X) = 3,5$ et que $V(X) = 0,75$

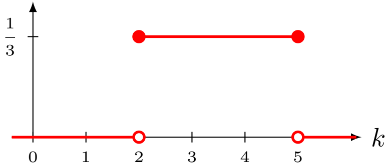


$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \text{ si } x \in [2,5] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Propriété

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. On a : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exercice n° 8: Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([2,5])$. Dessine la densité de X et démontre que $E(X) = 3,5$ et que $V(X) = 0,75$



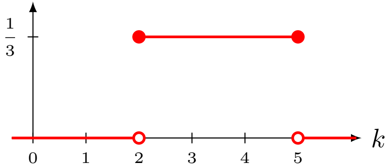
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \text{ si } x \in [2,5] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$E(X) =$

Propriété

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([a,b]\big)$. On a : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exercice n° 8: Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([2,5]\big)$. Dessine la densité de X et démontre que $E(X) = 3,5$ et que $V(X) = 0,75$



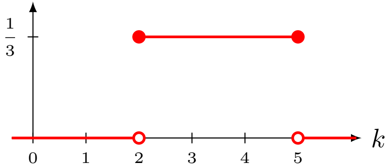
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \text{ si } x \in [2,5] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_2^5 t f(t)\,\mathrm{d}t =$$

Propriété

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. On a : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exercice n° 8: Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([2,5])$. Dessine la densité de X et démontre que $E(X) = 3,5$ et que $V(X) = 0,75$



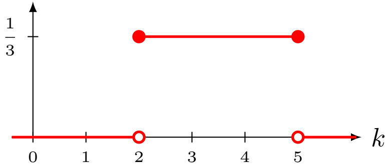
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \text{ si } x \in [2,5] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_2^5 t f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_2^5 t\,\mathrm{d}t =$$

Propriété

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([a,b]\big)$. On a : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exercice n° 8: Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([2,5]\big)$. Dessine la densité de X et démontre que $E(X) = 3,5$ et que $V(X) = 0,75$



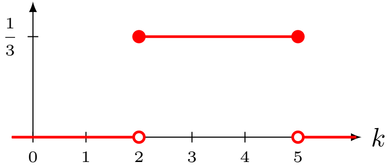
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \text{ si } x \in [2,5] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_2^5 t f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_2^5 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\Big[t^2\Big]_2^5 =$$

Propriété

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. On a : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exercice n° 8: Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([2,5])$. Dessine la densité de X et démontre que $E(X) = 3,5$ et que $V(X) = 0,75$



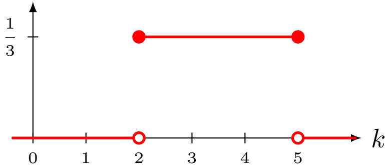
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \text{ si } x \in [2,5] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_2^5 t f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_2^5 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\left[t^2\right]_2^5 = \frac{25-4}{6} = 3,5$$

Propriété

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. On a : $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Exercice n° 8: Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([2,5])$. Dessine la densité de X et démontre que $E(X) = 3,5$ et que $V(X) = 0,75$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{ si } x \in [2,5] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

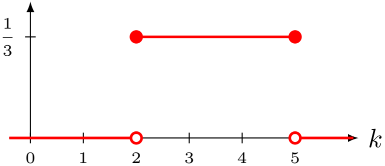
$$E(X) = \int_2^5 t f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_2^5 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\left[t^2\right]_2^5 = \frac{25-4}{6} = 3,5$$

$$E\left(X^2\right) =$$

Propriété

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([a,b]\big)$. On a : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exercice nº 8: Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([2,5]\big)$. Dessine la densité de X et démontre que $E(X) = 3,5$ et que $V(X) = 0,75$



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \text{ si } x \in [2,5] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

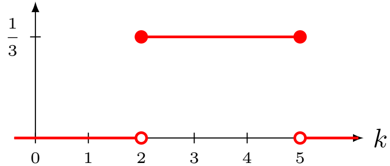
$$E(X) = \int_2^5 t f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_2^5 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\Big[t^2\Big]_2^5 = \frac{25-4}{6} = 3,5$$

$$E\big(X^2\big) = \int_2^5 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t =$$

Propriété

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. On a : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exercice n° 8: Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([2,5])$. Dessine la densité de X et démontre que $E(X) = 3,5$ et que $V(X) = 0,75$



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \text{ si } x \in [2,5] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

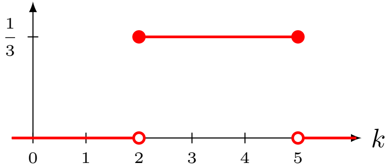
$$E(X) = \int_2^5 t f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_2^5 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\left[t^2\right]_2^5 = \frac{25-4}{6} = 3,5$$

$$E\left(X^2\right) = \int_2^5 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_2^5 t^2\,\mathrm{d}t =$$

Propriété

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. On a : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exercice n° 8: Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([2,5])$. Dessine la densité de X et démontre que $E(X) = 3,5$ et que $V(X) = 0,75$



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \text{ si } x \in [2,5] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

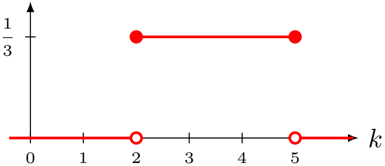
$$E(X) = \int_2^5 t f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_2^5 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\left[t^2\right]_2^5 = \frac{25-4}{6} = 3,5$$

$$E(X^2) = \int_2^5 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_2^5 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\left[t^3\right]_2^5 = \frac{125-8}{9} = 13$$

Propriété

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. On a : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exercice n° 8: Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([2,5])$. Dessine la densité de X et démontre que $E(X) = 3,5$ et que $V(X) = 0,75$



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \text{ si } x \in [2,5] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_2^5 t f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_2^5 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\left[t^2\right]_2^5 = \frac{25-4}{6} = 3,5$$

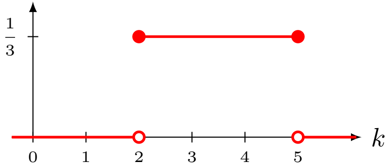
$$E(X^2) = \int_2^5 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_2^5 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\left[t^3\right]_2^5 = \frac{125-8}{9} = 13$$

$$V(X) =$$

Propriété

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. On a : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exercice n° 8: Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([2,5])$. Dessine la densité de X et démontre que $E(X) = 3,5$ et que $V(X) = 0,75$



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \text{ si } x \in [2,5] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_2^5 t f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_2^5 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\left[t^2\right]_2^5 = \frac{25-4}{6} = 3,5$$

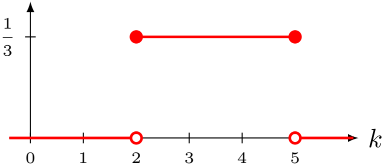
$$E\left(X^2\right) = \int_2^5 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_2^5 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\left[t^3\right]_2^5 = \frac{125-8}{9} = 13$$

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 =$$

Propriété

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([a,b]\big)$. On a : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exercice n° 8: Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([2,5]\big)$. Dessine la densité de X et démontre que $E(X) = 3,5$ et que $V(X) = 0,75$



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \text{ si } x \in [2,5] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_2^5 t f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_2^5 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\Big[t^2\Big]_2^5 = \frac{25-4}{6} = 3,5$$

$$E\big(X^2\big) = \int_2^5 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_2^5 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\Big[t^3\Big]_2^5 = \frac{125-8}{9} = 13$$

$$V(X) = E\big(X^2\big) - E(X)^2 = 13 - 3,5^2 = 0,75$$

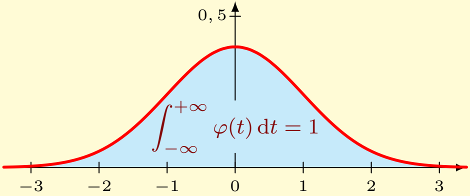
5. Loi de Laplace-Gauss

5. Loi de Laplace-Gauss

Définition:

Une variable aléatoire réelle Z suit une loi **normale centrée réduite** si sa densité de probabilité est

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$



On note $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$

Remarque :

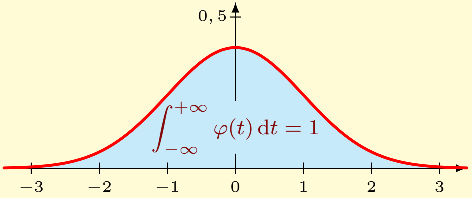
i. φ est une densité, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x =$

5. Loi de Laplace-Gauss

Définition:

Une variable aléatoire réelle Z suit une loi **normale centrée réduite** si sa densité de probabilité est

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$



On note $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$

Remarque :

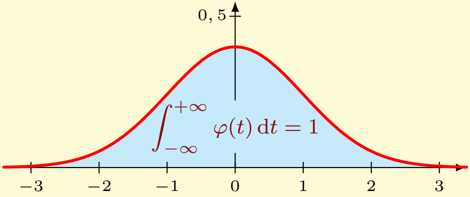
i. φ est une densité, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{\sqrt{2\pi}}$

5. Loi de Laplace-Gauss

Définition:

Une variable aléatoire réelle Z suit une loi **normale centrée réduite** si sa densité de probabilité est

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$



On note $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$

Remarque :

i. φ est une densité, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{\sqrt{2\pi}}$

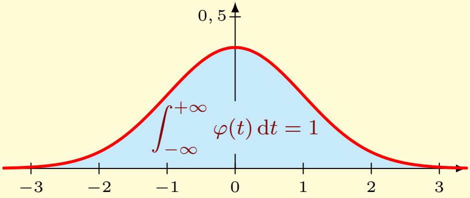
ii. Elle est centrée donc

5. Loi de Laplace-Gauss

Définition:

Une variable aléatoire réelle Z suit une loi **normale centrée réduite** si sa densité de probabilité est

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



On note $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$

Remarque :

i. φ est une densité, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \boldsymbol{\sqrt{2\pi}}$

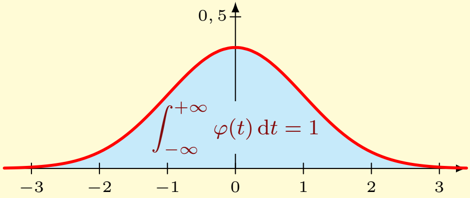
ii. Elle est centrée donc **son espérance est nulle :** $E(Z) = 0$

5. Loi de Laplace-Gauss

Définition:

Une variable aléatoire réelle Z suit une loi **normale centrée réduite** si sa densité de probabilité est

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$



On note $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$

Remarque :

i. φ est une densité, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{\sqrt{2\pi}}$

ii. Elle est centrée donc **son espérance est nulle :** $E(Z) = 0$

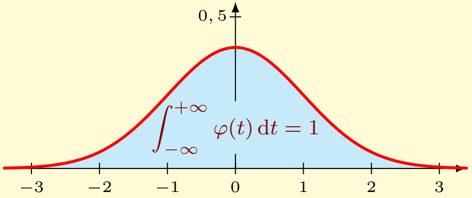
iii. Elle est réduite donc

5. Loi de Laplace-Gauss

Définition:

Une variable aléatoire réelle Z suit une loi **normale centrée réduite** si sa densité de probabilité est

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$



On note $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$

Remarque :

i. φ est une densité, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{\sqrt{2\pi}}$

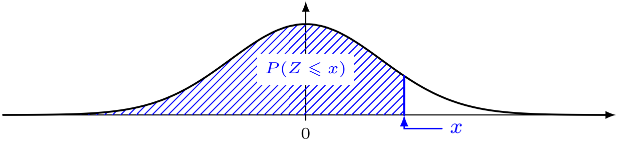
ii. Elle est centrée donc **son espérance est nulle :** $E(Z) = 0$

iii. Elle est réduite donc **son écart-type est égale à 1.**

iv. Pour déterminer les images de la fonction de répartition, on utilise la table donnée en annexe :

iv. Pour déterminer les images de la fonction de répartition, on utilise la table donnée en annexe :

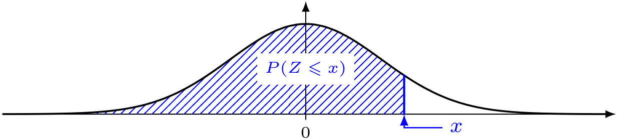
- $P(Z \leqslant 1,27) \simeq$



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	**0,07**	0,0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,53
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,57
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,61
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,83
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,85
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,88
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	**0,8980**	0,89
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,91

iv. Pour déterminer les images de la fonction de répartition, on utilise la table donnée en annexe :

- $P(Z \leqslant 1,27) \simeq \mathbf{0,8980}$



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	**0,07**	0,0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,53
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,57
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,61
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,83
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,85
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,88
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	$\mathbf{0,8980}$	0,89
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,91

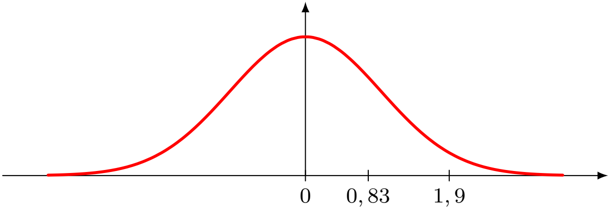
iv. Pour déterminer les images de la fonction de répartition, on utilise la table donnée en annexe :

iv. Pour déterminer les images de la fonction de répartition, on utilise la table donnée en annexe :

- $P(Z \leqslant 1,27) \simeq \mathbf{0,8980}$

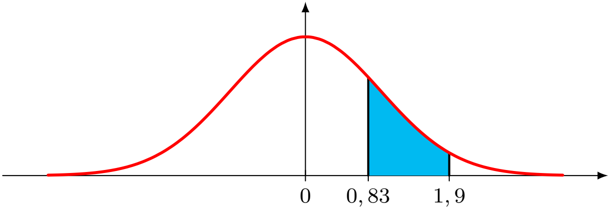
iv. Pour déterminer les images de la fonction de répartition, on utilise la table donnée en annexe :

- $P(Z \leqslant 1,27) \simeq \mathbf{0,8980}$
- $P(0,83 \leqslant Z \leqslant 1,9) =$



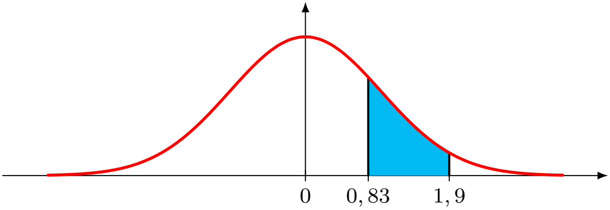
iv. Pour déterminer les images de la fonction de répartition, on utilise la table donnée en annexe :

- $P(Z \leqslant 1,27) \simeq \mathbf{0,8980}$
- $P(0,83 \leqslant Z \leqslant 1,9) = \boldsymbol{P(Z \leqslant 1,9) - P(Z \leqslant 0,83) \simeq}$



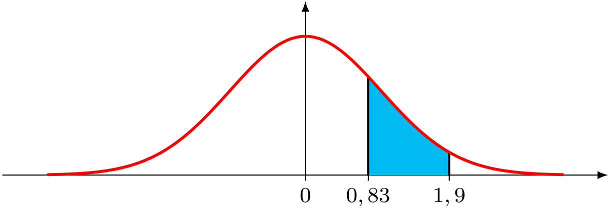
iv. Pour déterminer les images de la fonction de répartition, on utilise la table donnée en annexe :

- $P(Z \leqslant 1,27) \simeq \mathbf{0,8980}$
- $P(0,83 \leqslant Z \leqslant 1,9) = \boldsymbol{P(Z \leqslant 1,9) - P(Z \leqslant 0,83) \simeq 0,9713 - 0,7967 =}$



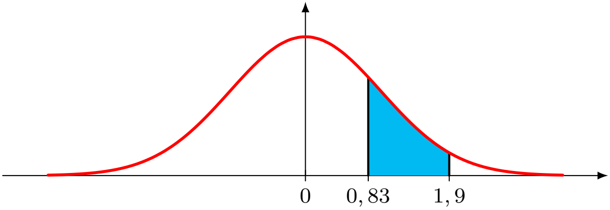
iv. Pour déterminer les images de la fonction de répartition, on utilise la table donnée en annexe :

- $P(Z \leqslant 1,27) \simeq \mathbf{0,8980}$
- $P(0,83 \leqslant Z \leqslant 1,9) = \boldsymbol{P(Z \leqslant 1,9) - P(Z \leqslant 0,83) \simeq 0,1746}$

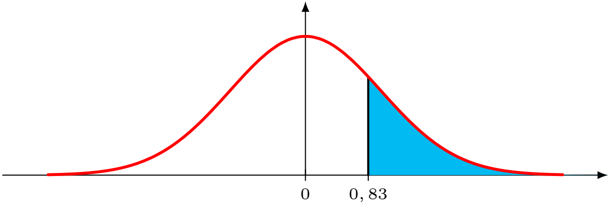


iv. Pour déterminer les images de la fonction de répartition, on utilise la table donnée en annexe :

- $P(Z \leqslant 1,27) \simeq \mathbf{0,8980}$
- $P(0,83 \leqslant Z \leqslant 1,9) = \boldsymbol{P(Z \leqslant 1,9) - P(Z \leqslant 0,83) \simeq 0,1746}$

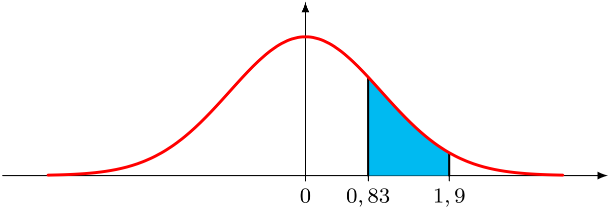


- $P(Z \geqslant 0,83) =$

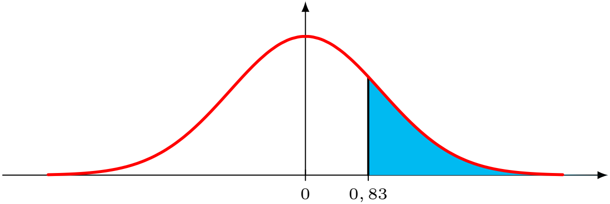


iv. Pour déterminer les images de la fonction de répartition, on utilise la table donnée en annexe :

- $P(Z \leqslant 1,27) \simeq \mathbf{0,8980}$
- $P(0,83 \leqslant Z \leqslant 1,9) = \boldsymbol{P(Z \leqslant 1,9) - P(Z \leqslant 0,83) \simeq 0,1746}$

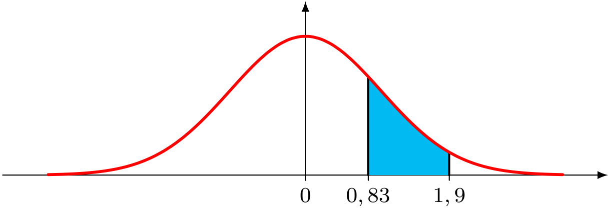


- $P(Z \geqslant 0,83) = \boldsymbol{1 - P(Z < 0,83) =}$

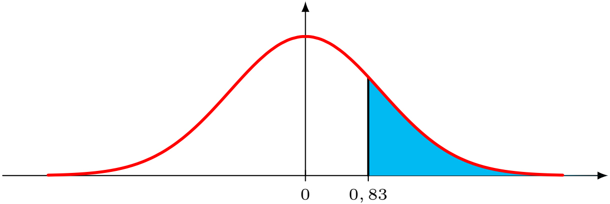


iv. Pour déterminer les images de la fonction de répartition, on utilise la table donnée en annexe :

- $P(Z \leqslant 1,27) \simeq \mathbf{0,8980}$
- $P(0,83 \leqslant Z \leqslant 1,9) = \boldsymbol{P(Z \leqslant 1,9) - P(Z \leqslant 0,83) \simeq 0,1746}$

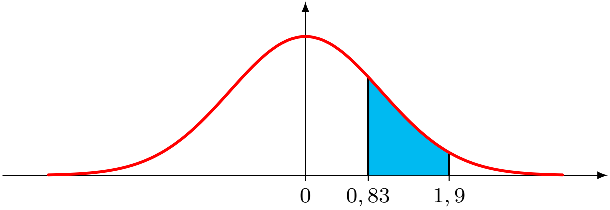


- $P(Z \geqslant 0,83) = \boldsymbol{1 - P(Z < 0,83) = 1 - P(Z \leqslant 0,83) \simeq}$

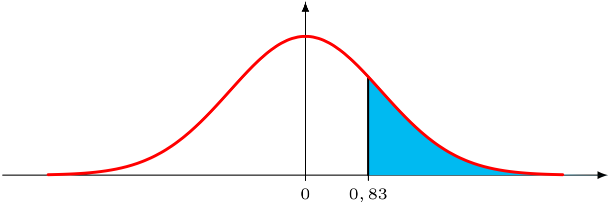


iv. Pour déterminer les images de la fonction de répartition, on utilise la table donnée en annexe :

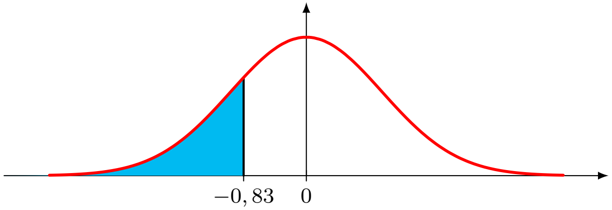
- $P(Z \leqslant 1,27) \simeq \mathbf{0,8980}$
- $P(0,83 \leqslant Z \leqslant 1,9) = \boldsymbol{P(Z \leqslant 1,9) - P(Z \leqslant 0,83) \simeq 0,1746}$



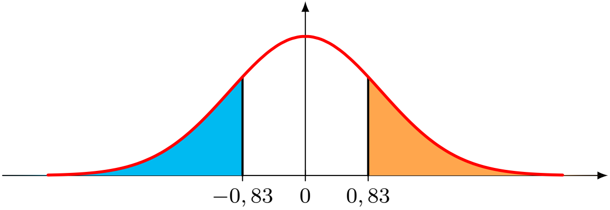
- $P(Z \geqslant 0,83) = \boldsymbol{1 - P(Z < 0,83) = 1 - P(Z \leqslant 0,83) \simeq 1 - 0,7967 = 0,2033}$



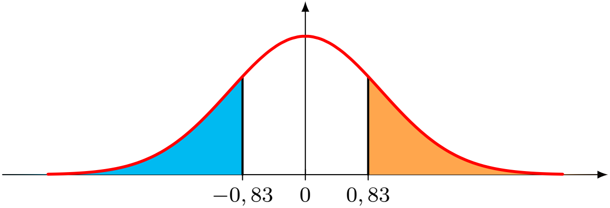
- $P(Z \leqslant -0,83) =$



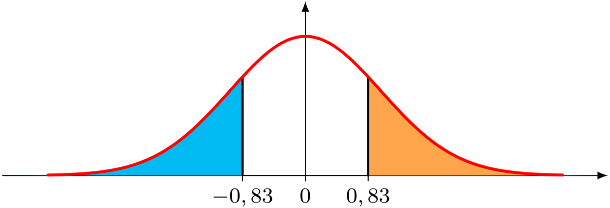
- $P(Z \leqslant -0,83) = \boldsymbol{P(Z \geqslant 0,83)}$



- $P(Z \leqslant -0,83) = \boldsymbol{P(Z \geqslant 0,83) = 0,2033}$

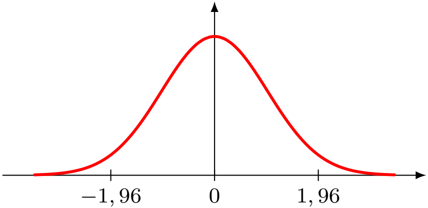


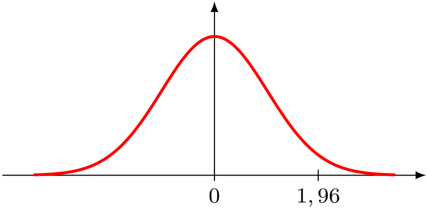
- $P(Z \leqslant -0,83) = \boldsymbol{P(Z \geqslant 0,83) = 0,2033}$



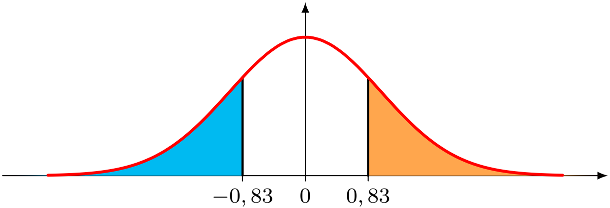
- $P(-1,96 \leqslant Z \leqslant 1,96) = \boldsymbol{P(Z \leqslant 1,96)} - \boldsymbol{P(Z \leqslant -1,96)}$

$=$





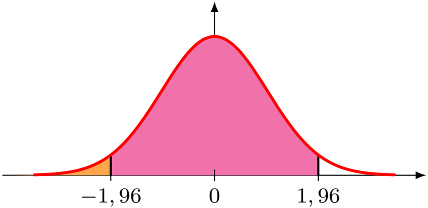
- $P(Z \leqslant -0,83) = \boldsymbol{P(Z \geqslant 0,83) = 0,2033}$

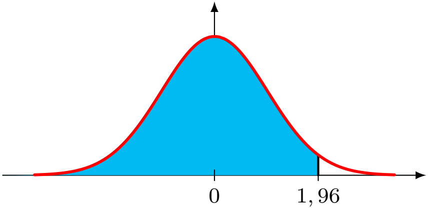


- $P(-1,96 \leqslant Z \leqslant 1,96) = \boldsymbol{P(Z \leqslant 1,96)} - \boldsymbol{P(Z \leqslant -1,96)}$

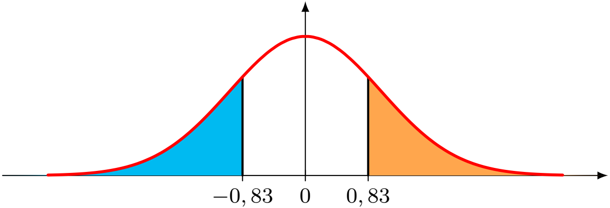
$$= \boldsymbol{P(Z \leqslant 1,96)} - \boldsymbol{P(Z \geqslant 1,96)}$$

$$=$$





- $P(Z \leqslant -0,83) = \boldsymbol{P(Z \geqslant 0,83) = 0,2033}$

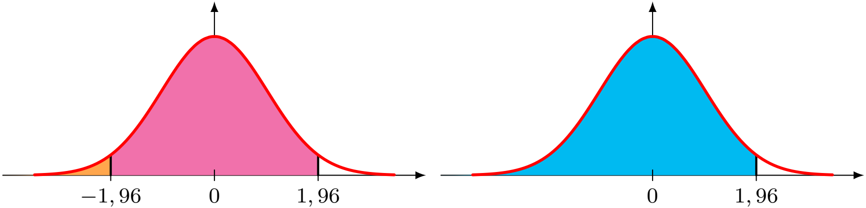


- $P(-1,96 \leqslant Z \leqslant 1,96) = \boldsymbol{P(Z \leqslant 1,96) - P(Z \leqslant -1,96)}$

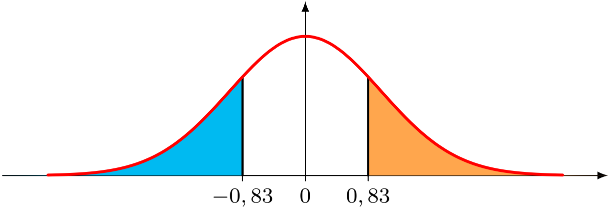
$$= \boldsymbol{P(Z \leqslant 1,96) - P(Z \geqslant 1,96)}$$

$$= \boldsymbol{P(Z \leqslant 1,96) - \left[1 - P(Z \leqslant 1,96)\right]}$$

$$=$$

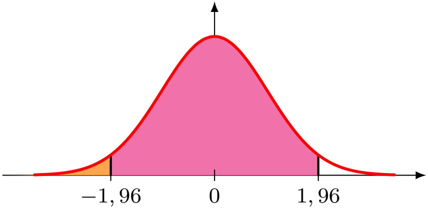


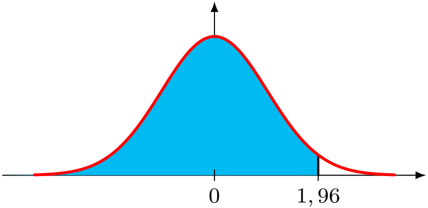
- $P(Z \leqslant -0,83) = \boldsymbol{P(Z \geqslant 0,83) = 0,2033}$



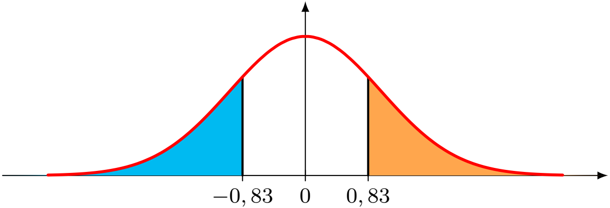
- $P(-1,96 \leqslant Z \leqslant 1,96) = \boldsymbol{P(Z \leqslant 1,96) - P(Z \leqslant -1,96)}$

$$\begin{aligned} &= \boldsymbol{P(Z \leqslant 1,96) - P(Z \geqslant 1,96)} \\ &= \boldsymbol{P(Z \leqslant 1,96) - \left[1 - P(Z \leqslant 1,96)\right]} \\ &= \boldsymbol{2P(Z \leqslant 1,96) - 1 \simeq 2 \times \qquad - 1 = 0,95} \end{aligned}$$



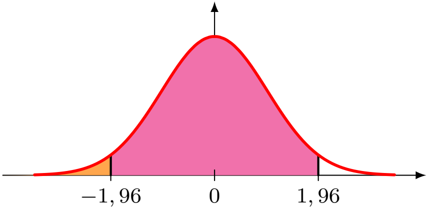


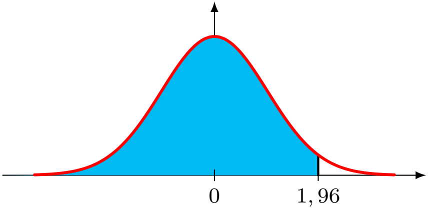
- $P(Z \leqslant -0,83) = \boldsymbol{P(Z \geqslant 0,83) = 0,2033}$



- $P(-1,96 \leqslant Z \leqslant 1,96) = \boldsymbol{P(Z \leqslant 1,96) - P(Z \leqslant -1,96)}$

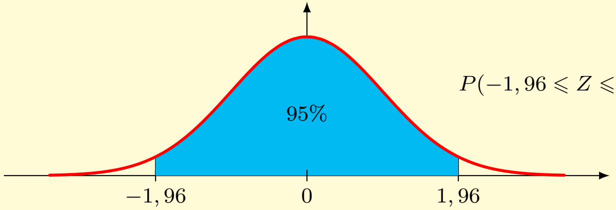
$$\begin{aligned} &= \boldsymbol{P(Z \leqslant 1,96) - P(Z \geqslant 1,96)} \\ &= \boldsymbol{P(Z \leqslant 1,96) - [1 - P(Z \leqslant 1,96)]} \\ &= \boldsymbol{2P(Z \leqslant 1,96) - 1 \simeq 2 \times 0,9750 - 1 = 0,95} \end{aligned}$$





Propriété

Soit Z une variable aléatoire réelle suivant un loi normale centrée réduite :



$$P(-1,96 \leqslant Z \leqslant 1,96) \simeq 0,95$$

L'intervalle $[-1,96; 1,96]$ est appelé l'intervalle de **normalité**

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) =$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ + b) =$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ + b) = aE(Z) + b =$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ + b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ + b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$
- $V(X) =$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ+b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$
- $V(X) = V(aZ+b) =$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ+b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$
- $V(X) = V(aZ+b) = V(aZ) =$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ + b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$
- $V(X) = V(aZ + b) = V(aZ) = a^2V(Z) =$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ + b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$
- $V(X) = V(aZ + b) = V(aZ) = a^2 V(Z) = \boldsymbol{a^2}$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ+b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$
- $V(X) = V(aZ+b) = V(aZ) = a^2V(Z) = \boldsymbol{a^2}$ donc $\sigma(aZ+b) = \boldsymbol{a}$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ + b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$
- $V(X) = V(aZ + b) = V(aZ) = a^2V(Z) = \boldsymbol{a^2}$ donc $\sigma(aZ + b) = \boldsymbol{a}$
- Quelle est la densité de probabilité de X ?

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ+b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$
- $V(X) = V(aZ+b) = V(aZ) = a^2V(Z) = \boldsymbol{a^2}$ donc $\sigma(aZ+b) = \boldsymbol{a}$
- Quelle est la densité de probabilité de X ?

$F_X(x) =$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ+b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$
- $V(X) = V(aZ+b) = V(aZ) = a^2 V(Z) = \boldsymbol{a^2}$ donc $\sigma(aZ+b) = \boldsymbol{a}$
- Quelle est la densité de probabilité de X ?

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) =$$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ+b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$
- $V(X) = V(aZ+b) = V(aZ) = a^2V(Z) = \boldsymbol{a^2}$ donc $\sigma(aZ+b) = \boldsymbol{a}$
- Quelle est la densité de probabilité de X ?

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(aZ + b \leqslant x) =$$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ+b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$
- $V(X) = V(aZ+b) = V(aZ) = a^2V(Z) = \boldsymbol{a^2}$ donc $\sigma(aZ+b) = \boldsymbol{a}$
- Quelle est la densité de probabilité de X ?

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(aZ+b \leqslant x) = P\left(Z \leqslant \frac{x-b}{a}\right) =$$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ+b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$
- $V(X) = V(aZ+b) = V(aZ) = a^2V(Z) = \boldsymbol{a^2}$ donc $\sigma(aZ+b) = \boldsymbol{a}$
- Quelle est la densité de probabilité de X ?

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(aZ + b \leqslant x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ+b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$
- $V(X) = V(aZ+b) = V(aZ) = a^2V(Z) = \boldsymbol{a^2}$ donc $\sigma(aZ+b) = \boldsymbol{a}$
- Quelle est la densité de probabilité de X ?

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(aZ+b \leqslant x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$$

Considérons le changement de variable $u = at + b$:

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ+b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$
- $V(X) = V(aZ+b) = V(aZ) = a^2V(Z) = \boldsymbol{a^2}$ donc $\sigma(aZ+b) = \boldsymbol{a}$
- Quelle est la densité de probabilité de X ?

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(aZ + b \leqslant x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} \,\mathrm{d}t$$

Considérons le changement de variable $u = at + b$:

$$\begin{cases} t = \dfrac{u-b}{a} \\ \mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ+b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$
- $V(X) = V(aZ+b) = V(aZ) = a^2V(Z) = \boldsymbol{a^2}$ donc $\sigma(aZ+b) = \boldsymbol{a}$
- Quelle est la densité de probabilité de X ?

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(aZ + b \leqslant x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$$

Considérons le changement de variable $u = at + b$:

$$\begin{cases} t = \dfrac{u-b}{a} \\ \mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}t \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{t \to -\infty} u = \\ \text{si } t = \frac{x-b}{a} \text{ alors } u = \end{cases}$$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ+b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$
- $V(X) = V(aZ+b) = V(aZ) = a^2V(Z) = \boldsymbol{a^2}$ donc $\sigma(aZ+b) = \boldsymbol{a}$
- Quelle est la densité de probabilité de X ?

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(aZ+b \leqslant x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$$

Considérons le changement de variable $u = at + b$:

$$\begin{cases} t = \dfrac{u-b}{a} \\ \mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}t \end{cases} \qquad \begin{cases} \displaystyle\lim_{t\to-\infty} u = -\infty \\ \text{si } t = \frac{x-b}{a} \text{ alors } u = \end{cases}$$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ+b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$
- $V(X) = V(aZ+b) = V(aZ) = a^2V(Z) = \boldsymbol{a^2}$ donc $\sigma(aZ+b) = \boldsymbol{a}$
- Quelle est la densité de probabilité de X ?

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(aZ+b \leqslant x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$$

Considérons le changement de variable $u = at + b$:

$$\begin{cases} t = \dfrac{u-b}{a} \\ \mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}t \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{t \to -\infty} u = -\infty \\ \text{si } t = \frac{x-b}{a} \text{ alors } u = \boldsymbol{x} \end{cases}$$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ + b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$
- $V(X) = V(aZ + b) = V(aZ) = a^2 V(Z) = \boldsymbol{a^2}$ donc $\sigma(aZ + b) = \boldsymbol{a}$
- Quelle est la densité de probabilité de X ?

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(aZ + b \leqslant x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$$

Considérons le changement de variable $u = at + b$:

$$\begin{cases} t = \dfrac{u-b}{a} \\ \mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}t \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{t \to -\infty} u = -\infty \\ \text{si } t = \frac{x-b}{a} \text{ alors } u = \boldsymbol{x} \end{cases}$$

D'où $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-b}{a}\right)^2} \frac{\mathrm{d}u}{a} =$

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ+b) = aE(Z) + b = \boldsymbol{b}$
- $V(X) = V(aZ+b) = V(aZ) = a^2V(Z) = \boldsymbol{a^2}$ donc $\sigma(aZ+b) = \boldsymbol{a}$
- Quelle est la densité de probabilité de X ?

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(aZ+b \leqslant x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$$

Considérons le changement de variable $u = at + b$:

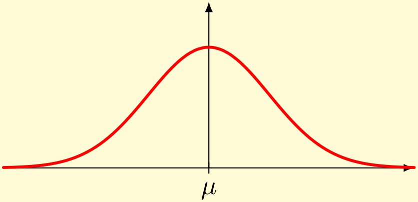
$$\begin{cases} t = \dfrac{u-b}{a} \\ \mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}t \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{t \to -\infty} u = -\infty \\ \text{si } t = \frac{x-b}{a} \text{ alors } u = \boldsymbol{x} \end{cases}$$

D'où $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-b}{a}\right)^2} \frac{\mathrm{d}u}{a} = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-b}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}u$

Définition:

Une variable aléatoire réelle X suit une loi **normale** d'espérance μ et d'écart-type $\sigma > 0$ si sa densité de probabilité est

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

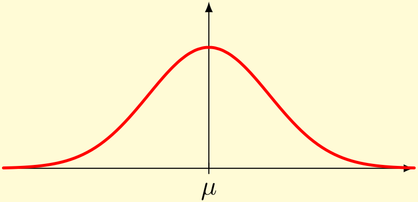


On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Définition:

Une variable aléatoire réelle X suit une loi **normale** d'espérance μ et d'écart-type $\sigma > 0$ si sa densité de probabilité est

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



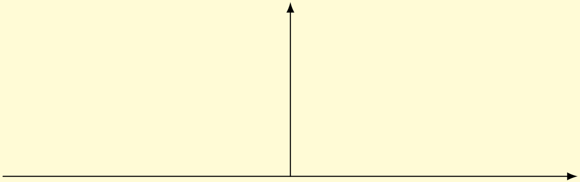
On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Propriété

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

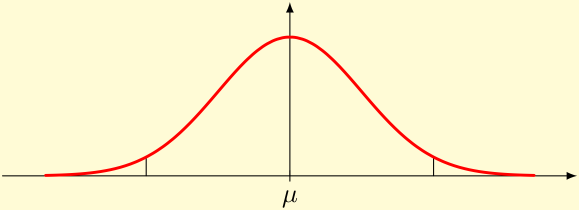
Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle suivant un loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$:



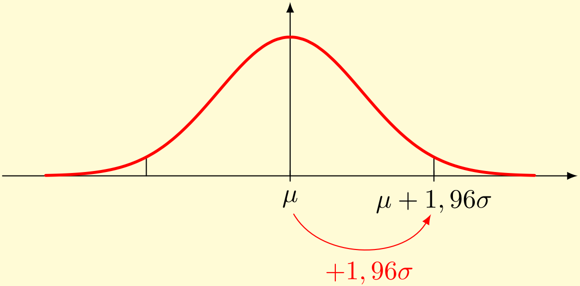
Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle suivant un loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$:



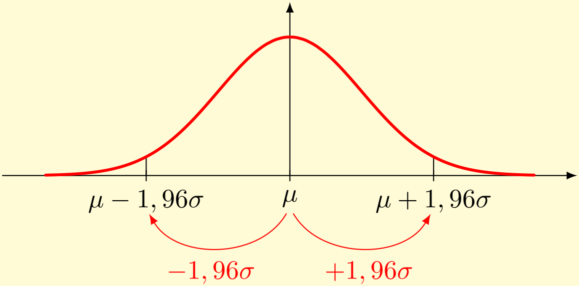
Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle suivant un loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$:



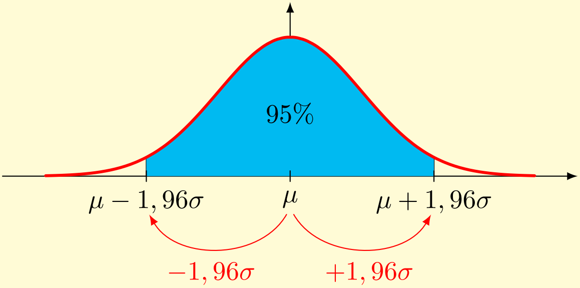
Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle suivant un loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$:



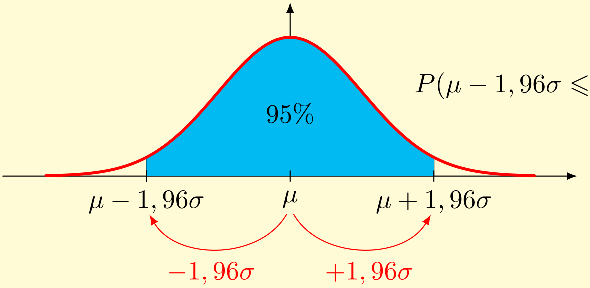
Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle suivant un loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$:



Propriété

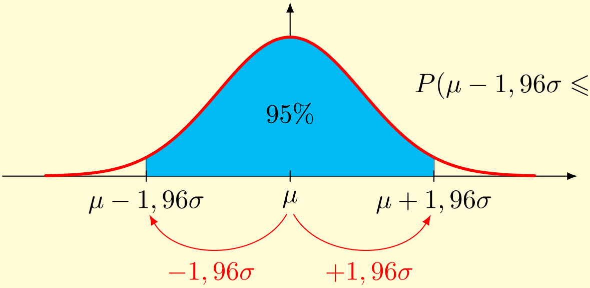
Soit X une variable aléatoire réelle suivant un loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$:



$$P(\mu - 1,96\sigma \leqslant Z \leqslant \mu + 1,96\sigma) \simeq 0,95$$

Propriété

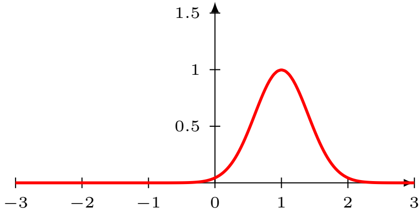
Soit X une variable aléatoire réelle suivant un loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$:



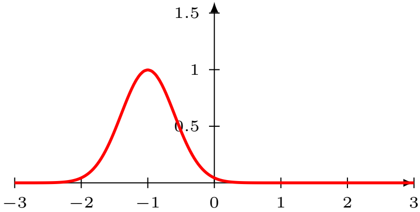
$P(\mu - 1,96\sigma \leqslant Z \leqslant \mu + 1,96\sigma) \simeq 0,95$

L'intervalle $[\mu - 1,96\sigma; \mu + 1,96\sigma]$ est appelé l'intervalle de **normalité.**

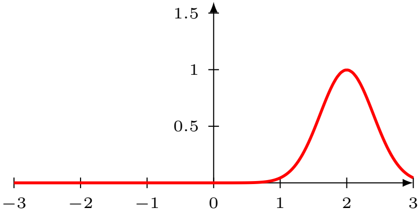
Complète les valeurs de μ et σ sachant que $\sigma \in \{0{,}2\,;\,0{,}3\,;\,0{,}4\,;\,0{,}8\}$:



$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$

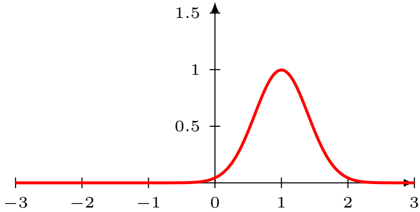


$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$

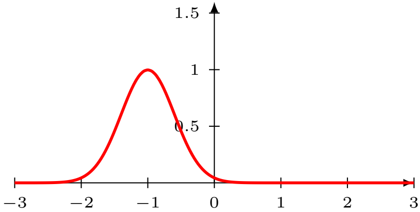


$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$

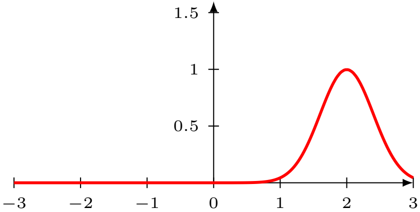
Complète les valeurs de μ et σ sachant que $\sigma \in \{0{,}2\,;\,0{,}3\,;\,0{,}4\,;\,0{,}8\}$:



$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$



$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$

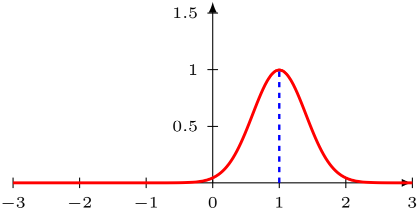


$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$

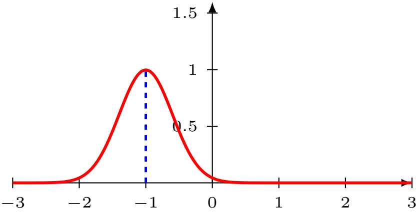
Question

Quel est le point commun entre ses trois premières densités ?

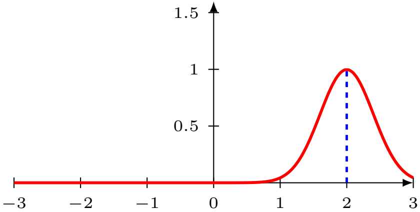
Complète les valeurs de μ et σ sachant que $\sigma \in \{0{,}2\,;\,0{,}3\,;\,0{,}4\,;\,0{,}8\}$:



$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$



$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$

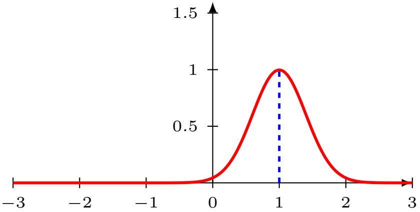


$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$

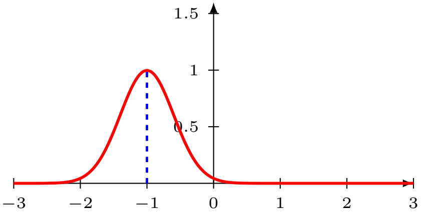
Réponse

Elles ont le même écart-type (même forme).

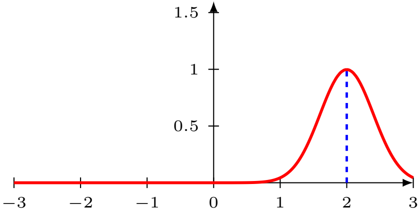
Complète les valeurs de μ et σ sachant que $\sigma \in \{0{,}2\,;\,0{,}3\,;\,0{,}4\,;\,0{,}8\}$:



$\mu = 1$ et $\sigma = \ldots$



$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$

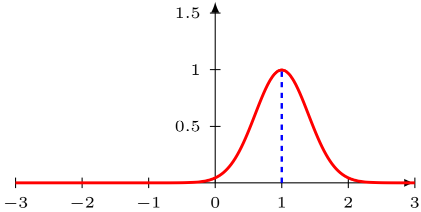


$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$

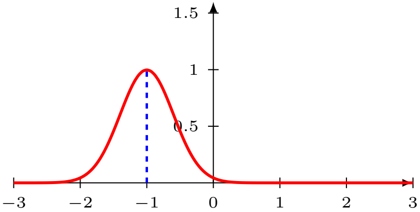
Réponse

L'abscisse de leur axe de symétrie est leur espérance.

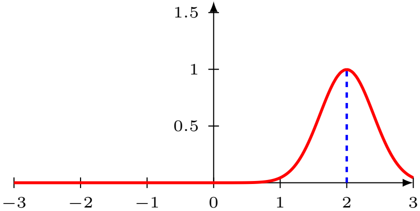
Complète les valeurs de μ et σ sachant que $\sigma \in \{0{,}2\,;\,0{,}3\,;\,0{,}4\,;\,0{,}8\}$:



$\mu = 1$ et $\sigma = \ldots$

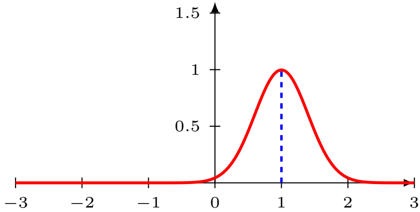


$\mu = -1$ et $\sigma = \ldots$

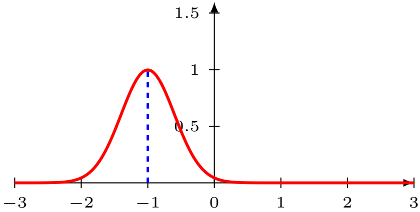


$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$

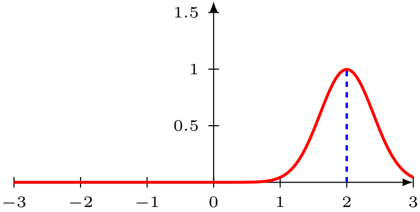
Complète les valeurs de μ et σ sachant que $\sigma \in \{0{,}2\,;\,0{,}3\,;\,0{,}4\,;\,0{,}8\}$:



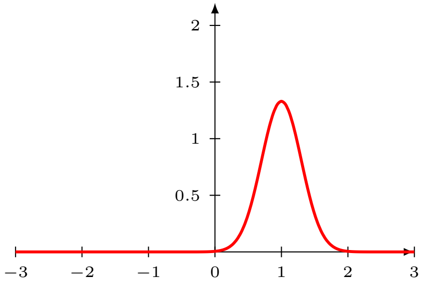
$\mu = 1$ et $\sigma = \ldots$



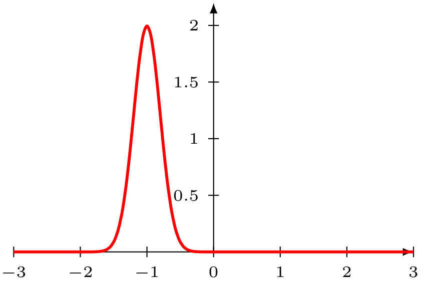
$\mu = -1$ et $\sigma = \ldots$



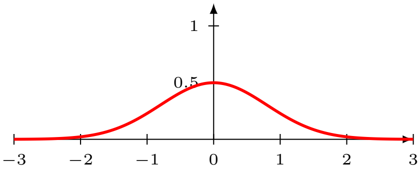
$\mu = 2$ et $\sigma = \ldots$



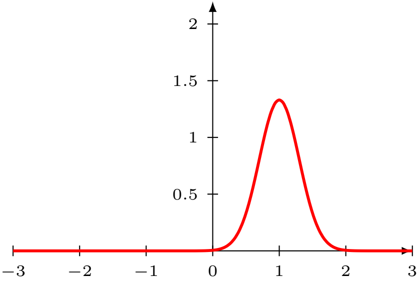
$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$



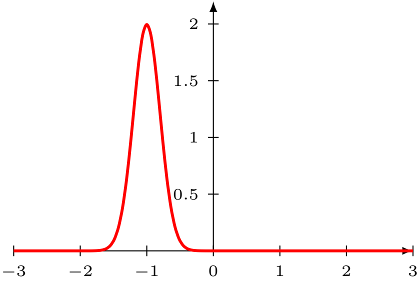
$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$



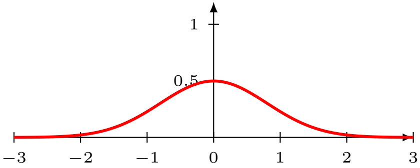
$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$



$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$



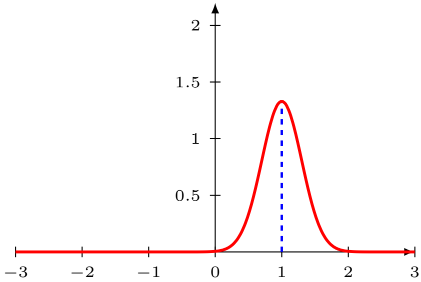
$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$



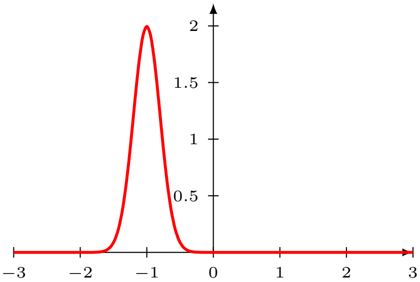
$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$

Question

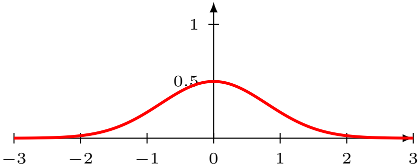
Quel est l'espérance de chacune de ses trois dernières densités ?



$\mu = 1$ et $\sigma = \ldots$



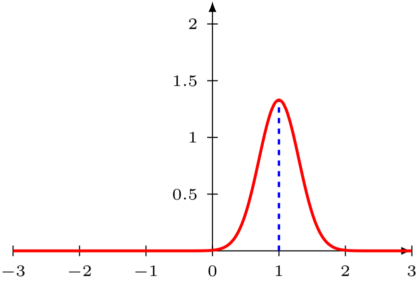
$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$



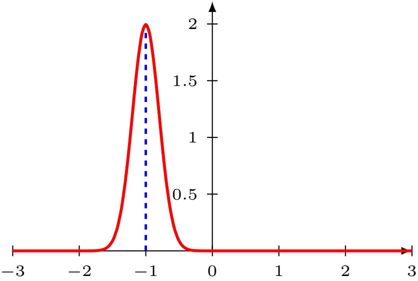
$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$

Question

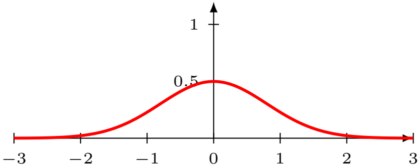
Quel est l'espérance de chacune de ses trois dernières densités ?



$\mu = 1$ et $\sigma = \dots$



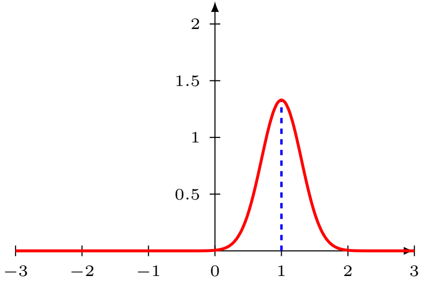
$\mu = -1$ et $\sigma = \dots$



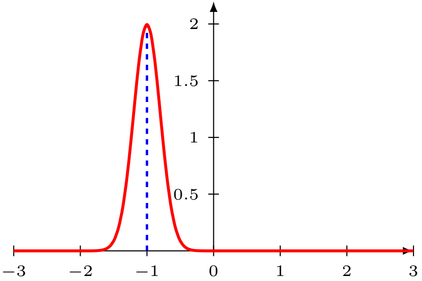
$\mu = \dots$ et $\sigma = \dots$

Question

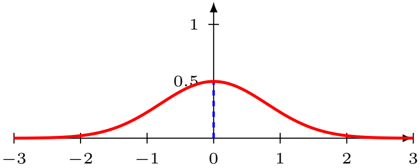
Quel est l'espérance de chacune de ses trois dernières densités ?



$\mu = 1$ et $\sigma = \ldots$



$\mu = -1$ et $\sigma = \ldots$

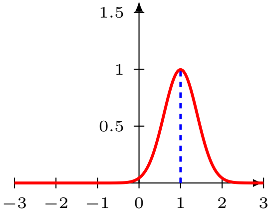


$\mu = 0$ et $\sigma = \ldots$

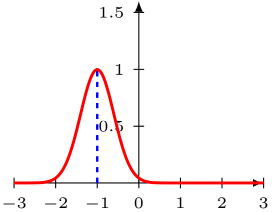
Question

Quel est l'espérance de chacune de ses trois dernières densités ?

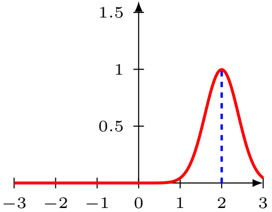
Complète les valeurs de μ et σ sachant que $\sigma \in \{0{,}2\,;\,0{,}3\,;\,0{,}4\,;\,0{,}8\}$:



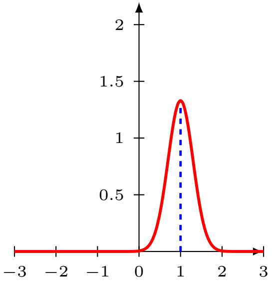
$\mu = 1$ et $\sigma = \dots$



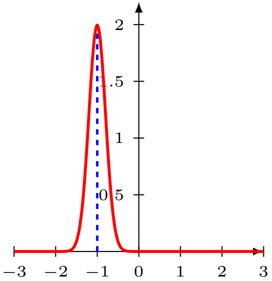
$\mu = -1$ et $\sigma = \dots$



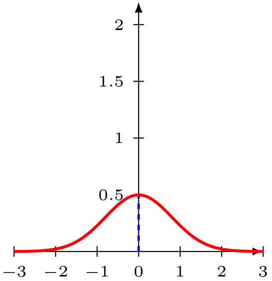
$\mu = 2$ et $\sigma = \dots$



$\mu = 1$ et $\sigma = \dots$

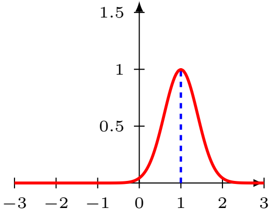


$\mu = -1$ et $\sigma = \dots$

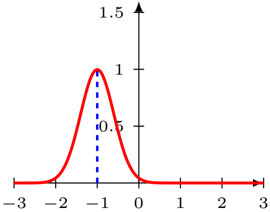


$\mu = 0$ et $\sigma = \dots$

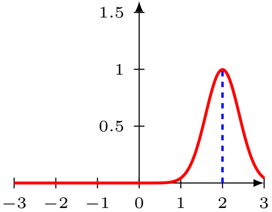
Complète les valeurs de μ et σ sachant que $\sigma \in \{0{,}2\,;\,0{,}3\,;\,0{,}4\,;\,0{,}8\}$:



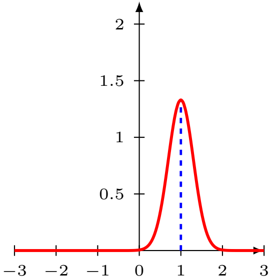
$\mu = 1$ et $\sigma = \dots$



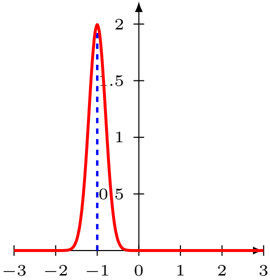
$\mu = -1$ et $\sigma = \dots$



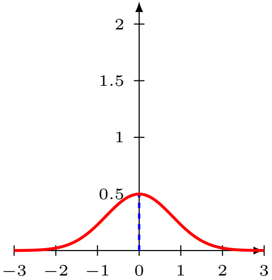
$\mu = 2$ et $\sigma = \dots$



$\mu = 1$ et $\sigma = \dots$

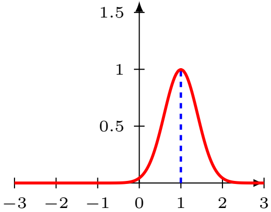


$\mu = -1$ et $\sigma = \dots$

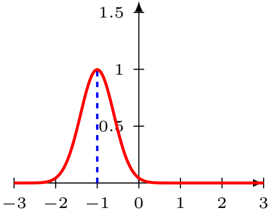


$\mu = 0$ et $\sigma = \dots$

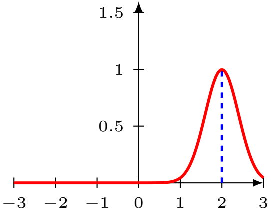
Complète les valeurs de μ et σ sachant que $\sigma \in \{0{,}2\,;\,0{,}3\,;\,0{,}4\,;\,0{,}8\}$:



$\mu = 1$ et $\sigma = \dots$



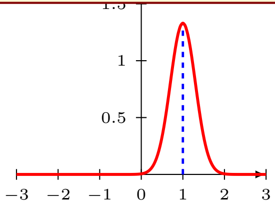
$\mu = -1$ et $\sigma = \dots$



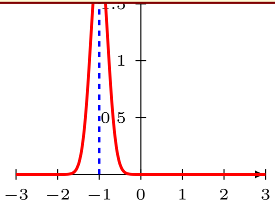
$\mu = 2$ et $\sigma = \dots$

Question

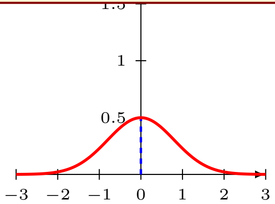
Quel est le plus grand écart-type ?



$\mu = 1$ et $\sigma = \dots$

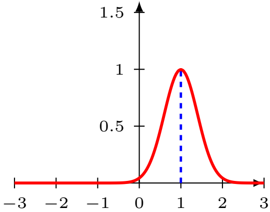


$\mu = -1$ et $\sigma = \dots$

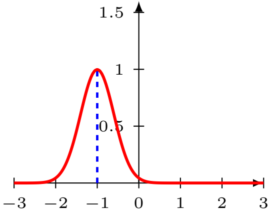


$\mu = 0$ et $\sigma = \dots$

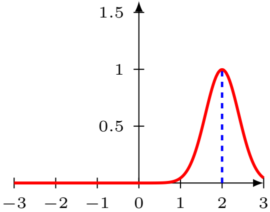
Complète les valeurs de μ et σ sachant que $\sigma \in \{0{,}2\,;\,0{,}3\,;\,0{,}4\,;\,0{,}8\}$:



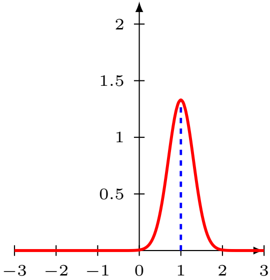
$\mu = 1$ et $\sigma = \dots$



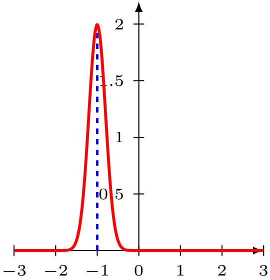
$\mu = -1$ et $\sigma = \dots$



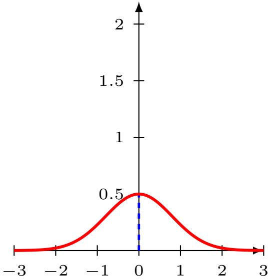
$\mu = 2$ et $\sigma = \dots$



$\mu = 1$ et $\sigma = \dots$

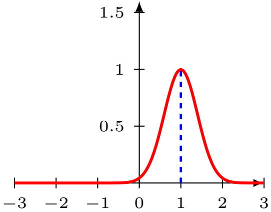


$\mu = -1$ et $\sigma = \dots$

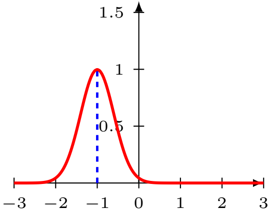


$\mu = 0$ et $\sigma = 0{,}8$

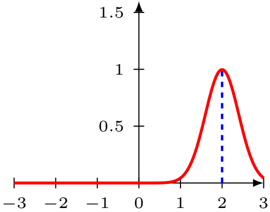
Complète les valeurs de μ et σ sachant que $\sigma \in \{0{,}2\,;\,0{,}3\,;\,0{,}4\,;\,0{,}8\}$:



$\mu = 1$ et $\sigma = \ldots$



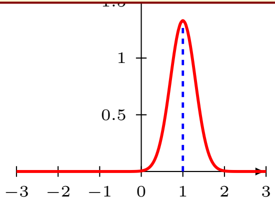
$\mu = -1$ et $\sigma = \ldots$



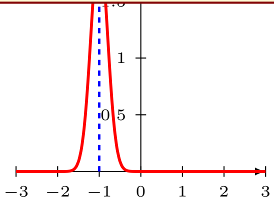
$\mu = 2$ et $\sigma = \ldots$

Question

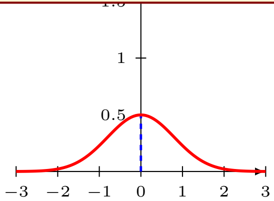
Quel est le plus petit écart-type ?



$\mu = 1$ et $\sigma = \ldots$

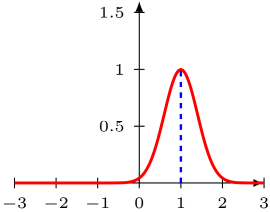


$\mu = -1$ et $\sigma = \ldots$

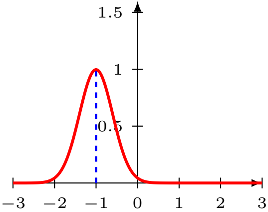


$\mu = 0$ et $\sigma = 0{,}8$

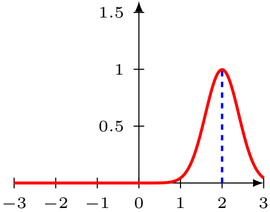
Complète les valeurs de μ et σ sachant que $\sigma \in \{0{,}2\,;\,0{,}3\,;\,0{,}4\,;\,0{,}8\}$:



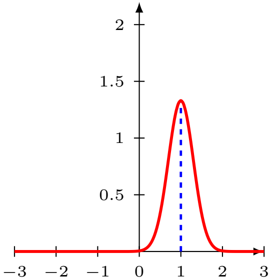
$\mu = 1$ et $\sigma = \dots$



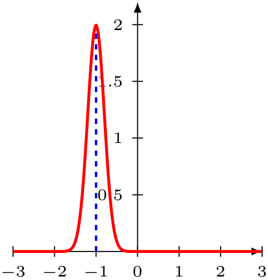
$\mu = -1$ et $\sigma = \dots$



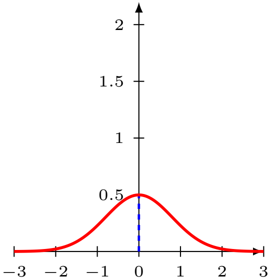
$\mu = 2$ et $\sigma = \dots$



$\mu = 1$ et $\sigma = \dots$

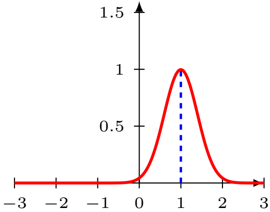


$\mu = -1$ et $\sigma = 0{,}2$

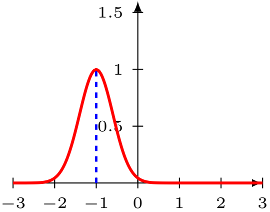


$\mu = 0$ et $\sigma = 0{,}8$

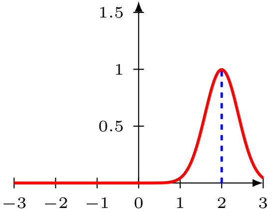
Complète les valeurs de μ et σ sachant que $\sigma \in \{0{,}2\,;\,0{,}3\,;\,0{,}4\,;\,0{,}8\}$:



$\mu = 1$ et $\sigma = \dots$



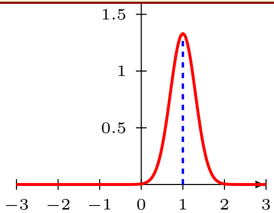
$\mu = -1$ et $\sigma = \dots$



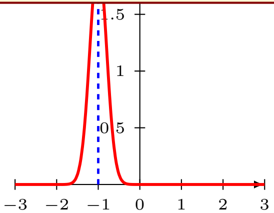
$\mu = 2$ et $\sigma = \dots$

Question

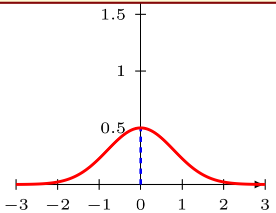
A vous de compléter les autres…



$\mu = 1$ et $\sigma = \dots$

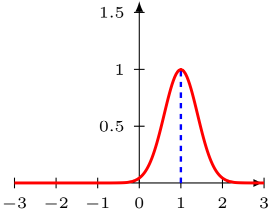


$\mu = -1$ et $\sigma = 0{,}2$

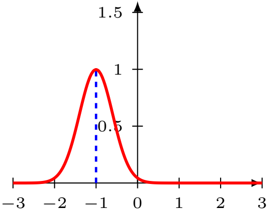


$\mu = 0$ et $\sigma = 0{,}8$

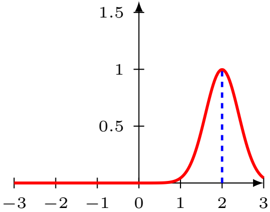
Complète les valeurs de μ et σ sachant que $\sigma \in \{0{,}2\,;\,0{,}3\,;\,0{,}4\,;\,0{,}8\}$:



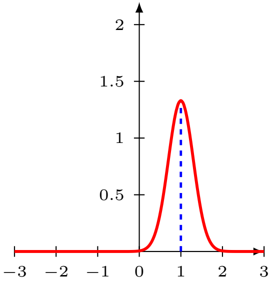
$\mu = 1$ et $\sigma = \ldots$



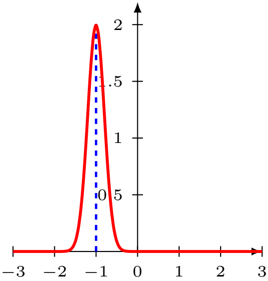
$\mu = -1$ et $\sigma = \ldots$



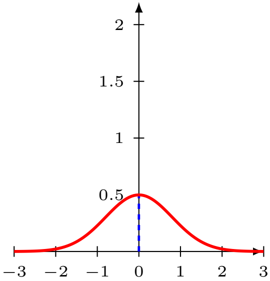
$\mu = 2$ et $\sigma = \ldots$



$\mu = 1$ et $\sigma = 0{,}3$

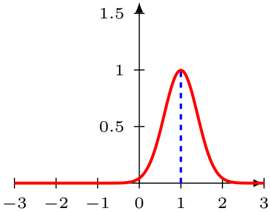


$\mu = -1$ et $\sigma = 0{,}2$

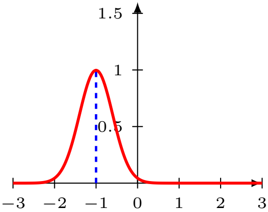


$\mu = 0$ et $\sigma = 0{,}8$

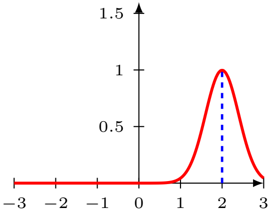
Complète les valeurs de μ et σ sachant que $\sigma \in \{0{,}2\,;\,0{,}3\,;\,0{,}4\,;\,0{,}8\}$:



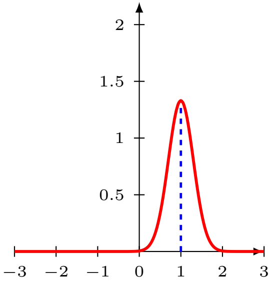
$\mu = 1$ et $\sigma = 0{,}4$



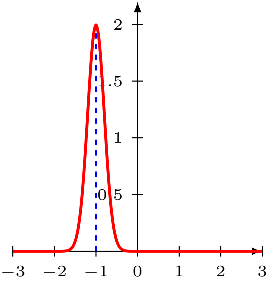
$\mu = -1$ et $\sigma = 0{,}4$



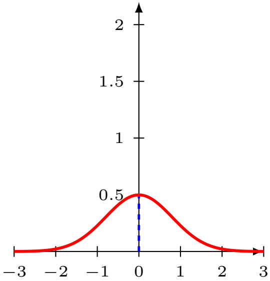
$\mu = 2$ et $\sigma = 0{,}4$



$\mu = 1$ et $\sigma = 0{,}3$



$\mu = -1$ et $\sigma = 0{,}2$



$\mu = 0$ et $\sigma = 0{,}8$

Remarque:

On observe que :

- la courbe admet comme **axe de symétrie**

Remarque:

On observe que :

- la courbe admet comme **axe de symétrie** la droite d'équation $x = \mu$,

Remarque:

On observe que :

- la courbe admet comme **axe de symétrie** la droite d'équation $x = \mu$,
- le maximum de la courbe est atteint en μ, espérance de la variable X (ce maximum valant $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$),

Remarque:

On observe que :

- la courbe admet comme **axe de symétrie** la droite d'équation $x = \mu$,
- le maximum de la courbe est atteint en μ, espérance de la variable X (ce maximum valant $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$),
- plus σ est grand, plus la courbe « **s'étale** »

Remarque:

On observe que :

- la courbe admet comme **axe de symétrie** la droite d'équation $x = \mu$,
- le maximum de la courbe est atteint en μ, espérance de la variable X (ce maximum valant $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$),
- plus σ est grand, plus la courbe « **s'étale** » autour de la moyenne, en accord avec la signification de l'écart-type.

Exemple n^o 2 : L'hématocrite (HTC) est une mesure de la portion du sang occupée par les cellules (globules rouges, globules blancs et plaquettes).

Exemple n° 2 : L'hématocrite (HTC) est une mesure de la portion du sang occupée par les cellules (globules rouges, globules blancs et plaquettes). Comme les globules rouges constituent normalement environ 98% des cellules sanguines, la mesure de l'hématocrite donne essentiellement les mêmes renseignements que ceux fournis par le décompte des globules rouges ou le taux d'hémoglobine dans l'évaluation d'une anémie ou d'une polyglobulie.

Exemple n° 2 : L'hématocrite (HTC) est une mesure de la portion du sang occupée par les cellules (globules rouges, globules blancs et plaquettes). Comme les globules rouges constituent normalement environ 98% des cellules sanguines, la mesure de l'hématocrite donne essentiellement les mêmes renseignements que ceux fournis par le décompte des globules rouges ou le taux d'hémoglobine dans l'évaluation d'une anémie ou d'une polyglobulie. Un hématocrite de 0,40 l/l (litre de cellules par litre de sang) indique que 40% du volume sanguin est constitué de cellules, le plasma constituant l'autre 60%.

Exemple n° 2 : L'hématocrite (HTC) est une mesure de la portion du sang occupée par les cellules (globules rouges, globules blancs et plaquettes). Comme les globules rouges constituent normalement environ 98% des cellules sanguines, la mesure de l'hématocrite donne essentiellement les mêmes renseignements que ceux fournis par le décompte des globules rouges ou le taux d'hémoglobine dans l'évaluation d'une anémie ou d'une polyglobulie. Un hématocrite de 0,40 l/l (litre de cellules par litre de sang) indique que 40% du volume sanguin est constitué de cellules, le plasma constituant l'autre 60%.

Les globules rouges permettent le transport de l'oxygène. En médecine, l'intervalle de normalité de l'hématocrite est $[40, 55]$ pour les hommes, et $[35, 50]$ chez les femmes.

Exemple n° 2 : L'hématocrite (HTC) est une mesure de la portion du sang occupée par les cellules (globules rouges, globules blancs et plaquettes). Comme les globules rouges constituent normalement environ 98% des cellules sanguines, la mesure de l'hématocrite donne essentiellement les mêmes renseignements que ceux fournis par le décompte des globules rouges ou le taux d'hémoglobine dans l'évaluation d'une anémie ou d'une polyglobulie. Un hématocrite de 0,40 l/l (litre de cellules par litre de sang) indique que 40% du volume sanguin est constitué de cellules, le plasma constituant l'autre 60%.

Les globules rouges permettent le transport de l'oxygène. En médecine, l'intervalle de normalité de l'hématocrite est $[40, 55]$ pour les hommes, et $[35, 50]$ chez les femmes. Pour le médecin, il signifie que la majorité des femmes ont un hématocrite dans cet intervalle. Pour le statisticien, il signifie que l'hématocrite suit une loi normale dont l'intervalle de normalité est $[40, 55]$ chez les hommes.

Exemple n° 2 : L'hématocrite (HTC) est une mesure de la portion du sang occupée par les cellules (globules rouges, globules blancs et plaquettes). Comme les globules rouges constituent normalement environ 98% des cellules sanguines, la mesure de l'hématocrite donne essentiellement les mêmes renseignements que ceux fournis par le décompte des globules rouges ou le taux d'hémoglobine dans l'évaluation d'une anémie ou d'une polyglobulie. Un hématocrite de 0,40 l/l (litre de cellules par litre de sang) indique que 40% du volume sanguin est constitué de cellules, le plasma constituant l'autre 60%.

Les globules rouges permettent le transport de l'oxygène. En médecine, l'intervalle de normalité de l'hématocrite est $[40, 55]$ pour les hommes, et $[35, 50]$ chez les femmes. Pour le médecin, il signifie que la majorité des femmes ont un hématocrite dans cet intervalle. Pour le statisticien, il signifie que l'hématocrite suit une loi normale dont l'intervalle de normalité est $[40, 55]$ chez les hommes.

Désignons par la variable aléatoire T l'hématocrite d'un garçon :

$\mu =$

Exemple nº 2 : L'hématocrite (HTC) est une mesure de la portion du sang occupée par les cellules (globules rouges, globules blancs et plaquettes). Comme les globules rouges constituent normalement environ 98% des cellules sanguines, la mesure de l'hématocrite donne essentiellement les mêmes renseignements que ceux fournis par le décompte des globules rouges ou le taux d'hémoglobine dans l'évaluation d'une anémie ou d'une polyglobulie. Un hématocrite de 0,40 l/l (litre de cellules par litre de sang) indique que 40% du volume sanguin est constitué de cellules, le plasma constituant l'autre 60%.

Les globules rouges permettent le transport de l'oxygène. En médecine, l'intervalle de normalité de l'hématocrite est $[40, 55]$ pour les hommes, et $[35, 50]$ chez les femmes. Pour le médecin, il signifie que la majorité des femmes ont un hématocrite dans cet intervalle. Pour le statisticien, il signifie que l'hématocrite suit une loi normale dont l'intervalle de normalité est $[40, 55]$ chez les hommes.

Désignons par la variable aléatoire T l'hématocrite d'un garçon :

$\mu = E(T) =$

Exemple n° 2 : L'hématocrite (HTC) est une mesure de la portion du sang occupée par les cellules (globules rouges, globules blancs et plaquettes). Comme les globules rouges constituent normalement environ 98% des cellules sanguines, la mesure de l'hématocrite donne essentiellement les mêmes renseignements que ceux fournis par le décompte des globules rouges ou le taux d'hémoglobine dans l'évaluation d'une anémie ou d'une polyglobulie. Un hématocrite de 0,40 l/l (litre de cellules par litre de sang) indique que 40% du volume sanguin est constitué de cellules, le plasma constituant l'autre 60%.

Les globules rouges permettent le transport de l'oxygène. En médecine, l'intervalle de normalité de l'hématocrite est $[40, 55]$ pour les hommes, et $[35, 50]$ chez les femmes. Pour le médecin, il signifie que la majorité des femmes ont un hématocrite dans cet intervalle. Pour le statisticien, il signifie que l'hématocrite suit une loi normale dont l'intervalle de normalité est $[40, 55]$ chez les hommes.

Désignons par la variable aléatoire T l'hématocrite d'un garçon :

$$\mu = E(T) = \frac{40 + 55}{2} =$$

Exemple n° 2 : L'hématocrite (HTC) est une mesure de la portion du sang occupée par les cellules (globules rouges, globules blancs et plaquettes). Comme les globules rouges constituent normalement environ 98% des cellules sanguines, la mesure de l'hématocrite donne essentiellement les mêmes renseignements que ceux fournis par le décompte des globules rouges ou le taux d'hémoglobine dans l'évaluation d'une anémie ou d'une polyglobulie. Un hématocrite de 0,40 l/l (litre de cellules par litre de sang) indique que 40% du volume sanguin est constitué de cellules, le plasma constituant l'autre 60%.

Les globules rouges permettent le transport de l'oxygène. En médecine, l'intervalle de normalité de l'hématocrite est $[40, 55]$ pour les hommes, et $[35, 50]$ chez les femmes. Pour le médecin, il signifie que la majorité des femmes ont un hématocrite dans cet intervalle. Pour le statisticien, il signifie que l'hématocrite suit une loi normale dont l'intervalle de normalité est $[40, 55]$ chez les hommes.

Désignons par la variable aléatoire T l'hématocrite d'un garçon :

$\mu = E(T) = \dfrac{40+55}{2} = 47,5$ et $1,96\sigma =$

Exemple n° 2 : L'hématocrite (HTC) est une mesure de la portion du sang occupée par les cellules (globules rouges, globules blancs et plaquettes). Comme les globules rouges constituent normalement environ 98% des cellules sanguines, la mesure de l'hématocrite donne essentiellement les mêmes renseignements que ceux fournis par le décompte des globules rouges ou le taux d'hémoglobine dans l'évaluation d'une anémie ou d'une polyglobulie. Un hématocrite de 0,40 l/l (litre de cellules par litre de sang) indique que 40% du volume sanguin est constitué de cellules, le plasma constituant l'autre 60%.

Les globules rouges permettent le transport de l'oxygène. En médecine, l'intervalle de normalité de l'hématocrite est $[40, 55]$ pour les hommes, et $[35, 50]$ chez les femmes. Pour le médecin, il signifie que la majorité des femmes ont un hématocrite dans cet intervalle. Pour le statisticien, il signifie que l'hématocrite suit une loi normale dont l'intervalle de normalité est $[40, 55]$ chez les hommes.

Désignons par la variable aléatoire T l'hématocrite d'un garçon :

$$\mu = E(T) = \frac{40+55}{2} = 47,5 \text{ et } 1,96\sigma = 55 - 47,5 =$$

Exemple n° 2 : L'hématocrite (HTC) est une mesure de la portion du sang occupée par les cellules (globules rouges, globules blancs et plaquettes). Comme les globules rouges constituent normalement environ 98% des cellules sanguines, la mesure de l'hématocrite donne essentiellement les mêmes renseignements que ceux fournis par le décompte des globules rouges ou le taux d'hémoglobine dans l'évaluation d'une anémie ou d'une polyglobulie. Un hématocrite de 0,40 l/l (litre de cellules par litre de sang) indique que 40% du volume sanguin est constitué de cellules, le plasma constituant l'autre 60%.

Les globules rouges permettent le transport de l'oxygène. En médecine, l'intervalle de normalité de l'hématocrite est $[40, 55]$ pour les hommes, et $[35, 50]$ chez les femmes. Pour le médecin, il signifie que la majorité des femmes ont un hématocrite dans cet intervalle. Pour le statisticien, il signifie que l'hématocrite suit une loi normale dont l'intervalle de normalité est $[40, 55]$ chez les hommes.

Désignons par la variable aléatoire T l'hématocrite d'un garçon :

$$\mu = E(T) = \frac{40+55}{2} = 47,5 \text{ et } 1,96\sigma = 55 - 47,5 = 7,5 \text{ donc, } \sigma =$$

Exemple n° 2 : L'hématocrite (HTC) est une mesure de la portion du sang occupée par les cellules (globules rouges, globules blancs et plaquettes). Comme les globules rouges constituent normalement environ 98% des cellules sanguines, la mesure de l'hématocrite donne essentiellement les mêmes renseignements que ceux fournis par le décompte des globules rouges ou le taux d'hémoglobine dans l'évaluation d'une anémie ou d'une polyglobulie. Un hématocrite de 0,40 l/l (litre de cellules par litre de sang) indique que 40% du volume sanguin est constitué de cellules, le plasma constituant l'autre 60%.

Les globules rouges permettent le transport de l'oxygène. En médecine, l'intervalle de normalité de l'hématocrite est $[40, 55]$ pour les hommes, et $[35, 50]$ chez les femmes. Pour le médecin, il signifie que la majorité des femmes ont un hématocrite dans cet intervalle. Pour le statisticien, il signifie que l'hématocrite suit une loi normale dont l'intervalle de normalité est $[40, 55]$ chez les hommes.

Désignons par la variable aléatoire T l'hématocrite d'un garçon :

$$\mu = E(T) = \frac{40+55}{2} = 47,5 \text{ et } 1,96\sigma = 55 - 47,5 = 7,5 \text{ donc, } \sigma = \frac{7,5}{1,96} \simeq$$

Exemple n° 2 : L'hématocrite (HTC) est une mesure de la portion du sang occupée par les cellules (globules rouges, globules blancs et plaquettes). Comme les globules rouges constituent normalement environ 98% des cellules sanguines, la mesure de l'hématocrite donne essentiellement les mêmes renseignements que ceux fournis par le décompte des globules rouges ou le taux d'hémoglobine dans l'évaluation d'une anémie ou d'une polyglobulie. Un hématocrite de 0,40 l/l (litre de cellules par litre de sang) indique que 40% du volume sanguin est constitué de cellules, le plasma constituant l'autre 60%.

Les globules rouges permettent le transport de l'oxygène. En médecine, l'intervalle de normalité de l'hématocrite est $[40, 55]$ pour les hommes, et $[35, 50]$ chez les femmes. Pour le médecin, il signifie que la majorité des femmes ont un hématocrite dans cet intervalle. Pour le statisticien, il signifie que l'hématocrite suit une loi normale dont l'intervalle de normalité est $[40, 55]$ chez les hommes.

Désignons par la variable aléatoire T l'hématocrite d'un garçon :

$$\mu = E(T) = \frac{40+55}{2} = 47,5 \text{ et } 1,96\sigma = 55 - 47,5 = 7,5 \text{ donc, } \sigma = \frac{7,5}{1,96} \simeq 3,8$$

Désignons par la variable aléatoire T l'hématocrite d'un garçon :

$$\mu = E(T) = \frac{40+55}{2} = 47,5 \text{ et } 1,96\sigma = 55 - 47,5 = 7,5 \text{ donc, } \sigma = \frac{7,5}{1,96} \simeq 3,8$$

Désignons par la variable aléatoire T l'hématocrite d'un garçon :

$$\mu = E(T) = \frac{40+55}{2} = 47,5 \text{ et } 1,96\sigma = 55 - 47,5 = 7,5 \text{ donc, } \sigma = \frac{7,5}{1,96} \simeq 3,8$$

Bjarne Riis, coureur cycliste danois, surnommé l'aigle de Herning et « Monsieur 60% » (son taux d'hématocrite étant supérieur à 60%), remporte le Tour de France 1996.

Désignons par la variable aléatoire T l'hématocrite d'un garçon :

$$\mu = E(T) = \frac{40+55}{2} = 47,5 \text{ et } 1,96\sigma = 55 - 47,5 = 7,5 \text{ donc, } \sigma = \frac{7,5}{1,96} \simeq 3,8$$

Bjarne Riis, coureur cycliste danois, surnommé l'aigle de Herning et « Monsieur 60% » (son taux d'hématocrite étant supérieur à 60%), remporte le Tour de France 1996.

La probabilité qu'un homme ait un taux d'hématocrite supérieur à 60% est

Désignons par la variable aléatoire T l'hématocrite d'un garçon :

$$\mu = E(T) = \frac{40+55}{2} = 47,5 \text{ et } 1,96\sigma = 55 - 47,5 = 7,5 \text{ donc, } \sigma = \frac{7,5}{1,96} \simeq 3,8$$

Bjarne Riis, coureur cycliste danois, surnommé l'aigle de Herning et « Monsieur 60% » (son taux d'hématocrite étant supérieur à 60%), remporte le Tour de France 1996.

La probabilité qu'un homme ait un taux d'hématocrite supérieur à 60% est

$$P\left(\frac{X-45,5}{3,75} \geqslant \frac{60-45,5}{3,8}\right) =$$

Désignons par la variable aléatoire T l'hématocrite d'un garçon :

$$\mu = E(T) = \frac{40+55}{2} = 47,5 \text{ et } 1,96\sigma = 55 - 47,5 = 7,5 \text{ donc, } \sigma = \frac{7,5}{1,96} \simeq 3,8$$

Bjarne Riis, coureur cycliste danois, surnommé l'aigle de Herning et « Monsieur 60% » (son taux d'hématocrite étant supérieur à 60%), remporte le Tour de France 1996.

La probabilité qu'un homme ait un taux d'hématocrite supérieur à 60% est

$$P\left(\frac{X-45,5}{3,75} \geqslant \frac{60-45,5}{3,8}\right) = P\left(Z \geqslant \frac{60-45,5}{3,8}\right)$$

$$\simeq$$

Désignons par la variable aléatoire T l'hématocrite d'un garçon :

$$\mu = E(T) = \frac{40+55}{2} = 47,5 \text{ et } 1,96\sigma = 55 - 47,5 = 7,5 \text{ donc, } \sigma = \frac{7,5}{1,96} \simeq 3,8$$

Bjarne Riis, coureur cycliste danois, surnommé l'aigle de Herning et « Monsieur 60% » (son taux d'hématocrite étant supérieur à 60%), remporte le Tour de France 1996.

La probabilité qu'un homme ait un taux d'hématocrite supérieur à 60% est

$$P\left(\frac{X-45,5}{3,75} \geqslant \frac{60-45,5}{3,8}\right) = P\left(Z \geqslant \frac{60-45,5}{3,8}\right)$$

$$\simeq P(Z \geqslant 3,82) \simeq$$

Désignons par la variable aléatoire T l'hématocrite d'un garçon :

$$\mu = E(T) = \frac{40+55}{2} = 47,5 \text{ et } 1,96\sigma = 55 - 47,5 = 7,5 \text{ donc, } \sigma = \frac{7,5}{1,96} \simeq 3,8$$

Bjarne Riis, coureur cycliste danois, surnommé l'aigle de Herning et « Monsieur 60% » (son taux d'hématocrite étant supérieur à 60%), remporte le Tour de France 1996.

La probabilité qu'un homme ait un taux d'hématocrite supérieur à 60% est

$$P\left(\frac{X-45,5}{3,75} \geqslant \frac{60-45,5}{3,8}\right) = P\left(Z \geqslant \frac{60-45,5}{3,8}\right)$$

$$\simeq P(Z \geqslant 3,82) \simeq 6,7 \times 10^{-5} =$$

Désignons par la variable aléatoire T l'hématocrite d'un garçon :

$$\mu = E(T) = \frac{40+55}{2} = 47,5 \text{ et } 1,96\sigma = 55 - 47,5 = 7,5 \text{ donc, } \sigma = \frac{7,5}{1,96} \simeq 3,8$$

Bjarne Riis, coureur cycliste danois, surnommé l'aigle de Herning et « Monsieur 60% » (son taux d'hématocrite étant supérieur à 60%), remporte le Tour de France 1996.

La probabilité qu'un homme ait un taux d'hématocrite supérieur à 60% est

$$P\left(\frac{X-45,5}{3,75} \geqslant \frac{60-45,5}{3,8}\right) = P\left(Z \geqslant \frac{60-45,5}{3,8}\right)$$

$$\simeq P(Z \geqslant 3,82) \simeq 6,7 \times 10^{-5} = 0,000067 =$$

Désignons par la variable aléatoire T l'hématocrite d'un garçon :

$$\mu = E(T) = \frac{40+55}{2} = 47,5 \text{ et } 1,96\sigma = 55 - 47,5 = 7,5 \text{ donc, } \sigma = \frac{7,5}{1,96} \simeq 3,8$$

Bjarne Riis, coureur cycliste danois, surnommé l'aigle de Herning et « Monsieur 60% » (son taux d'hématocrite étant supérieur à 60%), remporte le Tour de France 1996.

La probabilité qu'un homme ait un taux d'hématocrite supérieur à 60% est

$$P\left(\frac{X-45,5}{3,75} \geqslant \frac{60-45,5}{3,8}\right) = P\left(Z \geqslant \frac{60-45,5}{3,8}\right)$$

$$\simeq P(Z \geqslant 3,82) \simeq 6,7 \times 10^{-5} = 0,000067 = \frac{67}{1000\,000}$$

Désignons par la variable aléatoire T l'hématocrite d'un garçon :

$$\mu = E(T) = \frac{40+55}{2} = 47,5 \text{ et } 1,96\sigma = 55 - 47,5 = 7,5 \text{ donc, } \sigma = \frac{7,5}{1,96} \simeq 3,8$$

Bjarne Riis, coureur cycliste danois, surnommé l'aigle de Herning et « Monsieur 60% » (son taux d'hématocrite étant supérieur à 60%), remporte le Tour de France 1996.

La probabilité qu'un homme ait un taux d'hématocrite supérieur à 60% est

$$P\left(\frac{X-45,5}{3,75} \geqslant \frac{60-45,5}{3,8}\right) = P\left(Z \geqslant \frac{60-45,5}{3,8}\right)$$

$$\simeq P(Z \geqslant 3,82) \simeq 6,7 \times 10^{-5} = 0,000067 = \frac{67}{1000\,000}$$

En 2007, il avouera s'être dopé à l'EPO lors de sa victoire sur le Tour de France.

6. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

6. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Définition:

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs positives $\left(X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+\right)$.

On a l'inégalité de **Markov** :

$$\forall \lambda \in]0, +\infty[, P\left(X \geqslant \lambda E(X)\right) \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration

Notons que le résultat est trivial si $\lambda \in]0, 1]$. Donc, on peut supposer $\boldsymbol{\lambda > 1}$.

Démonstration

Notons que le résultat est trivial si $\lambda \in]0,1]$. Donc, on peut supposer $\boldsymbol{\lambda > 1}$.

Cas n° 1 : X est discrète.

Démonstration

Notons que le résultat est trivial si $\lambda \in]0,1]$. Donc, on peut supposer $\boldsymbol{\lambda > 1}$.

Cas n° 1 : X est discrète.Nous écrirons $X(\Omega) = \{\boldsymbol{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots}\}$, en convenant de poser dans le cas où Card$X(\Omega) = n$: $P(X = x_i) = 0$ dès que $i > n$.

Démonstration

Notons que le résultat est trivial si $\lambda \in]0,1]$. Donc, on peut supposer $\boldsymbol{\lambda > 1}$.

Cas n° 1 : X est discrète.Nous écrirons $X(\Omega) = \{\boldsymbol{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots}\}$, en convenant de poser dans le cas où Card$X(\Omega) = n$: $P(X = x_i) = 0$ dès que $i > n$.

On rappelle que $E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i)$.

Démonstration

Notons que le résultat est trivial si $\lambda \in]0,1]$. Donc, on peut supposer $\boldsymbol{\lambda > 1}$.

Cas n° 1 : X est discrète.Nous écrirons $X(\Omega) = \{\boldsymbol{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots}\}$, en convenant de poser dans le cas où Card$X(\Omega) = n$: $P(X = x_i) = 0$ dès que $i > n$.

On rappelle que $E(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i)$. Cette série étant à termes positifs :

Démonstration

Notons que le résultat est trivial si $\lambda \in]0,1]$. Donc, on peut supposer $\boldsymbol{\lambda > 1}$.

Cas n° 1 : X est discrète.Nous écrirons $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$, en convenant de poser dans le cas où Card$X(\Omega) = n$: $P(X = x_i) = 0$ dès que $i > n$.

On rappelle que $E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i)$. Cette série étant à termes positifs :

$$E(X) \geqslant \sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} x_i P(X = x_i) \geqslant$$

Démonstration

Notons que le résultat est trivial si $\lambda \in]0,1]$. Donc, on peut supposer $\boldsymbol{\lambda > 1}$.

Cas n° 1 : X est discrète. Nous écrirons $X(\Omega) = \boldsymbol{\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}}$, en convenant de poser dans le cas où Card$X(\Omega) = n$: $P(X = x_i) = 0$ dès que $i > n$.

On rappelle que $E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i)$. Cette série étant à termes positifs :

$$E(X) \geqslant \sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} x_i P(X = x_i) \geqslant \sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} \lambda E(X) P(X = x_i) =$$

Démonstration

Notons que le résultat est trivial si $\lambda \in]0,1]$. Donc, on peut supposer $\boldsymbol{\lambda > 1}$.

Cas n° 1 : X est discrète. Nous écrirons $X(\Omega) = \boldsymbol{\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}}$, en convenant de poser dans le cas où Card$X(\Omega) = n$: $P(X = x_i) = 0$ dès que $i > n$.

On rappelle que $E(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i)$. Cette série étant à termes positifs :

$$E(X) \geqslant \sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} x_i P(X = x_i) \geqslant \sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} \lambda E(X) P(X = x_i) = \lambda E(X) \sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} P(X = x_i)$$

Démonstration

Notons que le résultat est trivial si $\lambda \in]0,1]$. Donc, on peut supposer $\boldsymbol{\lambda > 1}$.

Cas n° 1 : X est discrète. Nous écrirons $X(\Omega) = \{\boldsymbol{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots}\}$, en convenant de poser dans le cas où Card$X(\Omega) = n$: $P(X = x_i) = 0$ dès que $i > n$.

On rappelle que $E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i)$. Cette série étant à termes positifs :

$$E(X) \geqslant \sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} x_i P(X = x_i) \geqslant \sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} \lambda E(X) P(X = x_i) = \lambda E(X) \sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} P(X = x_i)$$

Démonstration

Notons que le résultat est trivial si $\lambda \in]0,1]$. Donc, on peut supposer $\boldsymbol{\lambda > 1}$.

Cas n° 1 : X est discrète.Nous écrirons $X(\Omega) = \boldsymbol{\{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}}$, en convenant de poser dans le cas où Card$X(\Omega) = n$: $P(X = x_i) = 0$ dès que $i > n$.

On rappelle que $E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i)$. Cette série étant à termes positifs :

$$E(X) \geqslant \sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} x_i P(X = x_i) \geqslant \sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} \lambda E(X) P(X = x_i) = \lambda E(X) \underbrace{\sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} P(X = x_i)}_{P\left(X \geqslant \lambda E(X)\right)}$$

Démonstration

Notons que le résultat est trivial si $\lambda \in]0,1]$. Donc, on peut supposer $\boldsymbol{\lambda > 1}$.

Cas n° 1 : X est discrète. Nous écrirons $X(\Omega) = \{\boldsymbol{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots}\}$, en convenant de poser dans le cas où Card $X(\Omega) = n$: $P(X = x_i) = 0$ dès que $i > n$.

On rappelle que $E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i)$. Cette série étant à termes positifs :

$$E(X) \geqslant \sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} x_i P(X = x_i) \geqslant \sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} \lambda E(X) P(X = x_i) = \lambda E(X) \underbrace{\sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} P(X = x_i)}_{P\left(X \geqslant \lambda E(X)\right)}$$

$$E(X) \geqslant \lambda E(X) P\big(X \geqslant \lambda E(X)\big)$$

Démonstration

Notons que le résultat est trivial si $\lambda \in]0,1]$. Donc, on peut supposer $\boldsymbol{\lambda > 1}$.

Cas n° 1 : X est discrète.Nous écrirons $X(\Omega) = \{\boldsymbol{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots}\}$, en convenant de poser dans le cas où Card$X(\Omega) = n$: $P(X = x_i) = 0$ dès que $i > n$.

On rappelle que $E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i)$. Cette série étant à termes positifs :

$$E(X) \geqslant \sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} x_i P(X = x_i) \geqslant \sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} \lambda E(X) P(X = x_i) = \lambda E(X) \underbrace{\sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} P(X = x_i)}_{P\left(X \geqslant \lambda E(X)\right)}$$

$$E(X) \geqslant \lambda E(X) P\big(X \geqslant \lambda E(X)\big)$$

D'où $\dfrac{1}{\lambda} \geqslant P\big(X \geqslant \lambda E(X)\big)$

Démonstration

Cas n° 2 : X est absolument continue.

Démonstration

Cas n° 2 : X est absolument continue.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t \underset{X(\Omega)\geqslant 0}{=}$$

Démonstration

Cas n° 2 : X est absolument continue.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t \underset{X(\Omega)\geqslant 0}{=} \int_{0}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Cas n° 2 : X est absolument continue.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t \underset{X(\Omega)\geqslant 0}{=} \int_{0}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{\lambda E(X)}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Cas n° 2 : X est absolument continue.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \underset{X(\Omega)\geqslant 0}{=} \int_{0}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{\lambda E(X)}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Or si $t \geqslant \lambda E(X)$ alors

Démonstration

Cas n° 2 : X est absolument continue.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \underset{X(\Omega)\geqslant 0}{=} \int_{0}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{\lambda E(X)}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Or si $t \geqslant \lambda E(X)$ alors $tf(t) \geqslant \lambda E(X) f(t)$

Démonstration

Cas nº 2 : X est absolument continue.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t \underset{X(\Omega)\geqslant 0}{=} \int_{0}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{\lambda E(X)}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$$

Or si $t \geqslant \lambda E(X)$ alors $t f(t) \geqslant \lambda E(X) f(t)$

$$E(X) \geqslant \lambda E(X) \int_{\lambda E(X)}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t =$$

Démonstration

Cas n° 2 : X est absolument continue.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \underset{X(\Omega)\geqslant 0}{=} \int_{0}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{\lambda E(X)}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Or si $t \geqslant \lambda E(X)$ alors $tf(t) \geqslant \lambda E(X) f(t)$

$$E(X) \geqslant \lambda E(X) \int_{\lambda E(X)}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda E(X) \int_{\lambda E(X)}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Cas n° 2 : X est absolument continue.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \underset{X(\Omega)\geqslant 0}{=} \int_{0}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{\lambda E(X)}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Or si $t \geqslant \lambda E(X)$ alors $tf(t) \geqslant \lambda E(X) f(t)$

$$E(X) \geqslant \lambda E(X) \int_{\lambda E(X)}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda E(X) \underbrace{\int_{\lambda E(X)}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}_{P\left(X \geqslant \lambda E(X)\right)}$$

Démonstration

Cas nº 2 : X est absolument continue.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t \underset{X(\Omega)\geqslant 0}{=} \int_{0}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{\lambda E(X)}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$$

Or si $t \geqslant \lambda E(X)$ alors $t f(t) \geqslant \lambda E(X) f(t)$

$$E(X) \geqslant \lambda E(X) \int_{\lambda E(X)}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda E(X) \underbrace{\int_{\lambda E(X)}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}_{P\left(X \geqslant \lambda E(X)\right)}$$

Soit $E(X) \geqslant \lambda E(X) P\big(X \geqslant \lambda E(X)\big)$

Démonstration

Cas n° 2 : X est absolument continue.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \underset{X(\Omega)\geqslant 0}{=} \int_{0}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{\lambda E(X)}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Or si $t \geqslant \lambda E(X)$ alors $tf(t) \geqslant \lambda E(X) f(t)$

$$E(X) \geqslant \lambda E(X) \int_{\lambda E(X)}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda E(X) \underbrace{\int_{\lambda E(X)}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}_{P\left(X \geqslant \lambda E(X)\right)}$$

Soit $E(X) \geqslant \lambda E(X) P\big(X \geqslant \lambda E(X)\big)$

D'où $\dfrac{1}{\lambda} \geqslant P\big(X \geqslant \lambda E(X)\big)$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle possédant une espérance et une variance non nulle. Alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ P\Big(\big|X - E(X)\big| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle possédant une espérance et une variance non nulle. Alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ P\Big(\big|X - E(X)\big| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Démonstration

Posons $Y = \big(X - E(X)\big)^2$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle possédant une espérance et une variance non nulle. Alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ P\Big(\big|X - E(X)\big| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Démonstration

Posons $Y = \big(X - E(X)\big)^2$. Par définition, $E(Y) = \sigma^2$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle possédant une espérance et une variance non nulle. Alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ P\Big(\big|X - E(X)\big| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Démonstration

Posons $Y = \big(X - E(X)\big)^2$. Par définition, $E(Y) = \sigma^2$. Par conséquent, d'après l'inégalité de Markov, en prenant $\lambda = \dfrac{\epsilon^2}{\sigma^2}$ on a :

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle possédant une espérance et une variance non nulle. Alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ P\Big(\big|X - E(X)\big| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Démonstration

Posons $Y = \big(X - E(X)\big)^2$. Par définition, $E(Y) = \sigma^2$. Par conséquent, d'après l'inégalité de Markov, en prenant $\lambda = \dfrac{\epsilon^2}{\sigma^2}$ on a : $P\big(Y \geqslant \underbrace{\epsilon^2}_{\lambda E(Y)}\big) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\epsilon^2}$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle possédant une espérance et une variance non nulle. Alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ P\Big(\big|X - E(X)\big| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Démonstration

Posons $Y = \big(X - E(X)\big)^2$. Par définition, $E(Y) = \sigma^2$. Par conséquent, d'après l'inégalité de Markov, en prenant $\lambda = \dfrac{\epsilon^2}{\sigma^2}$ on a : $P\big(Y \geqslant \underbrace{\epsilon^2}_{\lambda E(Y)}\big) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\epsilon^2}$

Il suffit de remarquer que

$$\big(Y \geqslant \epsilon^2\big) = \Big(\big(X - E(X)\big)^2 \geqslant \epsilon^2\Big) = \Big(\big|X - E(X)\big| \geqslant \epsilon\Big)$$

7. Convergence en probabilité

7. Convergence en probabilité

Définition:

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité (ou encore **stochastiquement**) vers X si l'on a :

7. Convergence en probabilité

Définition:

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité (ou encore **stochastiquement**) vers X si l'on a :

$$\forall \epsilon > 0, \ \lim_{n\to\infty} P\Big(\big|X_n - X\big| \geqslant \epsilon\Big) = 0$$

7. Convergence en probabilité

Définition:

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité (ou encore **stochastiquement**) vers X si l'on a :

$$\forall \epsilon > 0, \ \lim_{n\to\infty} P\Big(\big|X_n - X\big| \geqslant \epsilon\Big) = 0$$

On note : $\boldsymbol{(X_n)_{n\in\mathbb{N}}} \xrightarrow{\ \mathbb{P}\ } \boldsymbol{X}$

La loi faible des Grands Nombres

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de même loi, ayant une espérance $\boldsymbol{m}$ et une variance $\boldsymbol{\sigma^2}$, et qui sont deux à deux indépendantes.

La loi faible des Grands Nombres

Soit $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de même loi, ayant une espérance $\boldsymbol{m}$ et une variance $\boldsymbol{\sigma^2}$, et qui sont deux à deux indépendantes.

Posons $\overline{X}_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ (moyenne des n premières v.a.r X_i).

La loi faible des Grands Nombres

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de même loi, ayant une espérance $\boldsymbol{m}$ et une variance $\boldsymbol{\sigma^2}$, et qui sont deux à deux indépendantes.

Posons $\overline{X}_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ (moyenne des n premières v.a.r X_i). Alors,

i. la suite $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge en probabilité** vers la variable aléatoire certaine égale à m ;

La loi faible des Grands Nombres

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de même loi, ayant une espérance $\boldsymbol{m}$ et une variance $\boldsymbol{\sigma^2}$, et qui sont deux à deux indépendantes.

Posons $\overline{X}_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ (moyenne des n premières v.a.r X_i). Alors,

i. la suite $\left(\overline{X}_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge en probabilité** vers la variable aléatoire certaine égale à m ;

ii. $\forall \epsilon > 0,\ P\left(\left|\overline{X}_n - m\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$

Exemple n° 3 : On jette indéfiniment un dé cubique. On note X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i^e^ dè donne un six, 0 sinon.

Exemple n° 3 : On jette indéfiniment un dé cubique. On note X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i^e^ dè donne un six, 0 sinon. On pose
$\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: **la fréquence d'apparition des 6 sur les n premiers lancés.**

Exemple n° 3 : On jette indéfiniment un dé cubique. On note X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i[e] dè donne un six, 0 sinon. On pose
$\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$: **la fréquence d'apparition des 6 sur les n premiers lancés.**

Il est clair que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{6}\right)$ donc $m = E(X_i) =$

Exemple n° 3 : On jette indéfiniment un dé cubique. On note X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i^e^ dè donne un six, 0 sinon. On pose $\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$: **la fréquence d'apparition des 6 sur les n premiers lancés.**

Il est clair que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{6}\right)$ donc $m = E(X_i) = \boldsymbol{p = \dfrac{1}{6}}$ et

Exemple n° 3 : On jette indéfiniment un dé cubique. On note X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i[e] dè donne un six, 0 sinon. On pose $\overline{F}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$: **la fréquence d'apparition des 6 sur les n premiers lancés.**

Il est clair que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{6}\right)$ donc $m = E(X_i) = \boldsymbol{p = \frac{1}{6}}$ et

$\sigma^2(X_i) =$

Exemple n° 3 : On jette indéfiniment un dé cubique. On note X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le iᵉ dè donne un six, 0 sinon. On pose $\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$: **la fréquence d'apparition des 6 sur les n premiers lancés.**

Il est clair que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{6}\right)$ donc $m = E(X_i) = \boldsymbol{p = \dfrac{1}{6}}$ et $\sigma^2(X_i) = \boldsymbol{pq = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}}$.

Exemple n° 3 : On jette indéfiniment un dé cubique. On note X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i[e] dè donne un six, 0 sinon. On pose $\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: **la fréquence d'apparition des 6 sur les n premiers lancés.**

Il est clair que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{6}\right)$ donc $m = E(X_i) = \boldsymbol{p = \dfrac{1}{6}}$ et

$\sigma^2(X_i) = \boldsymbol{pq = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}}$. Le théorème affirme que :

i. $\left(\overline{F}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbb{P}}$

Exemple n° 3 : On jette indéfiniment un dé cubique. On note X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i^{e} dè donne un six, 0 sinon. On pose

$\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$: **la fréquence d'apparition des 6 sur les n premiers lancés.**

Il est clair que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{6}\right)$ donc $m = E(X_i) = \boldsymbol{p = \dfrac{1}{6}}$ et

$\sigma^2(X_i) = \boldsymbol{pq = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}}$. Le théorème affirme que :

i. $\left(\overline{F}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

Exemple n° 3 : On jette indéfiniment un dé cubique. On note X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i[e] dè donne un six, 0 sinon. On pose $\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: **la fréquence d'apparition des 6 sur les n premiers lancés.**

Il est clair que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{6}\right)$ donc $m = E(X_i) = \boldsymbol{p = \dfrac{1}{6}}$ et $\sigma^2(X_i) = \boldsymbol{pq = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}}$. Le théorème affirme que :

i. $\left(\overline{F}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

ii. $\forall \epsilon > 0,\ P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\epsilon^2} =$

Exemple n° 3 : On jette indéfiniment un dé cubique. On note X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i[e] dè donne un six, 0 sinon. On pose

$\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: **la fréquence d'apparition des 6 sur les n premiers lancés.**

Il est clair que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{6}\right)$ donc $m = E(X_i) = \boldsymbol{p = \dfrac{1}{6}}$ et

$\sigma^2(X_i) = \boldsymbol{pq = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}}$. Le théorème affirme que :

i. $\left(\overline{F}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

ii. $\forall \epsilon > 0,\ P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\epsilon^2} = \boldsymbol{\dfrac{\frac{5}{36}}{n\epsilon^2} = \dfrac{5}{36n\epsilon^2}}$.

Exemple n° 3 : On jette indéfiniment un dé cubique. On note X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i[e] dè donne un six, 0 sinon. On pose
$\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: **la fréquence d'apparition des 6 sur les n premiers lancés.**

Il est clair que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{6}\right)$ donc $m = E(X_i) = \boldsymbol{p = \dfrac{1}{6}}$ et

$\sigma^2(X_i) = \boldsymbol{pq = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}}$. Le théorème affirme que :

i. $\left(\overline{F}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

ii. $\forall \epsilon > 0,\ P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\epsilon^2} = \boldsymbol{\dfrac{\frac{5}{36}}{n\epsilon^2} = \dfrac{5}{36n\epsilon^2}}$.

Pour un $\epsilon > 0$ donné, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{F}_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant \epsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{36n\epsilon^2} =$

Exemple n° 3 : On jette indéfiniment un dé cubique. On note X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i[e] dè donne un six, 0 sinon. On pose

$\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$: **la fréquence d'apparition des 6 sur les n premiers lancés.**

Il est clair que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{6}\right)$ donc $m = E(X_i) = \boldsymbol{p = \dfrac{1}{6}}$ et

$\sigma^2(X_i) = \boldsymbol{pq = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}}$. Le théorème affirme que :

i. $\left(\overline{F}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

ii. $\forall \epsilon > 0,\ P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\epsilon^2} = \boldsymbol{\dfrac{\frac{5}{36}}{n\epsilon^2} = \dfrac{5}{36n\epsilon^2}}$.

Pour un $\epsilon > 0$ donné, $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant \epsilon\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{36n\epsilon^2} = \boldsymbol{0}$: la fréquence converge vers la probabilité.

Exemple n° 3: On jette indéfiniment un dé cubique. On note X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i[e] dè donne un six, 0 sinon. On pose

$\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: **la fréquence d'apparition des 6 sur les n premiers lancés.**

Il est clair que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{6}\right)$ donc $m = E(X_i) = \boldsymbol{p = \dfrac{1}{6}}$ et

$\sigma^2(X_i) = \boldsymbol{pq = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}}$. Le théorème affirme que :

i. $\left(\overline{F}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

ii. $\forall \epsilon > 0,\ P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\epsilon^2} = \boldsymbol{\dfrac{\frac{5}{36}}{n\epsilon^2} = \dfrac{5}{36n\epsilon^2}}$.

Exemple n° 3: On jette indéfiniment un dé cubique. On note X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i^e dè donne un six, 0 sinon. On pose

$\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: **la fréquence d'apparition des 6 sur les n premiers lancés.**

Il est clair que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{6}\right)$ donc $m = E(X_i) = \boldsymbol{p = \dfrac{1}{6}}$ et

$\sigma^2(X_i) = \boldsymbol{pq = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}}$. Le théorème affirme que :

i. $\left(\overline{F}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

ii. $\forall \epsilon > 0,\ P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\epsilon^2} = \boldsymbol{\dfrac{\frac{5}{36}}{n\epsilon^2} = \dfrac{5}{36n\epsilon^2}}$.

Pour $\epsilon = 0,01$ et $n = 100\ 000$ on a :

Exemple n° 3: On jette indéfiniment un dé cubique. On note X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i^e^ dè donne un six, 0 sinon. On pose

$\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: **la fréquence d'apparition des 6 sur les n premiers lancés.**

Il est clair que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{6}\right)$ donc $m = E(X_i) = \boldsymbol{p = \dfrac{1}{6}}$ et

$\sigma^2(X_i) = \boldsymbol{pq = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}}$. Le théorème affirme que :

i. $\left(\overline{F}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

ii. $\forall \epsilon > 0,\ P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\epsilon^2} = \boldsymbol{\dfrac{\frac{5}{36}}{n\epsilon^2} = \dfrac{5}{36n\epsilon^2}}$.

Pour $\epsilon = 0,01$ et $n = 100\ 000$ on a :

$$P\left(\left|\overline{F}_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant$$

Exemple n° 3: On jette indéfiniment un dé cubique. On note X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i[e] dè donne un six, 0 sinon. On pose

$\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: **la fréquence d'apparition des 6 sur les n premiers lancés.**

Il est clair que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{6}\right)$ donc $m = E(X_i) = \boldsymbol{p = \dfrac{1}{6}}$ et

$\sigma^2(X_i) = \boldsymbol{pq = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}}$. Le théorème affirme que :

i. $\left(\overline{F}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

ii. $\forall \epsilon > 0,\ P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\epsilon^2} = \boldsymbol{\dfrac{\frac{5}{36}}{n\epsilon^2} = \dfrac{5}{36n\epsilon^2}}$.

Pour $\epsilon = 0,01$ et $n = 100\ 000$ on a :

$$P\left(\left|\overline{F}_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant \boldsymbol{\frac{5}{36 \times 100\ 000 \times 0,01^2} =}$$

Exemple n° 3: On jette indéfiniment un dé cubique. On note X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i^e dè donne un six, 0 sinon. On pose $\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: **la fréquence d'apparition des 6 sur les n premiers lancés.**

Il est clair que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{6}\right)$ donc $m = E(X_i) = \boldsymbol{p = \dfrac{1}{6}}$ et

$\sigma^2(X_i) = \boldsymbol{pq = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}}$. Le théorème affirme que :

i. $\left(\overline{F}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

ii. $\forall \epsilon > 0,\ P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\epsilon^2} = \boldsymbol{\dfrac{\frac{5}{36}}{n\epsilon^2} = \dfrac{5}{36n\epsilon^2}}$.

Pour $\epsilon = 0,01$ et $n = 100\ 000$ on a :

$$P\left(\left|\overline{F}_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant \boldsymbol{\frac{5}{36 \times 100\ 000 \times 0,01^2} = \frac{5}{360} \simeq 0,014}$$

Rappel : L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle possédant une espérance et une variance non nulle. Alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ P\Big(\big|X - E(X)\big| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Démonstration de la loi faible des Grands Nombres

- $E\left(\overline{X}_n\right) =$

Rappel : L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle possédant une espérance et une variance non nulle. Alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ P\Big(\big|X - E(X)\big| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Démonstration de la loi faible des Grands Nombres

- $E(\overline{X}_n) = \dfrac{1}{n} E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$

Rappel : L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle possédant une espérance et une variance non nulle. Alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ P\Big(\big|X - E(X)\big| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Démonstration de la loi faible des Grands Nombres

- $E(\overline{X}_n) = \dfrac{1}{n} E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = m$

Rappel : L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle possédant une espérance et une variance non nulle. Alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ P\Big(\big|X - E(X)\big| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Démonstration de la loi faible des Grands Nombres

- $E\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{1}{n} E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = m$
- $V\left(\overline{X}_n\right) =$

Rappel : L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle possédant une espérance et une variance non nulle. Alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ P\Big(\big|X - E(X)\big| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Démonstration de la loi faible des Grands Nombres

- $E\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{1}{n} E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = m$
- $V\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{1}{n^2} V\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$

Rappel : L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle possédant une espérance et une variance non nulle. Alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ P\left(\left|X - E(X)\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Démonstration de la loi faible des Grands Nombres

- $E\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{1}{n} E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = m$
- $V\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{1}{n^2} V\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

Rappel : L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle possédant une espérance et une variance non nulle. Alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ P\Big(\big|X - E(X)\big| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Démonstration de la loi faible des Grands Nombres

- $E\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{1}{n} E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = m$
- $V\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{1}{n^2} V\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ car les X_i sont deux à deux indépendantes.

Rappel : L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle possédant une espérance et une variance non nulle. Alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ P\Big(\big|X - E(X)\big| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Démonstration de la loi faible des Grands Nombres

- $E(\overline{X}_n) = \dfrac{1}{n} E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = m$
- $V(\overline{X}_n) = \dfrac{1}{n^2} V\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ car les X_i sont deux à deux indépendantes.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit $P\Big(\big|\overline{X}_n - m\big| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \dfrac{\frac{\sigma^2}{n}}{\epsilon^2} = \dfrac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$

Théorème

Soit $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle ayant toutes une espérance et une variance.

Théorème

Soit $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle ayant toutes une espérance et une variance.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(X_n\right) = E(X)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} V\left(X_n - X\right) = 0$, alors

Théorème

Soit $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle ayant toutes une espérance et une variance.

Si $\lim_{n\to\infty} E\left(X_n\right) = E(X)$ et $\lim_{n\to\infty} V\left(X_n - X\right) = 0$, alors la suite $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X.

8. Convergence en loi

8. Convergence en loi

Définition:

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. Pour chaque entier n, on note F_n la fonction de répartition de X_n.

8. Convergence en loi

Définition:

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. Pour chaque entier n, on note F_n la fonction de répartition de X_n. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.

8. Convergence en loi

Définition:

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. Pour chaque entier n, on note F_n la fonction de répartition de X_n. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.

On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X si, en tout point $x \in \mathbb{R}$ où F est continue, on a :

8. Convergence en loi

Définition:

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. Pour chaque entier n, on note F_n la fonction de répartition de X_n. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.

On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X si, en tout point $x \in \mathbb{R}$ où F est continue, on a :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

8. Convergence en loi

Définition:

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. Pour chaque entier n, on note F_n la fonction de répartition de X_n. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.

On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X si, en tout point $x \in \mathbb{R}$ où F est continue, on a :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

On note : $\boldsymbol{(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X}$

Définition:

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. Pour chaque entier n, on note F_n la fonction de répartition de X_n. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.

On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X si, en tout point $x \in \mathbb{R}$ où F est continue, on a :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

Remarque :

Définition:

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. Pour chaque entier n, on note F_n la fonction de répartition de X_n. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.

On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X si, en tout point $x \in \mathbb{R}$ où F est continue, on a :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

Remarque :

i. Si X_n et X sont des variables absolument continues de densités respectives f_n et f alors la convergence en loi s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Définition:

Soit $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. Pour chaque entier n, on note F_n la fonction de répartition de X_n. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.

On dit que la suite $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X si, en tout point $x \in \mathbb{R}$ où F est continue, on a :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

Remarque :

ii. On démontre facilement que la suite $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si et seulement si, pour tout a et b réels tels que F soit continues en a et en b, on a :
$$\lim_{n\to\infty} P\big(a < X_n \leqslant b\big) = P\big(a < X \leqslant b\big)$$

Théorème

Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en **probabilité** vers X, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

Théorème

Si la suite $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en **probabilité** vers X, alors $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

Remarque:

La **réciproque** est fausse

Théorème de la limite centrale

Soit $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, les X_i ayant toutes la même loi, une même espérance m et un même écart-type σ. Posons $\overline{X}_n$ la moyenne des n premières variables aléatoires X_i : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Si les variables aléatoires X_i sont deux à deux **indépendantes**, alors

$$\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Théorème de la limite centrale

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, les X_i ayant toutes la même loi, une même espérance m et un même écart-type σ. Posons $\overline{X}_n$ la moyenne des n premières variables aléatoires X_i : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Si les variables aléatoires X_i sont deux à deux **indépendantes**, alors

$$\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Remarque : comme on l'a vu lors de l'étude de la loi faible des Grands Nombres :

Théorème de la limite centrale

Soit $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, les X_i ayant toutes la même loi, une même espérance m et un même écart-type σ. Posons $\overline{X}_n$ la moyenne des n premières variables aléatoires X_i : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Si les variables aléatoires X_i sont deux à deux **indépendantes**, alors

$$\left(\frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Remarque : comme on l'a vu lors de l'étude de la loi faible des Grands Nombres :

- $E\left(\overline{X}_n\right) =$

Théorème de la limite centrale

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, les X_i ayant toutes la même loi, une même espérance m et un même écart-type σ. Posons $\overline{X}_n$ la moyenne des n premières variables aléatoires X_i : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Si les variables aléatoires X_i sont deux à deux **indépendantes**, alors

$$\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Remarque : comme on l'a vu lors de l'étude de la loi faible des Grands Nombres :

- $E(\overline{X}_n) = \boldsymbol{m}$

Théorème de la limite centrale

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, les X_i ayant toutes la même loi, une même espérance m et un même écart-type σ. Posons $\overline{X}_n$ la moyenne des n premières variables aléatoires X_i : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Si les variables aléatoires X_i sont deux à deux **indépendantes**, alors

$$\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Remarque : comme on l'a vu lors de l'étude de la loi faible des Grands Nombres :

- $E\left(\overline{X}_n\right) = \boldsymbol{m}$
- $V\left(\overline{X}_n\right) =$

Théorème de la limite centrale

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, les X_i ayant toutes la même loi, une même espérance m et un même écart-type σ. Posons $\overline{X}_n$ la moyenne des n premières variables aléatoires X_i : $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Si les variables aléatoires X_i sont deux à deux **indépendantes**, alors

$$\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Remarque : comme on l'a vu lors de l'étude de la loi faible des Grands Nombres :

- $E\left(\overline{X}_n\right) = \boldsymbol{m}$
- $V\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{\boldsymbol{\sigma^2}}{\boldsymbol{n}}$

Théorème de la limite centrale

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, les X_i ayant toutes la même loi, une même espérance m et un même écart-type σ. Posons $\overline{X}_n$ la moyenne des n premières variables aléatoires X_i : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Si les variables aléatoires X_i sont deux à deux **indépendantes**, alors

$$\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Remarque : comme on l'a vu lors de l'étude de la loi faible des Grands Nombres :

- $E\left(\overline{X}_n\right) = \boldsymbol{m}$
- $V\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{\boldsymbol{\sigma^2}}{\boldsymbol{n}}$ donc $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ est **l'écart-type de $\overline{X}_n$.**

Théorème de la limite centrale

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, les X_i ayant toutes la même loi, une même espérance m et un même écart-type σ. Posons $\overline{X}_n$ la moyenne des n premières variables aléatoires X_i : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Si les variables aléatoires X_i sont deux à deux **indépendantes**, alors

$$\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Théorème de la limite centrale

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, les X_i ayant toutes la même loi, une même espérance m et un même écart-type σ. Posons $\overline{X}_n$ la moyenne des n premières variables aléatoires X_i : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Si les variables aléatoires X_i sont deux à deux **indépendantes**, alors

$$\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Remarque :

Théorème de la limite centrale

Soit $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, les X_i ayant toutes la même loi, une même espérance m et un même écart-type σ. Posons $\overline{X}_n$ la moyenne des n premières variables aléatoires X_i : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Si les variables aléatoires X_i sont deux à deux **indépendantes**, alors

$$\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Remarque :

i. En pratique, dès que $n \geqslant 30$, on considère que $\overline{X}_n$ suit une loi normale.

Théorème de la limite centrale

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, les X_i ayant toutes la même loi, une même espérance m et un même écart-type σ. Posons $\overline{X}_n$ la moyenne des n premières variables aléatoires X_i : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Si les variables aléatoires X_i sont deux à deux **indépendantes**, alors

$$\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Remarque :

i. En pratique, dès que $n \geqslant 30$, on considère que $\overline{X}_n$ suit une loi normale.

ii. Puisque, par exemple $\overline{X}_n$ suit une loi normale, alors $S_n = n \times \overline{X}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ aussi.

Théorème de la limite centrale

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, les X_i ayant toutes la même loi, une même espérance m et un même écart-type σ. Posons $\overline{X}_n$ la moyenne des n premières variables aléatoires X_i : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Si les variables aléatoires X_i sont deux à deux **indépendantes**, alors

$$\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Remarque :

i. En pratique, dès que $n \geqslant 30$, on considère que $\overline{X}_n$ suit une loi normale.

ii. Puisque, par exemple $\overline{X}_n$ suit une loi normale, alors $S_n = n \times \overline{X}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ aussi. Donc, pour un entier n assez grand, on peut considérer que S_n suit une loi **normale** d'espérance $E(S_n)$ et d'écart-type $\sigma(S_n)$.

Exemple n° 4 : Reprenons l'exemple précédent où l'on jette indéfiniment un dé cubique : On note X_i était la variable aléatoire qui est égale à 1 si le iᵉ dè donne un six, 0 sinon, et
$\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: la fréquence d'apparition des $\mathbf{6}$ sur les $\boldsymbol{n}$ premiers lancés.

Exemple n° 4 : Reprenons l'exemple précédent où l'on jette indéfiniment un dé cubique : On note X_i était la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i^e dè donne un six, 0 sinon, et

$\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: la fréquence d'apparition des $\mathbf{6}$ sur les $\boldsymbol{n}$ premiers lancés.

On a trouvé : $m = E(X_i) = \dfrac{1}{6}$ et $\sigma^2(X_i) = \dfrac{5}{36}$.

Exemple n° 4 : Reprenons l'exemple précédent où l'on jette indéfiniment un dé cubique : On note X_i était la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i[e] dè donne un six, 0 sinon, et

$\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: la fréquence d'apparition des $\boldsymbol{6}$ sur les $\boldsymbol{n}$ premiers lancés.

On a trouvé : $m = E(X_i) = \dfrac{1}{6}$ et $\sigma^2(X_i) = \dfrac{5}{36}$.

- Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

  Pour $\epsilon = 0,01$ et $n = 100\ 000$ on avait trouvé :

Exemple n° 4 : Reprenons l'exemple précédent où l'on jette indéfiniment un dé cubique : On note X_i était la variable aléatoire qui est égale à 1 si le iᵉ dè donne un six, 0 sinon, et

$\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: la fréquence d'apparition des $\mathbf{6}$ sur les $\boldsymbol{n}$ premiers lancés.

On a trouvé : $m = E(X_i) = \dfrac{1}{6}$ et $\sigma^2(X_i) = \dfrac{5}{36}$.

- Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

  Pour $\epsilon = 0,01$ et $n = 100\ 000$ on avait trouvé :$P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant \dfrac{5}{360} \simeq 0,014$

Exemple n° 4 : Reprenons l'exemple précédent où l'on jette indéfiniment un dé cubique : On note X_i était la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i^{e} dè donne un six, 0 sinon, et

$\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: la fréquence d'apparition des $\mathbf{6}$ sur les $\boldsymbol{n}$ premiers lancés.

On a trouvé : $m = E(X_i) = \dfrac{1}{6}$ et $\sigma^2(X_i) = \dfrac{5}{36}$.

- Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

  Pour $\epsilon = 0,01$ et $n = 100\ 000$ on avait trouvé :$P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant \dfrac{5}{360} \simeq 0,014$

- Avec le théorème de la limite centrale : $\dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Exemple n° 4 : Reprenons l'exemple précédent où l'on jette indéfiniment un dé cubique : On note X_i était la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i^{e} dè donne un six, 0 sinon, et

$\overline{F}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$: la fréquence d'apparition des $\mathbf{6}$ sur les $\boldsymbol{n}$ premiers lancés.

On a trouvé : $m = E(X_i) = \frac{1}{6}$ et $\sigma^2(X_i) = \frac{5}{36}$.

- Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

  Pour $\epsilon = 0,01$ et $n = 100\ 000$ on avait trouvé : $P\left(\left|\overline{F}_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant \frac{5}{360} \simeq 0,014$

- Avec le théorème de la limite centrale : $\dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

  On cherche n tel que :

Exemple n° 4 : Reprenons l'exemple précédent où l'on jette indéfiniment un dé cubique : On note X_i était la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i^e dè donne un six, 0 sinon, et

$\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: la fréquence d'apparition des $\mathbf{6}$ sur les $\boldsymbol{n}$ premiers lancés.

On a trouvé : $m = E(X_i) = \dfrac{1}{6}$ et $\sigma^2(X_i) = \dfrac{5}{36}$.

- Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

  Pour $\epsilon = 0,01$ et $n = 100\ 000$ on avait trouvé :$P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant \dfrac{5}{360} \simeq 0,014$

- Avec le théorème de la limite centrale : $\dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

  On cherche n tel que : $P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) = \dfrac{5}{360}$

Exemple n° 4 : Reprenons l'exemple précédent où l'on jette indéfiniment un dé cubique : On note X_i était la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i^e dè donne un six, 0 sinon, et

$\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: la fréquence d'apparition des **6** sur les $\boldsymbol{n}$ premiers lancés.

On a trouvé : $m = E(X_i) = \dfrac{1}{6}$ et $\sigma^2(X_i) = \dfrac{5}{36}$.

- Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

  Pour $\epsilon = 0,01$ et $n = 100\ 000$ on avait trouvé :$P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant \dfrac{5}{360} \simeq 0,014$

- Avec le théorème de la limite centrale : $\dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

  On cherche n tel que : $P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) = \dfrac{5}{360}$

  Autrement dit, $P\left(\overline{\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01}\right) = P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \leqslant 0,01\right) =$

Exemple n° 4 : Reprenons l'exemple précédent où l'on jette indéfiniment un dé cubique : On note X_i était la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i^e dè donne un six, 0 sinon, et

$\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: la fréquence d'apparition des **6** sur les $\boldsymbol{n}$ premiers lancés.

On a trouvé : $m = E(X_i) = \dfrac{1}{6}$ et $\sigma^2(X_i) = \dfrac{5}{36}$.

- Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

  Pour $\epsilon = 0,01$ et $n = 100\ 000$ on avait trouvé :$P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant \dfrac{5}{360} \simeq 0,014$

- Avec le théorème de la limite centrale : $\dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

  On cherche n tel que : $P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) = \dfrac{5}{360}$

  Autrement dit, $P\left(\overline{\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01}\right) = P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \leqslant 0,01\right) = 1 - \dfrac{5}{360} =$

Exemple n° 4 : Reprenons l'exemple précédent où l'on jette indéfiniment un dé cubique : On note X_i était la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i^e dè donne un six, 0 sinon, et

$\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: la fréquence d'apparition des $\mathbf{6}$ sur les $\boldsymbol{n}$ premiers lancés.

On a trouvé : $m = E(X_i) = \dfrac{1}{6}$ et $\sigma^2(X_i) = \dfrac{5}{36}$.

- Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

  Pour $\epsilon = 0,01$ et $n = 100\ 000$ on avait trouvé :$P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant \dfrac{5}{360} \simeq 0,014$

- Avec le théorème de la limite centrale : $\dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

  On cherche n tel que : $P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) = \dfrac{5}{360}$

  Autrement dit, $P\left(\overline{\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01}\right) = P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \leqslant 0,01\right) = 1 - \dfrac{5}{360} = \dfrac{355}{360}$

- Avec le théorème de la limite centrale : $\dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Autrement dit, $P\left(\overline{\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01}\right) = P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \leqslant 0,01\right) = 1 - \dfrac{5}{360} = \dfrac{355}{360}$

- Avec le théorème de la limite centrale : $\dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Autrement dit, $P\left(\overline{\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01}\right) = P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \leqslant 0,01\right) = 1 - \dfrac{5}{360} = \dfrac{355}{360}$

$P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \leqslant 0,01\right) = P\left(-0,01 \leqslant \overline{F}_n - \dfrac{1}{6} \leqslant 0,01\right)$

- Avec le théorème de la limite centrale : $\dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Autrement dit, $P\left(\overline{\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01}\right) = P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \leqslant 0,01\right) = 1 - \dfrac{5}{360} = \dfrac{355}{360}$

$$P\left(\left|\overline{F}_n - \frac{1}{6}\right| \leqslant 0,01\right) = P\left(-0,01 \leqslant \overline{F}_n - \frac{1}{6} \leqslant 0,01\right)$$

$$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} \leqslant \frac{\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right)$$

- Avec le théorème de la limite centrale : $\dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

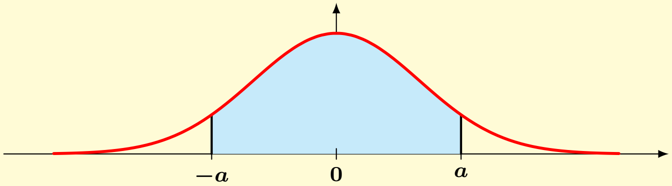
Autrement dit, $P\left(\overline{\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01}\right) = P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \leqslant 0,01\right) = 1 - \dfrac{5}{360} = \dfrac{355}{360}$

$$P\left(\left|\overline{F}_n - \frac{1}{6}\right| \leqslant 0,01\right) = P\left(-0,01 \leqslant \overline{F}_n - \frac{1}{6} \leqslant 0,01\right)$$

$$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} \leqslant \frac{\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} \leqslant Z \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right) =$$

Question

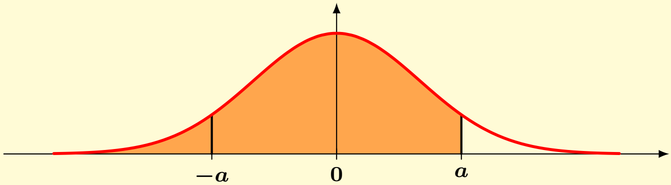


$P(-a \leqslant Z \leqslant a) =$

$$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant \frac{F_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant Z \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right) =$$

Question

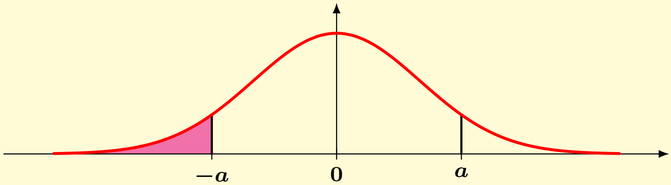


$$P(-a \leqslant Z \leqslant a) = P(Z \leqslant a) -$$

$$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant \frac{F_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant Z \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right) =$$

Question

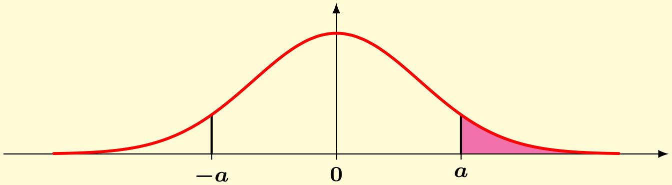


$$P(-a \leqslant Z \leqslant a) = P(Z \leqslant a) - P(Z \leqslant -a)$$

$$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} \leqslant \frac{F_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} \leqslant Z \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right) =$$

Question

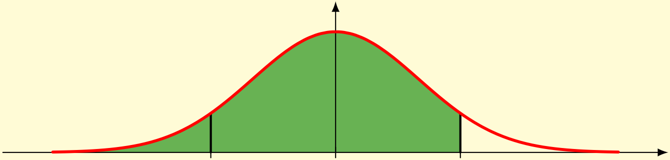


$$P(-a \leqslant Z \leqslant a) = P(Z \leqslant a) - P(Z \geqslant a)$$

$$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant \frac{F_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant Z \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right) =$$

Question

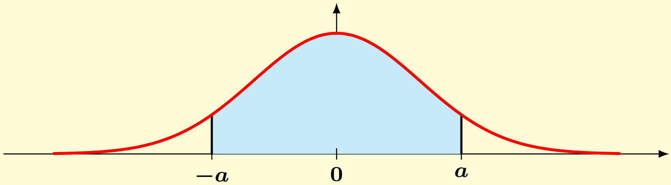


$$P(-a \leqslant Z \leqslant a) = P(Z \leqslant a) - [1 - P(Z \leqslant a)]$$

$$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant \frac{P_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant Z \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right) =$$

Question

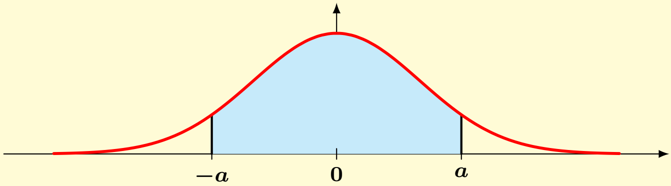


$$P(-a \leqslant Z \leqslant a) = 2P(Z \leqslant a) - 1$$

$$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant \frac{F_n \cdots 6}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant Z \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right) =$$

Question



$$P(-a \leqslant Z \leqslant a) = 2P(Z \leqslant a) - 1$$

$$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant \frac{F_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant Z \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right) = 2P\left(Z \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right) - 1$$

- Avec le théorème de la limite centrale : $\dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Autrement dit, $P\left(\overline{\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01}\right) = P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \leqslant 0,01\right) = 1 - \dfrac{5}{360} = \dfrac{355}{360}$

$$P\left(\left|\overline{F}_n - \frac{1}{6}\right| \leqslant 0,01\right) = P\left(-0,01 \leqslant \overline{F}_n - \frac{1}{6} \leqslant 0,01\right)$$

$$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant \frac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right)$$

$$= \boldsymbol{P}\left(\frac{\mathbf{-0,01}}{\sqrt{\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}\boldsymbol{n}}}} \leqslant \boldsymbol{Z} \leqslant \frac{\mathbf{0,01}}{\sqrt{\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}\boldsymbol{n}}}}\right) = 2P\left(Z \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right) - 1$$

$$= \frac{355}{360}$$

Ainsi, $P\left(Z \leqslant \dfrac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right) =$

Ainsi, $P\left(Z \leqslant \dfrac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right) = \dfrac{\dfrac{355}{360}+1}{2} = \dfrac{143}{144} \simeq$

Ainsi, $P\left(Z \leqslant \dfrac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right) = \dfrac{\dfrac{355}{360}+1}{2} = \dfrac{143}{144} \simeq 0,9931$

Ainsi, $P\left(Z \leqslant \dfrac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right) = \dfrac{\dfrac{355}{360}+1}{2} = \dfrac{143}{144} \simeq 0,9931$

En utilisant la table, on trouve $P(Z \leqslant ???\ ) \simeq 0,9931$.

Ainsi, $P\left(Z \leqslant \dfrac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right) = \dfrac{\dfrac{355}{360}+1}{2} = \dfrac{143}{144} \simeq 0,9931$

En utilisant la table, on trouve $P(Z \leqslant 2,46) \simeq 0,9931$.

Ainsi, $P\left(Z \leqslant \dfrac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right) = \dfrac{\dfrac{355}{360}+1}{2} = \dfrac{143}{144} \simeq 0,9931$

En utilisant la table, on trouve $P(Z \leqslant 2,46) \simeq 0,9931$.

$$\frac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} = 2,46$$

Ainsi, $P\left(Z \leqslant \dfrac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right) = \dfrac{\dfrac{355}{360}+1}{2} = \dfrac{143}{144} \simeq 0,9931$

En utilisant la table, on trouve $P(Z \leqslant 2,46) \simeq 0,9931$.

$$\frac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} = 2,46 \iff \sqrt{\frac{5}{36n}} = \frac{0,01}{2,46}$$

Ainsi, $P\left(Z \leqslant \dfrac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right) = \dfrac{\dfrac{355}{360}+1}{2} = \dfrac{143}{144} \simeq 0,9931$

En utilisant la table, on trouve $P(Z \leqslant 2,46) \simeq 0,9931$.

$$\frac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} = 2,46 \iff \sqrt{\frac{5}{36n}} = \frac{0,01}{2,46} \iff n =$$

Ainsi, $P\left(Z \leqslant \dfrac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right) = \dfrac{\dfrac{355}{360}+1}{2} = \dfrac{143}{144} \simeq 0,9931$

En utilisant la table, on trouve $P(Z \leqslant 2,46) \simeq 0,9931$.

$$\frac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} = 2,46 \iff \sqrt{\frac{5}{36n}} = \frac{0,01}{2,46} \iff n = \left(\frac{2,46}{0,01}\right)^2 \times \frac{5}{36} =$$

Ainsi, $P\left(Z \leqslant \dfrac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right) = \dfrac{\dfrac{355}{360}+1}{2} = \dfrac{143}{144} \simeq 0,9931$

En utilisant la table, on trouve $P(Z \leqslant 2,46) \simeq 0,9931$.

$$\frac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} = 2,46 \iff \sqrt{\frac{5}{36n}} = \frac{0,01}{2,46} \iff n = \left(\frac{2,46}{0,01}\right)^2 \times \frac{5}{36} = 8405$$

Ainsi, $P\left(Z \leqslant \dfrac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right) = \dfrac{\dfrac{355}{360}+1}{2} = \dfrac{143}{144} \simeq 0,9931$

En utilisant la table, on trouve $P(Z \leqslant 2,46) \simeq 0,9931$.

$$\frac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} = 2,46 \iff \sqrt{\frac{5}{36n}} = \frac{0,01}{2,46} \iff n = \left(\frac{2,46}{0,01}\right)^2 \times \frac{5}{36} = 8405$$

En Résumé :

- Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

  Il faut au moins 100000 lancés de dés pour que $P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant \dfrac{5}{360} \simeq 0,014$

Ainsi, $P\left(Z \leqslant \dfrac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right) = \dfrac{\dfrac{355}{360}+1}{2} = \dfrac{143}{144} \simeq 0,9931$

En utilisant la table, on trouve $P(Z \leqslant 2,46) \simeq 0,9931$.

$$\frac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} = 2,46 \iff \sqrt{\frac{5}{36n}} = \frac{0,01}{2,46} \iff n = \left(\frac{2,46}{0,01}\right)^2 \times \frac{5}{36} = 8405$$

En Résumé :

- Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

  Il faut au moins 100000 lancés de dés pour que $P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant \dfrac{5}{360} \simeq 0,014$

- Avec le théorème de la limite centrale :

  A partir, de 8405 lancés, la probabilité que la fréquence s'écarte d'un centième de $\dfrac{1}{6}$ est inférieure à $1,4\%$.