2023 - 2024

I3

Probabilités

Responsable du cours : Patrick Drouot

Auteur : Patrick DROUOT

Contact : *pat.drouot@yahoo.fr*

Site Web : *www.pdrouot.fr*

14 quai de la Somme – BP 10100

80082 AMIENS CEDEX 2

Tél. : 03.22.66.20.00 – Fax : 03.22.66.20.10

https ://amiens.unilasalle.fr/

I. Dénombrement

1. Permutations

Définition:
Si n est un entier naturel, le .... , noté ... , est définie par :

$$n! = \begin{cases} n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times 3 \times 2 \times 1 & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Exemples :

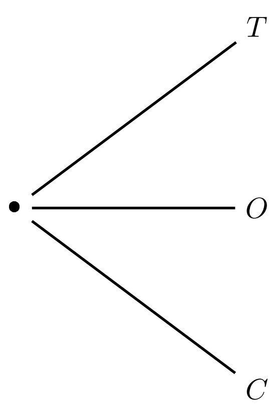
- $0! =$
- $1! =$
- $2! =$
- $3! =$
- $4! =$
- $5! =$
- $6! =$
- $7! =$
- $8! =$
- $9! =$
- $10! =$
- $11! =$
- $12! =$
- $13!$=6 227 020 800
- $14! =$
- $15! =$

$48! =$ ....

Exercice n° 1: Calcul mental :

- $\dfrac{12!}{10!} =$ ....
- $\dfrac{12!}{9!5!} =$ ....
- $\dfrac{7!}{10!} =$ ....

Exemple : Combien y a-t-il de façons de permuter les trois lettres du mot « TOC » ?



Nb possibilités :

Il y a 6 .... des lettres de mot « TOC » :

. . . .

Définition:
Une permutation d'objets distincts rangés dans un certain ordre correspond à un changement de l'ordre de succession de ces objets.

Propriété
Il y a ... permutation de n objets.

On peut voir une permutation comme une .... de l'ensemble des lettres du mot « TOC » sur lui-même :

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \{T,O,C\} & \longrightarrow & \{T,O,C\} \\ & T & \longmapsto & C \\ & O & \longmapsto & O \\ & C & \longmapsto & \end{array}$$

Proposition
Un .... des éléments d'un ensemble X est une bijection de X sur lui-même.

Exercice n° 2: Combien d'anagrammes ayant du sens ou pas, peut-on former avec toutes les lettres des mots :

1. leur ? ....
2. LILLE ? ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3. toutologue ? ....

   ....

   ....

Théorème
Le nombre de permutations de n objets dont n_1 sont .... , n_2 sont .... , ..., n_r sont .... est : ....

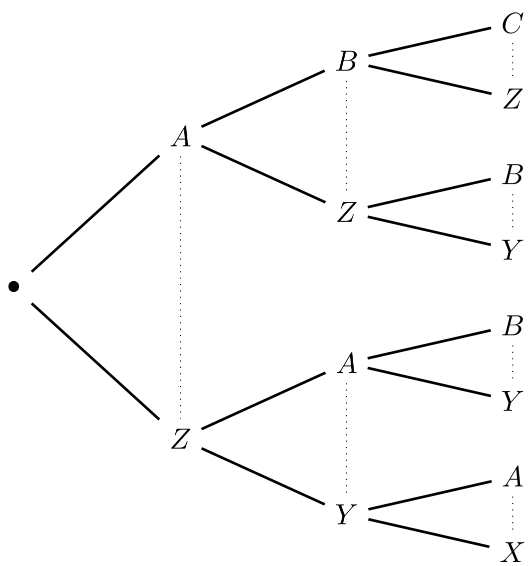
Exercice n° 3: Combien y a-t-il de façons de mélanger les objets suivants :

● , ● , ◆ , ★ , ★ , ◆, ●, ●, ◆

. . . .

2. Arrangements

Exemple : Combien peut-on former de mots en prenant, sans répétition, trois lettres dans l'alphabet ?



Nb possibilités : 26 × 25 × 24 = 15600

Définition:
Etant donné un ensemble E de n éléments. Un sous-ensemble ordonné de p éléments de E pris sans répétition est appelé un **Arrangement** de p éléments de E.

Exemple : Il y a . . . . arrangements de 3 lettres prises parmi les 26 de l'alphabet.

Propriété
Le nombre d'arrangements de p objets pris parmi n ($p \leqslant n$), noté $\boldsymbol{A_n^p}$ est :

$$A_n^p =$$

Exemple : $A_9^4 = \dfrac{9!}{(9-4)!} = \dfrac{9!}{5!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times}{} =$

Exemple :

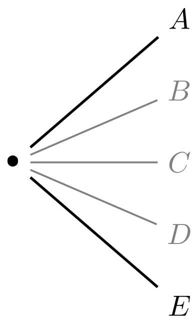
- $A_5^0 =$
- $A_5^1 =$
- $A_5^2 =$
- $A_5^3 =$
- $A_5^4 =$
- $A_5^5 =$

Pourquoi a-t-on $A_5^4 = A_5^5$? . . . .

Remarque : Une . . . . de p objets est un . . . . de p objets pris parmi . . . objets.

3. Combinaisons

Exemple : Combien y a-t-il de façons de choisir 3 lettres parmi les 5 lettres A, B, C, D, E, sans tenir compte de l'ordre ?



Nb possibilités :

En fait, ce calcul montre que cet arbre a ... chemins.

Problème ? Puisqu'on ne tient pas compte de l'ordre, on n'a pas à différencier les chemins ABE, AEB, et EAB. D'ailleurs, sur les ... chemins, combien y en a-t-il qui sont des chemins ABE à l'ordre près ? ....

....

Il y a donc .... façons de choisir 3 lettres parmi 5 sans tenir compte de l'ordre.

Définition:

Soient n et p deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$ et E un ensemble à n éléments.

- Une .... de p élément de E est une partie de E ayant p éléments.
- Le nombre de .... de p éléments de E, noté $\binom{n}{p}$, est :

....

Exemple : Dans un jeu de 32 cartes, il y a mains de 3 cartes.

....

Exemple :

- $\binom{5}{3} =$ ....
- $\binom{7}{3} =$ ....
- $\binom{7}{2} =$ ....

- $\binom{9}{6} =$ ....
- $\binom{17}{2} =$ ....
- $\binom{3}{0} =$ ....
- $\binom{8}{4} =$ ....
- $\binom{3}{1} =$ ....
- $\binom{3}{3} =$ ....

Remarque : $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons de choisir k objets parmi n.

Propriété

Pour tous entiers n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Exemple :

- $\binom{6}{4} =$ ....
- $\binom{1000}{1} =$ ....
- $\binom{6}{2} =$ ....
- $\binom{1000}{999} =$ ....

Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple :

$(a+b)^4 =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

Exercice n° 4: Développe i. $(a-b)^4$ ii. $(2b-3a)^4$ iii. $(a+b)^6$

Démonstration de la formule de Newton dans le cas où $n = 4$:

$$(a+b)^n = (b+a) \times (b+a) \times (b+a) \times (b+a)$$

- Dénombrons les monômes de la forme ba^p. On a choisit un facteur $(a+b)$ pour b. On prendra a dans les trois restants donc $p = \ldots$. Il y a $\binom{4}{1}$ façons de choisir le facteur où l'on prend b :

  ....

  Le coefficient de ba^3 est .

- Dénombrons les monômes de la forme b^2a^p. On a choisit deux facteurs $(a+b)$ pour b. On prendra a dans les trois restants donc $p = \ldots$. Il y a $\binom{4}{2}$ façons de choisir le facteur où l'on prend b :

  ....

Le coefficient de b^2a^2 est

Exercice n° 5: Détermine de deux façons différentes le coefficient du monôme a^2b^3 dans le développement de $(5a-b)^5$

Exercice n° 6: Quel est le coefficient du monôme a^3bc^p dans le développement de $(a+b+c)^7$?

Exercice n° 7: Le tiercé est un pari hippique, dans lequel le parieur est invité à pronostiquer les trois chevaux arrivés en tête d'une course, soit dans l'ordre pour un gain maximal, soit dans un ordre différent. Au départ d'une course, 9 chevaux sont partants.

i. Combien y a-t-il de tiercés gagnants dans l'ordre ?

ii. Combien y a-t-il de tiercés gagnants dans le désordre ?

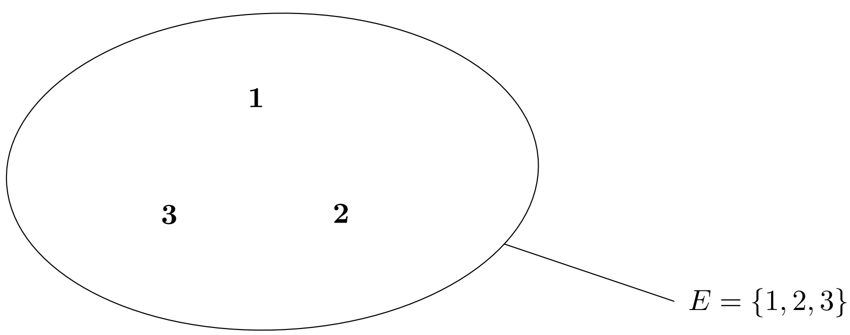
II. Théorie des ensembles

Définition:

- L'ensemble .... noté ... est défini par : ....
- Si E est un ensemble. On note .... l'ensemble des parties de E.

Exemple :

- Si $E=\{1,2,3\}$ alors $\mathcal{P}(E)=$ ....



- $1 \in \{1\}$, mais ....

Définition:

A est .... dans B : ....

Exemple : Complète avec $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

- $1 \dots \{1,2,3\}$ et $2 \dots \{1,2,3\}$
- $\{1,2\} \dots \{1,2,3\}$ et $\{1,2\} \dots \{1,2,3\}$
- $\{1,2,3\} \dots \{1,2,3\}$
- $\varnothing \dots \{1,2,3\}$ et $\varnothing \dots \{1,2,3\}$
- $\{1,2\} \dots \{1,\{1\},\{1,2\}\}$
- $\{1,2\} \dots \{1,\{1\},\{1,2\}\}$

Représentation par un diagramme de Venn :

Propriété
A n'est pas **inclus** dans B : .... $\iff \exists x\,(x \in A$ et $x \notin B)$.

Propriété
$A = B \iff (A \subset B)$ et $(B \subset A)$

Définition:
.... de A et B : $x \in A \backslash B \iff (x \in A)$ et $(x \notin B)$
Ce sont les éléments de A qui ne sont pas dans B.

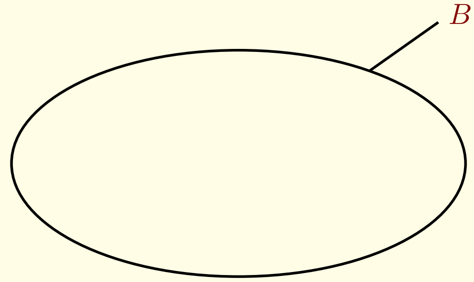
Définition:
Soient $A \subset B$: le .... de A dans B, notée $\complement_B A$ est la différence B et A.

Définition:
L' .... de A et B : $x \in A \cap B \iff (x \in A$ et $x \in B)$.

La .... de A et B : $x \in A \cup B \iff (x \in A$ ou $x \in B)$.

Définition:

Une famille $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une .... de B si



-
- ....

$$i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$$

Définition:

Soient A et B deux ensembles. L'ensemble des couples dont la première composante est un élément de A, et la seconde un élément de B, est noté .... , et est appelé le .... de A par B.

Le produit cartésien $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ fois}}$ est noté ...

Remarque : Pour les curieux, $(a, b) =$ ....

Exemple :

- $(2, \sqrt{7}) \in$ .... ;
- Le plan géométrique muni d'un repère peut être vu comme ....

Propriété

Soient A, B deux ensembles contenus dans E.

- $\complement_E(\complement_E A) =$ ...
- $A \setminus B =$ ....
- .... et ....

Définition:

Si A est un ensemble fini. Le nombre d'éléments appartenant à A, noté .... ou .... , est appelé le de A.

Exemple :

- $\#\Big(\{0, 1, 2, 3, 4\}\Big) = \ldots$
- $\#\Big(\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n^2 < 40\}\Big) = \ldots$
- $\#\Big(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})\Big) = \ldots$

Propriété
Si A est un ensemble fini. Le cardinal de $\mathcal{P}(A)$ est ....

Exemple :

- Si $A = \{1, 2, 3\}$ alors $\#(\mathcal{P}(A)) =$ ....
- Si $A = \{■, ●, ◆, ▲, ♥\}$ alors $\#(\mathcal{P}(A)) =$ ....
- Si $A = \{n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant 40\}$ alors $\#(\mathcal{P}(A)) =$ ....

III. Modèle probabiliste

1. Ensemble fondamental

Définition:

1. Une expérience .... est une expérience dont le résultat est soumis au hasard.
2. L'ensemble de tous les résultats possibles est .... de l'expérience.
3. Un résultat possible est appelé une ....
4. Un .... est une partie de cet univers, c'est-à-dire un ensemble de résultats possibles.
5. Un événement est dit .... s'il contient qu'un seul résultat possible.
   Autrement dit, un événement élémentaire est une ....

Exemple : On lance un dé cubique à six faces

- L'univers Ω est ....
- L'événement A, « le résultat est pair », est une partie de l'univers : $A =$ ....
- L'événement B, « le résultat est 3 », est un événement .... : $B =$ ....

Définition:

1. L'univers Ω est appelé ....
2. L'ensemble vide $\varnothing$ est appelé l'événement ....
3. L'événement .... d'un événement A, est noté .... Il contient tous les résultats possibles de l'univers Ω qui ne sont pas dans A.
4. Deux événements A et B sont dit .... s'ils ne peuvent être réalisés simultanément (aucune éventualité en commun) : ....

Exemple : On reprend l'exemple précédent

- L'événement contraire de A est : ....
- L'événement contraire de B est : ....
- L'événement contraire de Ω est : ....
- L'événement C : « le résultat est un entier négatif »est : ....
- L'événement contraire de C est : .... .

L'univers Ω dépend évidemment de l'expérience considérée mais aussi du choix de celui qui construit le modèle, et donc d'une forme d'arbitraire.

Exemple : On jette deux dés tétraédriques. On s'intéresse à leur somme, et on note A l'événement leur somme est égale à 5.

Combien y a-t-il d'éventualités ? ....

Modèle n° 1

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

$\Omega =$ ....

$\#(\Omega) =$ ....

....

$A =$ ....

L'évènement A contient ....

....

....

Modèle n° 2

Ω est l'ensemble de toutes les sommes possibles :

$\Omega =$ ....

$\#(\Omega) =$ ...

....

....

$A =$ ....

L'évènement A contient ....

La principale différence entre ces deux modèles :

- Le modèle n° 1 est .... : ....
- Le modèle n° 2 ne l'est pas : ....

2. Algèbre et tribu d'événements

Un évènement étant un élément de .... , il obéit à la théorie des ensembles.

Langage des ensembles	**Langage des évènements**
On a observé ω et	L'évènement A est ....
....	L'évènement A implique l'évènement B
...	Evènement impossible
...	Evènement certain
....	Un au moins des deux évènements est réalisé
....	Les deux évènements sont réalisés
$A \cap B = \varnothing$	Les deux évènements sont ....
....	L'évènement contraire de A noté $\overline{A}$
Loi de De Morgan :	
$\complement_\Omega(A \cap B) = \complement_\Omega A \cup \complement_\Omega B$	....
$\complement_\Omega(A \cup B) = \complement_\Omega A \cap \complement_\Omega B$	....

Un évènement est une partie de Ω, donc, il y a potentiellement $\mathcal{P}(\Omega)$ événement dans un univers Ω. Mais, le cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$ est ..... , qui peut être un nombre très grand. Dans ce cas, il peut être souhaitable de ne considérer qu'une famille restreinte $\mathcal{A}$ de parties de Ω. Pour que le résultat des opérations ensemblistes (union, intersection, et complémentaire) soit encore un évènement, il faut que $\mathcal{A}$ soit stable pour ces opérations.

Définition:

Un ensemble $\mathcal{A}$ est une .... sur Ω si

- ....
- Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $B \in \mathcal{A}$, ...
- Pour tout $A \in \mathcal{A}$, ...

Remarque : Le dernier point s'écrit : Pour tout $A \in \mathcal{A}$, ...

Propriété

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre sur Ω, alors

- $\Omega \in \mathcal{A}$.

- Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $B \in \mathcal{A}$, ...

Démonstration

- $\varnothing \in \mathcal{A} \implies \Omega = \overline{\varnothing} \in \mathcal{A}$
- $\begin{cases} A \in \mathcal{A} \implies \overline{A} \in \mathcal{A} \\ B \in \mathcal{A} \implies \overline{B} \in \mathcal{A} \end{cases}$ et $\mathcal{A}$ est une algèbre donc $\overline{A} \cap \overline{B} \in \mathcal{A} \underset{\substack{\text{Stabilité par} \\ \text{passage au contraire}}}{\implies} \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \in \mathcal{A}$

  D'après la loi de De Morgan : $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} = A \cup B$

Propriété

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre sur Ω, alors

Si $A_i \in \mathcal{A}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ alors .... et ....

Comme certaines expériences aléatoires se répètent indéfiniment, comme au moins lancer un dé jusqu'à obtenir le chiffre 6. On va étendre la définition d'une algèbre :

Définition:

Un ensemble $\mathcal{T}$ est une .... ou une .... sur Ω si

- ....
- Si $A_n \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors .... et ....
- Pour tout $A \in \mathcal{T}$, ...

Autrement dit, une tribu est une algèbre stable par union ou intersection dénombrable.

Définition:

Etant donné un univers Ω et une tribu $\mathcal{T}$ sur Ω, le couple ...... est appelé un ....

Cette terminologie signifie que l'on va pouvoir associer une .... à ce espace $(\Omega, \mathcal{T})$.

IV. Probabilité.

Une fois la tribu des événements définie, on va associer à chaque évènement un nombre traduisant sa « possibilité » de réalisation. Ce nombre, appelé probabilité de l'événement sera un nombre réel compris entre 0 et 1.

Dans tout cette partie $(\Omega, \mathcal{T})$ désignera un espace probabilisable.

Définition:

On appelle .... P sur $(\Omega, \mathcal{T})$ une fonction $P : \mathcal{T} \longmapsto [0,1]$ telle que :

- $P(\Omega) = \ldots$
- Pour toute suite A_n d'événements ($A_n \in \mathcal{T}$) incompatibles ($\forall m \neq n\ A_m \cap A_n = \varnothing$) :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Propriété dite de σ-additivité.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est appelé un ....

Propriété

- Probabilités de l'évènement impossible est nulle : $P(\varnothing) = 0$
- Probabilités de l'évènement contraire : $P(\overline{A}) =$ ....
- Si un évènement en implique un autre, sa probabilité est plus ...... : ....
- La probabilité de l'union de deux évènements s'obtient par la formule de Poincaré :

....

1. Cas où l'univers Ω est fini.

On suppose $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ et on pose $p_i = P(\omega_i)$. Chaque ω_i est un résultat possible de l'expérience aléatoire. Les évènements $A_m = \{\omega_m\}$ et $A_n = \{\omega_n\}$ sont incompatibles, donc $\sum_{i=1}^{n} p_i = \ldots$

Il s'en suit qu'étant donné un événement A : $P(A) =$ .... C'est-à-dire que la probabilité d'un évènement A est la somme des probabilités de tous les évènements élémentaires (éventualités) qui appartiennent à A.

2. Equiprobabilité.

Il s'agit du cas où les n évènements élémentaires qui constituent l'univers Ω ont la même probabilité. Il s'ensuit trivialement que $p_i =$ ... :

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \operatorname{card}(A) = \ldots$$

Ce résultat est souvent énoncé par la dangereuse règle $P(A) = \dfrac{\text{nb de cas favorable à } A}{\text{nb de cas possibles}}$. Dangereuse, car un cas favorable est un évènement .... et l'univers doit être ....

Exemple : Etant donné un entier $n \geqslant 4$. On jette n pièces de monnaie. On veut calculer la probabilité de l'évènement A_n : « avoir exactement 4 piles ».

L'univers $\Omega = \Big\{\omega$ tels que ω est une suite de n éléments choisis dans $\{P, F\}\Big\}$

$$= \Big\{\omega \text{ tels que } \omega : \{1, 2, \dots, n\} \to \{P, F\}\Big\}$$

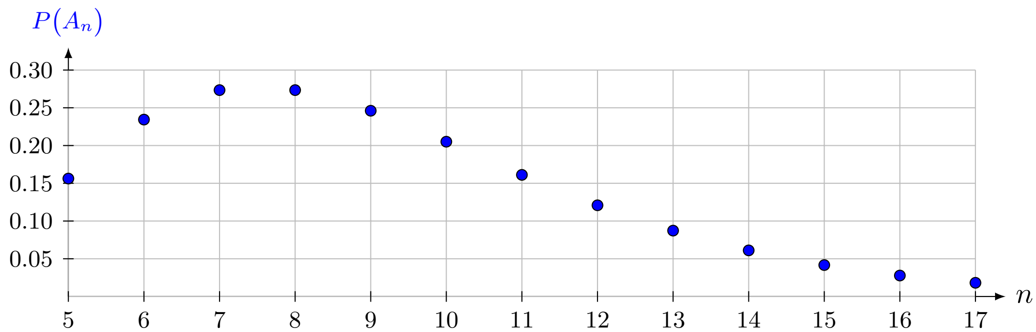
L'univers Ω est .... :

- le cardinal de l'univers est .....
- le cardinal de l'évènement A est .....

- $P\big(A_n\big) =$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(A_n\big) =$ ....

- On obtient la distribution de probabilités :



- La probabilité est maximale pour .... , elle vaut : ....

V. Conditionnement.

1. Probabilités conditionnelles

Exemple : : Un groupe de 21 adultes est formé de 8 anglophones (5 femmes et 3 hommes), les autres étant francophones. Sachant qu'il y a deux fois plus d'hommes que de femmes, complétons le tableau de dénombrement à double entrée suivant :

	A	$\overline{A}$	Total
H			
$\overline{H}$			
Total			

où :

- H est l'événement « la personne choisie est un homme » ;
- A est l'événement « la personne choisie est anglophone ».

Nous avons :

- $P(A) =$
- $P(F) =$
- $P(H) =$
- $P(A \cap H) =$

Quelle est la probabilités qu'une personne choisie au hasard :

1. soit anglophone, sachant que c'est une femme ?

   ....

   ....

   ....

2. Soit une femme sachant que c'est une personne anglophone ?

   ....

   ....

   ....

Définition:

Soient A et B deux évènements avec $P(B) \neq 0$. La probabilité de l'évènement B sachant que l'évènement A est déjà réalisé est : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$. On la schématise par le chemin :

$$A \xrightarrow{\quad P_A(B) \quad} B$$

2. Evénements indépendants

Subjectivement, on pourrait dire que A est indépendant de B si $P_B(A) = P(A)$.
Mais dans ce cas, $P_A(B)$ est-elle égale à $P(B)$?

$$\begin{aligned} P_B(A) = P(A) \quad &\Longleftrightarrow \quad P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &\Longleftrightarrow \quad \boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)} \\ &\Longleftrightarrow \quad P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &\Longleftrightarrow \quad P_A(B) = P(B) \end{aligned}$$

Définition:

Deux événements A et B sont **indépendants** si ....

Théorème

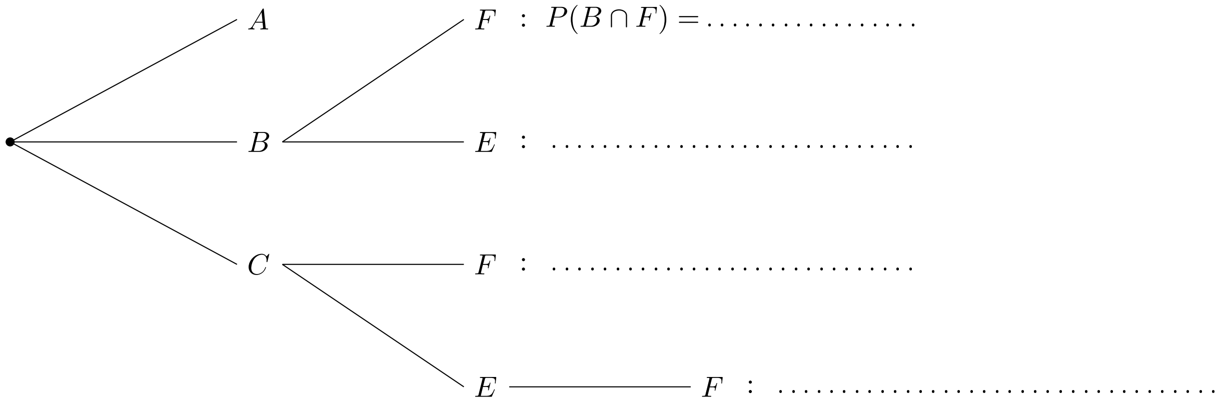
Soient A et B deux événements. Si A et B sont indépendants alors il est en de même de $\overline{A}$ et $\overline{B}$, et $\overline{A}$ et B, et de A et $\overline{B}$.

Démonstration

On a $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ et cette réunion est disjointe, d'où par additivité :

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A)P(\overline{B}) \end{aligned}$$

3. Arbres pondérés



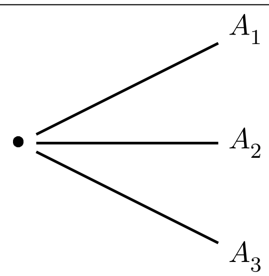
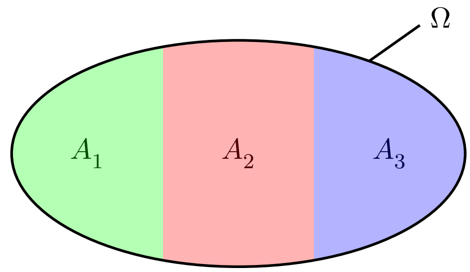
- La somme des probabilités issues de la racine est ....
- La somme des probabilités issues du nœud C est ....
- Le chemin $B \cap E$ a pour probabilité ....
- La feuille E a pour probabilité ....
- L'évènement F a pour probabilité ....

Calcul des probabilités sur un arbre pondéré

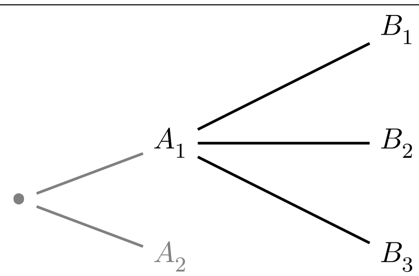
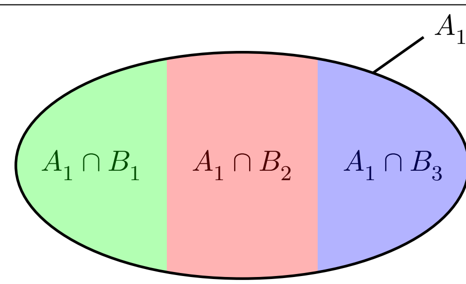
- La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.
- **Formule des probabilités totales :** la probabilité d'un évènement, en particulier celle d'une feuille, est le somme des probabilités des chemins menant à cette feuille.

4. Arbres et diagrammes de Venn

i. A partir de la racine :

	
$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$	la famille d'évènements $\left(A_1, A_2, A_3\right)$ forme un de Ω.
$A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $A_1 \cap A_3 = \varnothing$, $A_2 \cap A_3 = \varnothing$ et $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$	
En théorie des ensembles, on dit que A_1, A_2, et A_3 forment une partition de Ω.	

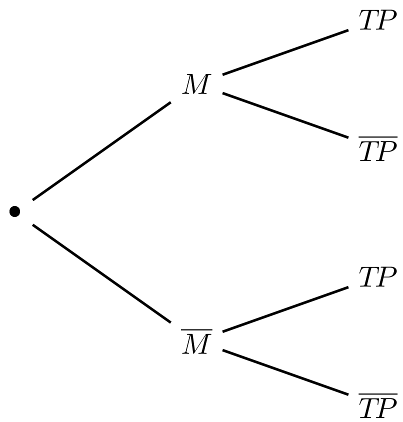
ii. A partir d'un nœud :

	
$P_{A_1}(B_1) + P_{A_1}(B_2) + P_{A_1}(B_3) = 1$	la famille $\left(A_1 \cap B_1, A_1 \cap B_2, A_1 \cap B_3\right)$ forme un de A_1.

5. Paradoxe de Bayes

Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion de personnes malades est p. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage :

- si une personne est malade (évènement M), le test est positif à 99% ;
- Si une personne n'est pas malade, le test est positif (évènement TP) à 1%.



Cet arbre respecte la chronologie d'un laboratoire, mais pas celle d'un médecin.

Un médecin doit connaître la probabilité conditionnelle $P_{TP}(M)$ qui n'est pas sur cet arbre.

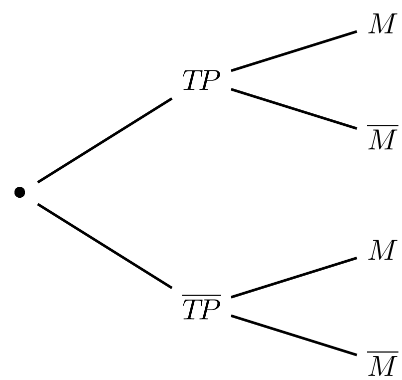
$$P_{TP}(M) = \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

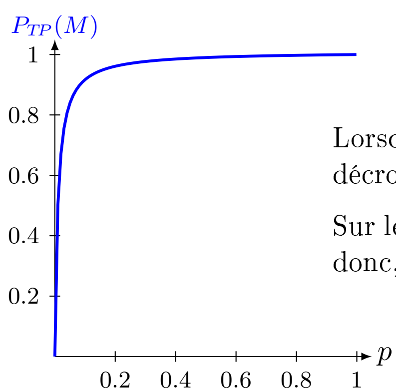
$P(TP \cap M) = \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$P(TP) = \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

☞ $P_{TP}(M) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Supposons que cette maladie touche 1% de la population.
On a alors : $p =$ ..... et $P_{TP}(M) =$ ..... . Ce test donne beaucoup trop de "faux positifs". Ce résultat semble paradoxal car contre-intuitif au vu des résultats du grand laboratoire pharmaceutique.
La formule de Bayes a longtemps été appelée formule de probabilité des causes. Elle permet en effet de remonter le temps, c'est-à-dire de calculer la probabilité d'une cause sachant celle de sa conséquence.





Lorsque la proportion de malades dans une population (la prévalence en médecine) décroît, le nombre de faux positifs augmente.

Sur le graphe ci-contre, si moins de 4% de la population est malade, $P_{TP}(M) \simeq 80\%$, donc, on a à peu près 20% de faux positifs.

Formule de Bayes

Si la famille d'évènements $\left(A_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ forme un .... de l'univers Ω :

Autrement dit, les A_i sont 2 à 2 incompatibles et $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Alors : $$P_B(A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

VI. Exercices

Exercice n° 8: La Vénus de Milo : Des études morphologiques de la Vénus de Milo, montre qu'il y a cinq chances sur sept pour qu'elle soit droitière. Si elle est droitière, il y a trois chances sur cinq qu'elle épluche des carottes. Si elle est gauchère, il y a une chance sur deux qu'elle épluche des carottes.

On note :

- C l'événement « Elle épluche des carottes » ;
- D l'événement « Elle est droitière ».

1. Construis l'arbre de probabilités.
2. Calcule $P(C)$.

Exercice n° 9: Le pont des arts : Hacina traverse le Pont des Arts avec un sac contenant cinq olives mûres et une olive gâtée. Elle les prend une par une au hasard. Si l'olive est mûre, elle la mange, si elle est gâtée, elle jette le sac dans la Seine.

On note M_i l'événement « la $\text{i}^{\text{ème}}$ olive est mûre ».

1. Construis l'arbre de probabilités.
2. Quelle est la probabilité qu'Hacina mange au moins une olive ?
3. Pour chaque $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, on note H_i, l'événement « Hacina mange i olive(s) ». Calcule $P\left(H_i\right)$.

Exercice n° 10: Le paradoxe du prisonnier :

Trois prisonniers A, B, et C sont dans une cellule. Ils savent que deux vont être condamnés à mort et un gracié, mais ils ne savent pas qui. L'un d'entre eux, le prisonnier A, va voir le geôlier et lui demande : « Je sais bien que tu ne peux rien me dire, mais tu peux au moins me montrer un de mes compagnons qui sera exécuté ». Le geôlier réfléchit, se dit que de toute manière au moins l'un des deux autres prisonniers sera condamné, et s'exécute. Le prisonnier lui répond alors : « Merci, avant, j'avais une chance sur trois d'être gracié, et maintenant, j'ai une chance sur deux. »

Le prisonnier, a-t-il raison de croire que sa probabilité d'être gracié a augmenté ?

On suppose équiprobables les chances des prisonniers. On exclut également le mensonge ou une forme de préférence dans la réponse du gardien.

On note :

- A l'évènement : « Le prisonnier A est gracié. »
- B l'évènement : « Le prisonnier B est gracié. »
- C l'évènement : « Le prisonnier C est gracié. »
- GB l'évènement : « Le geôlier répond au prisonnier A que le prisonnier B sera exécuté. »
- GC l'évènement : « Le geôlier répond au prisonnier A que le prisonnier C sera exécuté. »

Exercice n° 11: Le problème de Monty-Hall : Dans un jeu télévisé, un joueur est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre. Le présentateur du jeu sait derrière quelle porte se trouve la voiture.

Le joueur doit commencer par désigner une porte. Puis le présentateur doit ouvrir une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture. Il lui ouvre l'autre porte derrière laquelle se trouve une chèvre. Le candidat a alors le droit d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou d'ouvrir la troisième porte.

Que doit-il faire ?

<u>On modélisera cette expérience aléatoire à l'aide les évènements suivants :</u>

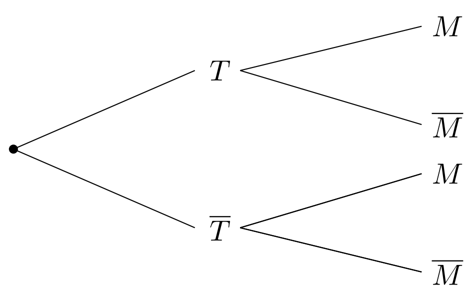
- C_1 : « le candidat désigne la porte de la chèvre 1 »
- C_2 : « le candidat désigne la porte de la chèvre 2 »
- V : « le candidat a désigne la porte de la voiture »
- GVC : « le candidat **G**agne la **V**oiture en **C**hangeant de porte »
- GVS : « le candidat **G**agne la **V**oiture en **S**ans changer de porte »

Exercice n° 12: Paradoxe de Bayes : Un laboratoire a développé le test suivant pour une maladie M assez rare, elle touche une personne sur mille. Si un patient a contracté la maladie, le test le fait remarqué, c'est-à-dire qu'il est positif presque systématiquement, 99% des fois. Si un patient est sain, le test est négatif dans 95% des cas.

On note :

- T l'événement « le test est positif » ;
- M l'événement « le patient est malade ».

1. Construis l'arbre de probabilités.
2. Calcule la probabilité de chacun des chemins de l'arbre à 10^{-5} près.
3. Complète l'arbre ci-dessous à 10^{-5} près.



Exercice n° 13: Le pot de confiture Aline adore la confiture aux prunes de sa grand-mère. Quand elle tartine sa tranche de brioche, au petit déjeuner, la cuillerée de confiture va directement dans sa bouche une fois sur trois. Pour obtenir une tranche de brioche correctement recouverte de confiture, il faut y étaler le contenu de trois cuillers.

On note les événements :

- B_i : « la i$^{\text{ème}}$ cuillerée de confiture va directement dans sa bouche » ;
- A : « Aline a avalé directement au moins deux cuillerées de confiture lorsque la tranche de brioche sera prête à être consommée. »

Calcule la probabilité de l'événement A.

Exercice n° 14: Etant donné un ensemble A fini de cardinal n.
Démontre en utilisant les combinaisons que $\#(A) = 2^n$.

VII. Variables aléatoires réelles

Soient $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire et $\left(\Omega, \mathcal{T}, P\right)$ un .... qui en rend compte. Il arrive fréquemment qu'à chaque résultat de $\mathcal{E}$ on associe un nombre réel. On définit alors une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. D'ailleurs, à l'origine $\mathcal{E}$ était un jeu et X représentait un gain.

1. Approche empirique

Considérons l'expérience aléatoire suivante : On tire au hasard dans une urne contenant une boule rouge R, une boule verte V, et une boule bleue B. Remettons-la dans l'urne et effectuons un second tirage. On a tiré deux boules.

2nd tirage / 1er tirage	R	V	B
R			
V	(V,R)	(V,V)	(V,B)
B	(B,R)	(B,V)	(B,B)

On est en situation d'équiprobabilité donc la probabilité d'avoir au moins une boule bleue est :

....

Complétons l'énoncé :

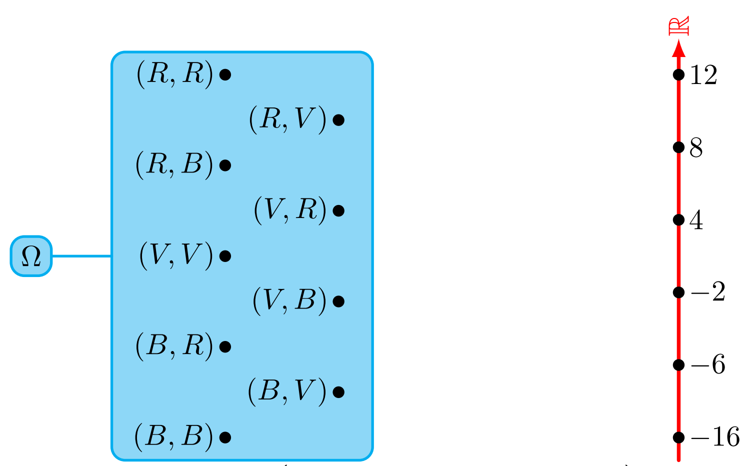
- Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 6€.
- Pour chaque boule verte tirée, on gagne 2€.
- Pour chaque boule bleue tirée, on perd 8€.

Notons G la variable aléatoire qui à un tirage de deux boules associe le gain du joueur :

$$G : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (R,B) & \longmapsto & \ldots \end{array}$$

Les valeurs prises par G sont $G(\Omega) = \{$ ....

On a la situation suivante :



$P(G=8) = P\Big(\{$ .... $\}\Big) =$

L'espérance de la variable aléatoire G est :

☞ $E\big(G\big) =$ ....

Ce qui signifie que si on répète l'expérience aléatoire un « grand nombre de fois » , la .... des gains est .... Autrement dit, ce jeu est .... sur un « grand nombre » de parties.

L'espérance est la .... des résultats de l'expérience aléatoire .... par les ....

$E\big(G^2\big) =$ ....

☞ La .... $V\big(G\big) =$ ....

☞ .... $\sigma_G =$ ....

2. Fonctions de répartitions

Rappel:

Etant donnée l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. $X^{-1}(A)$ est appelée ....
Elle est définie par $X^{-1}(A) =$ .... et a les propriétés suivantes :
Pour toute parties A et B de $\mathbb{R}$, elle a les propriété suivantes :

- $X^{-1}\big(A \cap B\big) =$ ....
- $X^{-1}\big(A \setminus B\big) =$ ....
- $X^{-1}\big(A \cup B\big) =$ ....

Pour toute famille non vide $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

- $X^{-1}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_i\right) =$ ....
- $X^{-1}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_i\right) =$ ....

Et, étant donnée une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: $\big(f \circ X\big)^{-1}(A) =$ ....

Définition:

Soit $\big(\Omega, \mathcal{T}, P\big)$ un espace probabilisé. On appelle .... réelle (v.a.r), toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété suivantes :
....

Remarques :

i. Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$ revient à dire que l'ensemble $X^{-1}(I)$ est un ,
il aura donc une probabilité.

ii. Si la tribu $\mathcal{T}$ est égale à $\mathcal{P}(\Omega)$, toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire.

iii. Soit A la partie de $\mathbb{R}$ qui est la réunion ou l'intersection d'un ensemble dénombrable d'intervalles, alors $X^{-1}(A)$ est la réunion ou l'intersection d'un ensemble dénombrable d'évènements. Comme la .... $\mathcal{T}$ est une $\sigma-$algèbre, $X^{-1}(A)$ est encore un évènement. Une telle partie de A s'appelle un .... de $\mathbb{R}$, l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ est une .... appelé ....

Définition:

La tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles est appelé la tribu des .... , et notée ..... .

Remarque : Considérons les intervalles de la forme $]-\infty, a]$, on peut alors voir que tout intervalle I de $\mathbb{R}$ s'écrit comme réunion, intersection, complémentaire d'une suite d'intervalles de cette forme. Par exemple, si $a < b$, on peut écrire :

$$]a, b[=$$

Notations

Il est d'usage en probabilités, de modifier quelque peu les notations de la théorie des ensembles :

- $X^{-1}\Big(\{a\}\Big) =$ .... se note .....
- $X^{-1}\Big(]a, +\infty[\Big) =$ .... se note .....
- $X^{-1}\Big([a, b[\Big) =$ .... se note .....

Saluons respectueusement au passage les anciens, qui n'ont pas craint d'appeler « variable aléatoire » un être mathématique qui

- n'est pas une variable : ....
- n'est pas ....

Quelques exemples :

i. *Un jeu d'argent :* On lance une pièce, l'univers associé à cette expérience est .... Supposons que le fait d'amener Pile soit considéré comme un succès, on peut alors considérer $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(P) = 1$ et $X(F) = 0$. Dans ce cas ....

ii. *Déjà une urne :* Considérons une urne contenant des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion .... On prélève de cette urne n boules avec remise, à chaque tirage ω de n boules on peut faire correspondre le nombre $X(\omega)$ de boules blanches obtenues. Dans ce cas, on a $X(\Omega) =$ ....

iii. *Encore une urne :* Reprenons l'urne précédente et procédons à l'expérience suivante : on tire des boules de l'urne avec remise et on s'arrête dès qu'on tire une boule blanche. A chaque tirage ω on fait correspondre le rang $X(\omega)$ où est apparu, pour la boule blanche. On dit que l'application X ainsi définie est le temps d'attente de la première boule blanche. On a alors : $X(\Omega) = \ldots$

iv. *Toujours une urne :* On reprend encore une fois l'urne précédente et on suppose que celle-ci contient au total N boules.

- On tire successivement et sans remise n boules de l'urne, avec $1 \leqslant n \leqslant N$. A chaque tirage ω de n boules on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de boules blanches obtenues. Dans ce cas, la détermination de $X(\Omega)$ est un peu plus délicate, mais en observant bien le phénomène, on s'aperçoit que $X(\Omega) =$ ....
- en tirant encore les boules une à une sans remise, on considère le temps d'attente Y de la première boule blanche. On a alors $Y(\Omega) =$ ....

v. *un jeu qui peut piquer :* On joue aux fléchettes. A tout résultat ω du lancer, on fait correspondre la distance $X(\omega)$ du point d'impact au centre de la cible. On obtient ici $X(\Omega) =$ ....

vi. *un jeu plus calme :* On lance un galet du bord d'un lac aux eaux paisibles. A tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de ricochets. On a alors $X(\Omega) = \dots$

vii. *un jeu à la ... :* On lance un œuf frais du haut de la tour Eiffel et à tout résultat ω du lancer, on fait correspondre le nombre $X(\omega)$ de rebonds. On a alors : $X(\Omega) = \dots$

Définition:

Soit X une v.a.r définie sur un espace probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{T}, P\right)$. On appelle .... de X la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par : ....

Certains auteurs adoptent une définition légèrement différente. La fonction de répartition de X est, pour eux, définie par .... Ses propriétés sont quelque peu modifiées. Aussi conviendra-t-il de faire attention, dans un autre contexte que ce cours, de faire bien attention à la définition utilisée.

Théorème

Soient X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition :

i. F_X est ....

ii. F_X est ....

iii. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = \dots$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = \dots$

Démonstration

i. Etant donnés deux réels a et b tels que $a < b$. On a $:]-\infty, b] =]-\infty, a] \cup]a, b]$. Par conséquent en prenant les images réciproques : $(X \leqslant b) = (X \leqslant a) \cup (a < X \leqslant b)$. Cette réunion étant disjointes (événements incompatibles), on a :

F_X est croissante.

ii. La démonstration est plus délicate. Il faut se souvenir d'une notation :

celle de la limite à droite : .... et de la limite à gauche : ....

et de quelques résultats d'analyse :

- Toute fonction monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet en tout point intérieur à I une limite à droite et une limite à gauche.
- Si F est une fonction monotone, pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant vers un point a par valeurs supérieures, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{x\to a^+} F(x) = F\big(a^+\big)$$

Il nous faut donc démontrer que l'on a, en tout point A de $\mathbb{R}$, la relation $F\big(a^+\big) = F(a)$. Pour cela, choisissons $x_n = a + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. La suite (x_n) converge vers a par valeurs supérieures et la suite d'évènements $\left(X \leqslant a + \dfrac{1}{n}\right)$ est une suite croissante telle que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(X \leqslant a + \frac{1}{n}\right) = \big(X \leqslant a\big)$.

En effet, si $X(\omega) \leqslant a)$, alors pour tout entier n, $X(\omega) \leqslant a + \dfrac{1}{n}$ et réciproquement si, pour tout entier n, $X(\omega) \leqslant a + \dfrac{1}{n}$, alors $X(\omega) \leqslant a)$ comme on le voit facilement par contraposée.

Il suffit alors d'applique la continuité décroissante de la probabilité, ce qui donne :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X \leqslant a + \frac{1}{n}\right) = P(X \leqslant a) \text{ soit } F\big(a^+\big) = F(a)$$

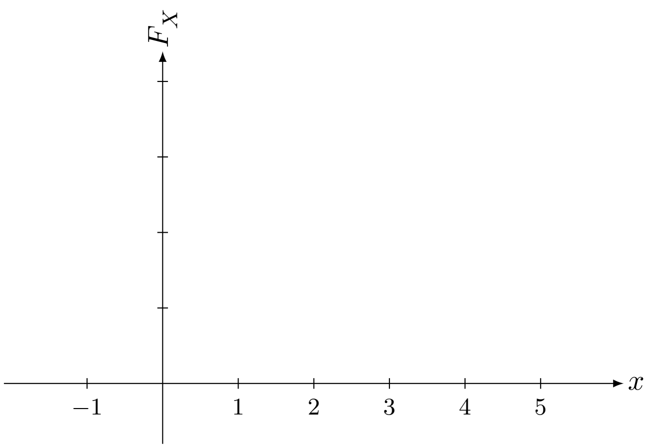
Ce qui achève la preuve de ii.

iii. Chers étudiants, je n'abuserai pas de votre patience. Je me contenterai de vous faire remarquer que :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(X \leqslant -n) = \dots \quad \text{et que} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}(X \leqslant n) = \dots$$

On peut démontrer, mais nous l'admettrons, que toutes fonctions $\Omega \longrightarrow [0,1]$ vérifiant les propriétés (i), (ii), et (iii) du théorème précédent est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X.

Exemple : On lance un dé tétraédrique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Tracer la fonction de répartition de X.



$F_X(0,5) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$F_X(0,99) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$F_X(1) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$F_X(1,0001) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$F_X(1,5) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$F_X(2) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$F_X(6) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Propriété

Soit X une .... et soit F_X .... On a :

i. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, P(a < X \leqslant b) =$ ....

ii. $\forall a \in \mathbb{R}, P(X = a) =$ ....

Dans l'exemple précédent, on voit bien que :

- $P(X = 2) =$ ....
- $P(X = 3,4) =$ ....

VIII. Variables aléatoires réelles discrètes

Définition:

Une variable aléatoire X est .... si l'ensemble $X(\Omega)$ est .... Autrement dit, si $X(\Omega)$ peut-être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{Z}$.

En particulier, $X(\Omega)$ est discrète si .... ou si $X(\Omega)$ est ....

Exemple : On lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

On choisit pour univers $\Omega =$ .... que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés, autrement dit, cet univers est ....

L'évènement $X = 1$ est par définition, ... il est égale à .... et donc $P(X = 1) =$ ....

De même on a :

- $P(X = 2) =$ ....
- $P(X = 3) =$ ....
- $P(X = 4) =$ ....
- $P(X = 5) =$ ....
- $P(X = 6) =$ ....

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète. L'application $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à tout $x \in X(\Omega)$ associe $P(X = x)$ s'appelle la .... de X.

On dit aussi .... ou .... de X.

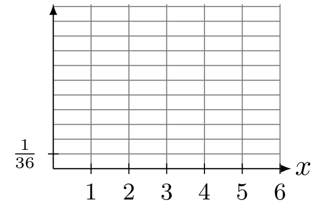
Propriété

Soit X une variable aléatoire discrète. Si $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est sa loi de probabilité, alors $\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) =$ ....

En effet, $\Omega = \bigcup_{x \in X(\Omega)} (X = x)$ et cette union est disjointe et dénombrable. En appliquant la $\sigma-$additivité de P, on obtient bien ....

Dans l'exemple précédent, on représente la loi de X par le tableau de valeurs suivants :

x	1	2	3	4	5	6	Total
$P(X = x)$							



1. Moments d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. $X(\Omega)$ est, par définition, un ensemble dénombrable, c'est-à-dire que l'on peut numéroter ses éléments. Dans la suite de ce paragraphe nous écrirons $X(\Omega) =$ .... , en convenant de poser dans le cas où $\text{Card}X(\Omega) = n$: $P(X = x_i) = 0$ dès que $i > n$. Ceci ,nous permettra de pas avoir à distinguer le cas fini du cas infini dénombrable.

Rappelons enfin qu'il n'y a pas unicité de la numérotation des éléments de $X(\Omega)$ et que cela pose des problèmes pour les sommations. Nous serons donc amenés à supposer l'absolue convergence des séries concernées.

Rappel : *Etant donné une série de terme général u_n absolument convergente. Si φ est une permutation de $\mathbb{N}$ alors la série de de terme général $u_{\varphi(n)}$ est absolument convergente, et on a :* .

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète et notons $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$. On dit que X possède une .... si la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.

On appelle alors .... de X, le nombre ..... défini par ....

Remarque :

i. Dans le cas où (a_n) est une série semi-convergente, alors on sait que pour tout nombre réel a, il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $a = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)}$. On ne peut donc définir l' .... d'une variable aléatoire discrète X que dans le cas de série absolument convergente.

ii. Une variable aléatoire discrète qui ne prend qu'un .... de valeurs admet toujours une espérance.

iii. Si X a une espérance. On a toujours $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = x_n) = \ldots$ On peut donc écrire $E(X) =$

L'espérance de X apparaît donc comme le moyenne des valeurs prises par X .... par leur probabilités.

Exemple :

i. On reprend l'exemple précédent où l'on lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus.

$E(X) =$ ....

$=$ ....

ii. On jette un dé cubique à six faces. On note X la face obtenue.

$E(X) =$ ....

ii. On jette un dé cubique à six faces. On note X la face obtenue.

$E(X) =$ ....

iii. On considère la variable aléatoire réelle X dont la loi est donnée par :

x	2	5
$P(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$E(X) =$ ....

Interprétation mécanique :

Propriété

L'espérance est ....

....

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète ayant une espérance $E(X)$, alors on appelle .... de X le nombre $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x_n - E(X)\right)^2 \times P(X = x_n)$$

sous réserve de la convergence de cette série.

Remarque :

i. Cette série est à termes positifs ce qui dispense de parler de convergence absolue.

ii. Une variable aléatoire discrète qui ne prend qu'un .... de valeurs admet toujours une variance.

iii. En pratique, la variance $V(X)$ n'a pas les .... que la v.a.r X, puisque les écarts sont élevés aux carrés. On lui préfère donc :

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète ayant une variance $V(X)$, alors on appelle .... de X le nombre ....

Définition:

Soit X une variable aléatoire discrète, notons $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_n, \dots\}$, et soit $r \in \mathbb{N}$

i. On appelle .... de X le nombre $m_r(X)$ défini par :

$$m_r(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n)^r \times P(X = x_n)$$

sous réserve de la convergence de cette série.

ii. On appelle .... de X le nombre $\mu_r(X)$ défini par :

$$\mu_r(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - E(X))^r \times P(X = x_n)$$

sous réserve de la convergence de cette série.

Remarque : la variance de X est ....

Propriété

Etant donné, un entier naturel r, la convergence de .... entraîne celle de ....

Démonstration

On commence par démontrer en exercice que pour tout nombre réel positif x, $x^r \leqslant x^{r+1} + 1$.

Par conséquent, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^r P(X = x_n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^{r+1} P(X = x_n) + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P(X = x_n)}_{=1}$

Le théorème de comparaison des séries à termes positifs montre que l'existence de $m_{r+1}(X)$ entraîne celle de $m_r(X)$.

Propriété

Etant donnée une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application $\varphi \circ X$ de Ω dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "\varphi \circ X"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

notée .... , est une variable aléatoire discrète.

Démonstration

- $\varphi(X)(\Omega) = \varphi\big(X(\Omega)\big)$, or $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable, il en est donc de même de $\varphi(X)(\Omega)$.
- De plus, pour tout $y \in \varphi(X)(\Omega)$, $\varphi^{-1}(y) \cap X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable et $\big[\varphi(X)\big]^{-1}(y) = X^{-1}\big(\varphi^{-1}(y)\big) = X^{-1}\big(\varphi^{-1}(y) \cap X(\Omega)\big)$. Par conséquent, $\big[\varphi(X)\big]^{-1}(y)$ est une réunion dénombrables d'évènements, comme $\mathcal{T}$ est une $\sigma-$algèbre, c'est encore un évènement. Donc, $\varphi(X)$ est une variable aléatoire discrète.

Théorème de transport

Soit X une variable aléatoire discrète. Alors, si la variable aléatoire discrète $\varphi(X)$ admet une espérance, celle-ci est donnée par la formule :

$$E\big(\varphi(X)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x_n) \times P(X = x_n)$$

Démonstration

Avec les notations $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$ et $\varphi(X)(\Omega) = \{y_j\}_{j \in J}$ on a :

$$E\big(\varphi(X)\big) = \sum_{j \in J} y_j P\big(\varphi(X) = y_j)\big)$$

Soit $I_j = \{i \in \mathbb{N} / \varphi(x_i) = y_j\}$ (l'ensemble des indices des antécédents de y_j). La famille $\big(I_j\big)_{j \in J}$ est une .... de $\mathbb{N}$ et on a :

$$\big(\varphi(X) = y_j\big) = \bigcup_{i \in I_j} (X = x_i)$$

Cette réunion est disjointes et donc $P\big(\varphi(X) = y_j\big) =$ ....

Soit en remplaçant dans la formule précédente :

$$\begin{aligned} E\big(\varphi(X)\big) &= \sum_{j \in J} \Big(y_j \times \sum_{i \in I_j} P(X = x_i)\Big) \\ &= \sum_{j \in J} \Big(\sum_{i \in I_j} \varphi(x_i) \times P(X = x_i)\Big) \text{ par définition de } I_j. \end{aligned}$$

Comme $\big(I_j\big)_{j \in J}$ est une .... de $\mathbb{N}$ on a :

$$E\big(\varphi(X)\big) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi(x_i) \times P(X = x_i)$$

Ce théorème permet de calculer l'espérance de la variable aléatoire discrète $\varphi(X)$ sans qu'il soit nécessaire de déterminer sa loi de probabilité, mais en utilisant uniquement celle de X.

En prenant $\varphi(x) = x^r$ puis $\varphi(x) = \big(x - E(x)\big)^r$ on obtient le corollaire suivant :

Corollaire

Les moments et moments centrés d'ordre r sont égaux à

$$m_r(X) = \ \ldots\ldots\ldots \quad \text{et } \mu_r(X) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Corollaire

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions réelles et X une variable aléatoire discrète. Si $\varphi_1(X)$ et $\varphi_2(X)$ admettent une espérance, alors :

$$E\big(\varphi_1(X) + \varphi_2(X)\big) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Démonstration

$$E\big(\varphi_1(X) + \varphi_2(X)\big) =$$

$$=$$

Exercice n° 15: Démontre que $E(X^2) = E\big(X(X+1)\big) - E(X)$ et $E(X^2) = E\big(X(X-1)\big) + E(X)$

Exercice n° 16: Etant donnée une variable aléatoire discrète X ayant un moment d'ordre 2. Démontre que la variable aléatoire $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma_X}$ vérifie : $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$.

Définition:

Une variable aléatoire X vérifiant $E(X) = 0$ est dite .... et vérifiant $V(X) = 1$ est dite ....

Propriété

Etant données deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{T}, P\big)$, ayant chacune une espérance, et deux réels a et b. L'espérance est application linéaire :

$$E(aX + bY) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Démonstration

En considérant $\varphi(x) = ax$ on voit trivialement que

$$E(aX) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il reste à démontrer que $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$. On pose $Z = X + Y$, $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$, $Y(\Omega) = \{y_0, \ldots, y_n, \ldots\}$, et $p_{ij} = P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$

La famille $(Y = y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est un .... d'évènements car :

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}(Y=y_j)=\Omega \text{ et pour } p\neq q,\ (Y=y_p)\cap(Y=y_q)=\varnothing$$

Donc, la famille $\big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ est une .... de l'évènement $(X=x_i)$.

Ainsi, $P(X=x_i)=\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}P\big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\big)=\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}$

$E(X)=\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}x_iP(X=x_i)=$ ....

$E(Y)=\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}y_jP(Y=y_j)=$ ....

Par conséquent, $E(X)+E(Y)=\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}(x_i+y_j)p_{ij}$

Pour tout $z\in Z(\Omega)$ posons $I_z=\big\{(i,j)\in\mathbb{N}^2/x_i+y_j=z\big\}$. $\big\{I_z\big\}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$. Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}E(X)+E(Y)&=\sum_{z\in Z(\Omega)}\left(\sum_{(i,j)\in I_z}(x_i+y_j)p_{ij}\right)=\sum_{z\in Z(\Omega)}\left(\sum_{(i,j)\in I_z}z\times p_{ij}\right)\\&=\underbrace{\sum_{z\in Z(\Omega)}z\,\underbrace{P(Z=z)}_{P(X+Y=z)}}_{E(X+Y)}\end{aligned}$$

2. Le théorème de Kœnig-Huyghens

Soient X une variable aléatoire discrète et a un nombre réel quelconque. Commençons par démontrer l'égalité :

$$E\big((X-a)^2\big)=\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par une ruse dont l'audace n'échappera à personne, nous nous permettrons d'écrire pour tout x_n de Ω :

$$x_n-a=\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'où $\qquad (x_n-a)^2=\big(x_n-E(X)\big)^2+$ ....

Multiplions les deux membres de cette égalité par $P(X=x_n)$ et sommons pour toutes les valeurs de n :

$$E\big((X-a)^2\big)=V(X)+2\big(E(X)-a\big)\sum_{n=0}^{\infty}\big(x_n-E(X)\big)P(X=x_n)+\big(E(X)-a\big)^2\sum_{n=0}^{\infty}P(X=x_n)$$

$$E\big((X-a)^2\big)=V(X)+2\big(E(X)-a\big)\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\big(x_n-E(X)\big)P(X=x_n)}+\big(E(X)-a\big)^2\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}P(X=x_n)}_{=}$$

d'où le résultat.

En particulier pour $a=0$ on obtient :

Théorème de Kœnig-Huyghens

$V(X) =$ ....

Corollaire

Soit X une variable aléatoire discrète ayant une variance $V(X)$, et deux nombres réels a et b, alors

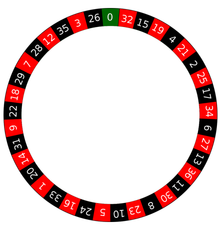
$$V(aX+b) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et } \sigma(aX+b) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exercice n° 17: « Rien ne va plus ! »

Préliminaires :

α. Pour $x \neq 1$, calcule $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$

β. Calcule $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i$.



Au casino, la roulette est numérotée de 0 à 36. Le 0 est de couleur verte, et tous les autres numéros alternent entre la couleur rouge et noire. Si un joueur décide de miser m € sur une couleur et qu'elle sort, il gagne alors m € et récupère sa mise, sinon il ne gagne rien et perd sa mise. On ne prendra pas en compte les règles d'emprisonnement si la couleur verte sort.

Delphine décide d'adopter la stratégie suivante :

Elle mise m€ au départ. Si elle gagne, elle arrête et remporte son gain. Sinon, elle double sa mise et recommence. On note G_i l'évènement, s'il a lieu, « Delphine gagne au i-ième tour ». Si cet évènement G_i est réalisé, alors Delphine aura perdu à chacun des tours le précédent.

i. Supposons qu'au départ Delphine mise 10 €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au cinquième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux.

ii. Supposons qu'au départ Delphine mise m €. Dessine le chemin où elle gagne seulement au n-ième tour en indiquant ses mises et ses gains totaux. Sa stratégie est-elle payante ?

iii. Delphine dispose de 1500 €, elle décide d'appliquer sa stratégie avec une mise initiale m de 20 €.

   a. Au bout de combien de tours pourrait-elle définitivement perdre ?
   b. Construis l'arbre correspondant à cette situation.
   c. Calcule l'espérance et l'écart-type des gains de Delphine.
   d. Pour quelles valeurs de p, l'espérance de Delphine est-elle positive ?

iv. Calcule l'espérance des gains de Delphine en supposant que la mise de départ m soit suffisante pour qu'elle perde définitivement en cas de malchance au bout de n tours.

v. Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle positive ?

vi. La stratégie de Delphine peut-elle être gagnante ?

3. Récréation : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives où nulles : ....
Considérons la série entière, dépendant de t, $\sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n)$. Cette série converge pour $t = 1$, car $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) = 1$, par conséquent son rayon de convergence est au moins égale à 1. D'où la définition suivante :

Définition:

La fonction G_X définie au moins sur $[-1, 1]$ par $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = t)$ s'appelle la ..... de la variable aléatoire X.

Exemple : On considère l'expérience aléatoire du jet d'un dé à 6 faces : $X(\Omega) =$ .... On note X la variable aléatoire discrète réelle qui donne la face du dé.

La fonction génératrice de X est $G_X(t) =$

Remarque : Si $X(\Omega)$ est ..... , G_X est une fonction ....

Rappel

Soit $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors f est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$ et pour tout $t \in]-R, R[$ et tout $k > 0$, on a :

$$f^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n t^{n-k}$$

Si série dérivée k-ième converge en $t = R$, alors elle est égale à la dérivée k-ième à gauche de f.

Donc, on a de même, sous réserve de convergence de ces séries :

- ☞ $G'_X(t) =$ ....
- ☞ $G''_X(t) =$ ....

....

....

d'où $V(X) =$ ....

Si le rayon de convergence de la série définissant G_X est exactement 1, ces dérivées doivent être comprises comme étant des dérivées à gauche au point $t = 1$.

Exemple : On a vu dans l'exemple précédent du jet d'un dé cubique, que $G_X(t) = \frac{1}{6}t + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^5 + \frac{1}{6}t^6$.

$G'_X(t) =$ ....

Donc, $E(X) =$ ....

Etant donnée, une variable aléatoire X, considérons sa fonction génératrice G_X associée et calculons ses dérivées successives :

$G_X(t) = P(X = 0) + P(X = 1)t + P(X = 2)t^2 + P(X = 3)t^3 + \ldots + P(X = n)t^n + \ldots$

$G'_X(t) =$ ....

$G''_X(t) =$ ....

$G^{(3)}_X(t) =$ ....

...

$G^{(k)}_X(t) =$ ....

Propriété
Etant donnée la fonction génératrice G_X d'une variable aléatoire X et $k \in \mathbb{N}$, on a : $P(X = k) =$ ......

Corollaire
Si deux variables aléatoires discrètes ont la même fonction génératrice, alors elles ont la même loi.

4. Conséquences de l'indépendance

Propriété
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, ... , ayant chacune une espérance, alors $E(XY) =$ ....

Démonstration

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i y_j P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i P(X = x_i) y_j P(Y = y_j) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i)\right)}_{E(X)} y_j P(Y = y_j) = E(X) \sum_{j=0}^{\infty} y_j P(Y = y_j) = E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

Corollaire
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, ... , ayant chacune un moment d'ordre 2, alors $V(X + Y) =$ ....

Démonstration

$V(X+Y) = E\left[(X+Y)^2\right] - \left[E(X+Y)\right]^2$

$= E\left[X^2 + 2XY + Y^2\right] - \left[E(X) + E(Y)\right]^2$

$= E\left[X^2\right] + 2E\left[XY\right] + \left[Y^2\right] - \left[E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2\right]$

Or $E\left[XY\right] = E(X)E(Y)$ car X et Y sont ....

$V(X+Y) = E\left[X^2\right] + 2E(X)E(Y) + E\left[Y^2\right] - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2$

$= \underbrace{E\left[X^2\right] - E(X)^2}_{V(X)} + \underbrace{E\left[Y^2\right] - E(Y)^2}_{V(Y)}$

Propriété

Etant donnée deux variables aléatoires discrètes X et Y, ... , à valeurs dans ... , et G_X et G_Y leurs fonctions génératrices associées : $G_{X+Y} =$ ....

Démonstration

Posons $S = X + Y$, $G_X = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$, et $G_Y = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j$. On rappelle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Pour calculer $c_k = P(S = k)$, $k \in \mathbb{N}$, utilisons le .... d'évènements $(Y = j)_{j \in \mathbb{N}}$. Il vient :

$$c_k = \sum_{j=0}^{\infty} P\big((X+Y=k) \cap (Y=j)\big)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} P\big((X+Y=k) \cap (Y=j)\big) \text{ car } Y(\Omega) \leqslant k$$

$$= \sum_{j=0}^{k} P\big((X=k-j) \cap (Y=j)\big)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j$$

Donc, c_k est le coefficient du terme t^k dans le développement du produit $G_X(t)G_Y(t)$.

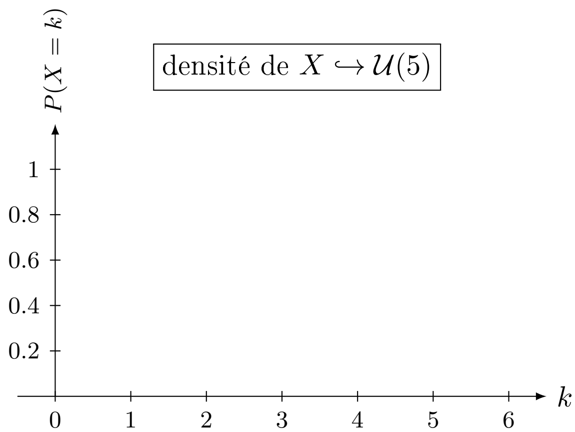
IX. Lois discrètes classiques

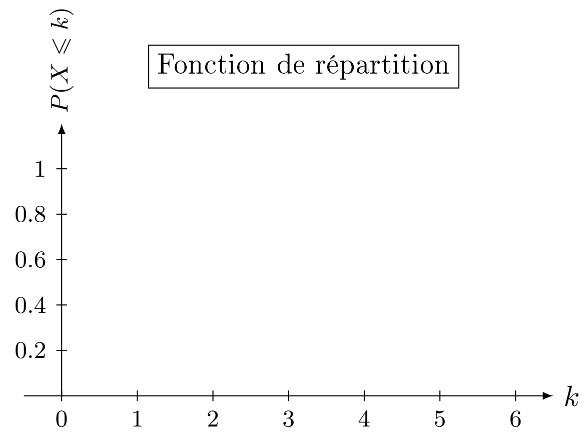
Définition:

On dit qu'une variable aléatoire discrète réelle suit une loi .... sur l'intervalle $[\![1\ ;\ n]\!]$ si l'on a :

$$X(\Omega) = \text{ .... } \text{ et } \forall k \in [\![1\ ;\ n]\!],\ P(X=k) = \ldots$$

On écrit : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$





Propriété

Etant donné $N \in \mathbb{N}^*$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$ alors $E(X) =$ .... et $V(X) =$ ....

Démonstration

Rappels : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k =$ .... et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k \times P(X = k) =$ ....

$$E\big(X^2\big) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \times P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Donc, $V(X) = E\big(X^2\big) - E(X)^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4}$

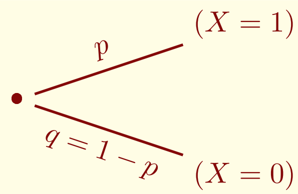
$$= \frac{2 \times (n+1)(2n+1) - 3 \times (n+1)^2}{12} = \frac{(n+1)\big[2(2n+1) - 3(n+1)\big]}{12} = \frac{(n+1)\big[n-1\big]}{12}$$

1. Les lois du tirage avec remise

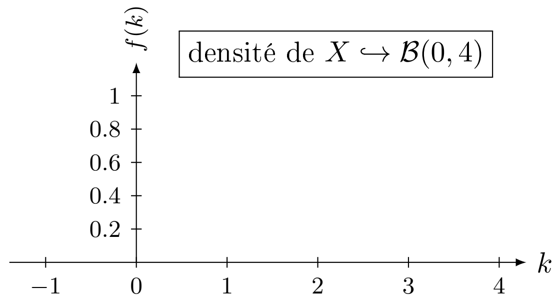
i. Loi de Bernoulli

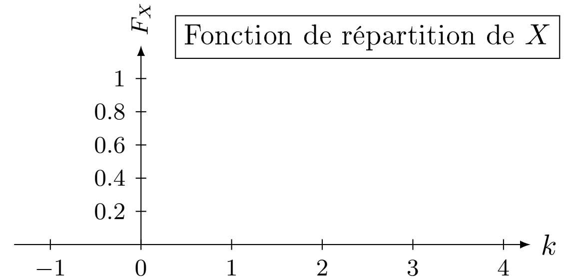
Définition:

On dit qu'une variable aléatoire discrète réelle suit une loi .... si elle ne prend que les valeurs 0 et 1 avec des probabilités non nulles :



....





Propriété

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors $E(X) = \dots$, $V(X) =$ ..... , et sa fonction génératrice $G_X(t) =$ ....

Démonstration

$E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k \times P(X = k) =$ ....

$G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X = k) = qt^0 + pt^1 = q + pt$. Donc, $G'_X(1) = p$ et on retrouve $E(X) = G'_X(1) = p$.

On sait que $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left[G'_X(1)\right]^2$, donc, comme $G''_X(t) = \dots$:

$$V(X) = \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

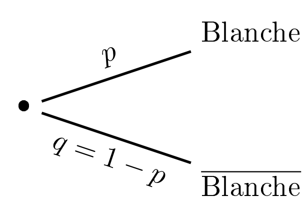
ii. Loi Binomiale

On considère une urne contenant des boules blanches en proportion p et des boules non blanches en proportion .... L'expérience aléatoire consiste à tirer n boules **avec remise** dans l'urne : on tire une boule, on note sa couleur, puis on la remet avant de tirer la suivante. On note X le nombre de boules blanches obtenues.

Définition:

La loi de la variable aléatoire discrète X est la loi .... , notée ....

A chaque tirage de boule, on a l'épreuve de Bernoulli suivante :



Notons X_i la variable aléatoire de Bernoulli associée au i-ème tirage. L'évènement $(X_i = 1)$ est réalisé si la i-ème boule tirée est blanche, $(X_i = 0)$ l'est si elle ne l'est pas. La variable aléatoire X est donc égale à $\sum_{k=1}^{n} X_k$. Les tirages étant effectués avec remise, les variables aléatoires X_i sont .... et donc :

$$G_X(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n}(q+pt) = (q+pt)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} q^{n-k}(pt)^k \quad \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)t^k$$

Propriété

La loi d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Son espérance est $E(X) =$ ..... et sa variance $V(X) =$ .....

Démonstration

Calculons les deux premières dérivées de $G_X(t) = (q+pt)^n$:

$G'_X(t) =$ ....

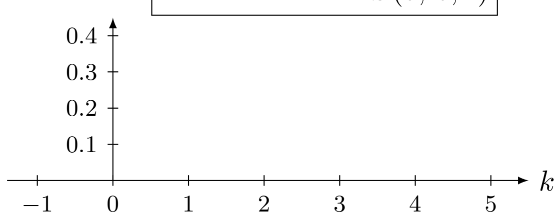
$G''_X(t) =$ ....

$E(X) = G'_X(1) =$ ....

$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left[G'_X(1)\right]^2 =$ ....

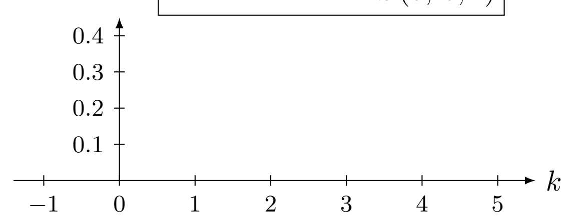
$=$ ....

densité de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(5;\, 0,4)$



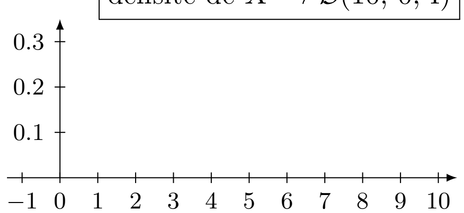
$P(X=2) =$ ....

densité de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(5;\, 0,2)$



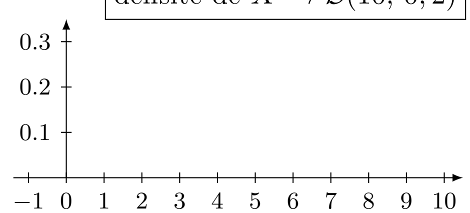
$P(X=2) =$ ....

densité de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10;\, 0,4)$



$P(X=3) =$ ....

densité de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10;\, 0,2)$



$P(X=3) =$ ....

iii. Temps d'attente : loi Géométrique

Reprenons l'urne précédente et supposons toujours qu'elle contienne une proportion p de boules blanches et la proportion $q = 1 - p$ de boules noires, avec $p \in]0\,,\,1[$. On tire alors successivement des boules une à une en remettant à chaque fois la boule tirée et on note X le rang de l'apparition de la première boule blanche. On dit que X est le .... de la première boule blanche.

On a ici, $X(\Omega) =$ ..... , car le premier succès ne peut arriver avant le premier tirage.

Définition:
La loi de la variable aléatoire discrète X est la loi .... de paramètre p, notée ....

Propriété
La loi d'une variable aléatoire X suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ est $P(X = k) = pq^{k-1}$.

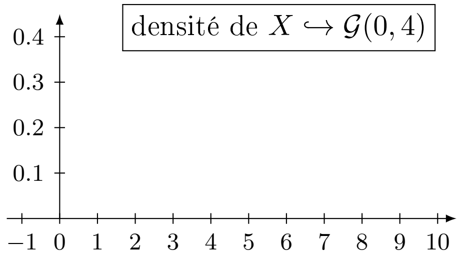
Démonstration

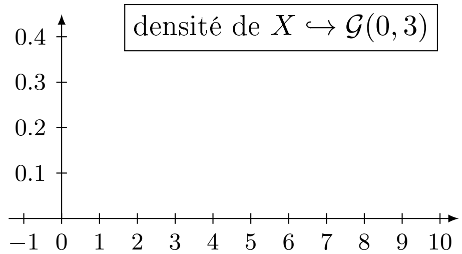
L'évènement $(X = k)$ est l'intersection des deux évènements A et B suivants :

A : les $k - 1$ premiers essais sont tous des échecs ;
B : le k-ème essai est un succès, on tire une boule blanche.

Or les essais sont .... , puisqu'il y a remise des boules,

donc $P(X = k) =$ ....





$P(X = 3) =$ .... $P(X = 3) =$ ....

Propriété
Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors $E(X) =$ ..... et $V(X) =$ .....

Démonstration

Rappel : Pour $x \neq 1$, $1 + x + x^2 + \ldots + x^n =$ ....

$G_X(t) =$ .... donc, $G'_X(t) =$ .... et $E(X) =$ ....

Astuce :

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k =$$

$$= \left(\frac{1}{1-q}\right)' =$$

Ainsi, $G'_X(1) =$ ....

Exercice n° 18: Démontre que $V(X) = \dfrac{q}{p^2}$. *Indication :* $\left(\dfrac{1}{u(x)^n}\right)' = \dfrac{-nu'(x)}{u(x)^{n-1}}$.

iv. Temps d'attente : loi de Pascal

Reprenons encore l'urne précédente. Soit r un nombre entier strictement positif, on tire alors des boules une à une en remettant à chaque fois la boule tirée. On note X le rang de l'apparition de la $r^{\text{ième}}$ boule blanche, et on dit que X est le .... de la $r^{\text{ième}}$ boule blanche.

On a encore $p \in]0\,,\,1[$ et $X(\Omega) =$ ....

Définition:
La loi de la variable aléatoire discrète X est la loi .... de paramètres r et p, notée ....

Propriété
La loi d'une variable aléatoire X suivant une loi Pascal $\mathcal{P}(r, p)$ est $P(X = k) =$.

Démonstration
L'évènement $(X = k)$ est l'intersection des deux évènements A et B suivants :

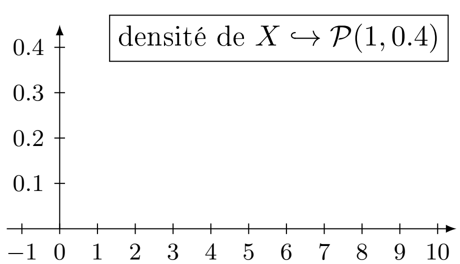
A : les $k - 1$ premiers essais, on a eu $r - 1$ succès ;
B : le k-ème essai est un succès.

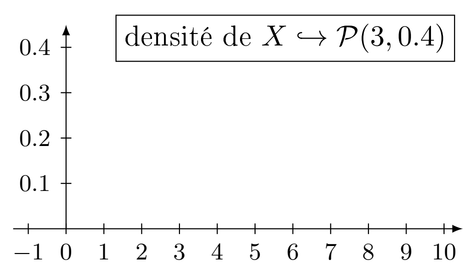
Or les essais sont indépendants, puisqu'il y a .... des boules,

donc $P(X = k) =$ ....

L'évènement A est $(Y = r - 1)$ où $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(k - 1, p)$ donc $P(A) =$ ....

Ainsi, $P(X = k) = P(A)P(B) = \dbinom{k-1}{r-1} p^{r-1} q^{k-r} \times p = \dbinom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$





$P(X = 3) =$ ....
On retrouve une loi géométrique $\mathcal{G}(0,4)$.

$P(X = 5) =$ ....

Lemme

$$\sum_{h=r}^{\infty}\binom{h-1}{r-1}q^{h-r}=\frac{1}{(1-q)^r}$$

Démonstration

On sait que :

$$\sum_{k=0}^{\infty}q^k=\frac{1}{1-q}$$

En dérivant cette égalité $r-1$ fois, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=r-1}^{\infty}k(k-1)\dots(k-(r-1)+1)q^{k-(r-1)} &= \frac{1\times 2\times 3\dots\times(r-1)}{(1-q)^r}\\
\sum_{k=r-1}^{\infty}k(k-1)\dots(k-r+2)q^{k-r+1} &= \frac{(r-1)!}{(1-q)^r}\\
\sum_{k=r-1}^{\infty}\frac{k(k-1)\dots(k-r+2)}{(r-1)!}q^{k-r+1} &= \frac{1}{(1-q)^r}\\
\sum_{k=r-1}^{\infty}\binom{k}{r-1}q^{k-r+1} &= \frac{1}{(1-q)^r}
\end{aligned}$$

En posant $h=k+1$ soit $k=h-1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{h-1=r-1}^{\infty}\binom{h-1}{r-1}q^{h-1-r+1} &= \frac{1}{(1-q)^r}\\
\sum_{h=r}^{\infty}\binom{h-1}{r-1}q^{h-r} &= \frac{1}{(1-q)^r}
\end{aligned}$$

Propriété

Si $X\hookrightarrow\mathcal{P}(r,p)$, alors la fonction .... de X est $G_X(t)=\left(\frac{pt}{1-qt}\right)^r$

Démonstration

$G_X(t)=$ ....

Il suffit d'appliquer le lemme avec qt au lieu de q : $G_X(t)=$ ....

Propriété

Si $X\hookrightarrow\mathcal{P}(r,p)$ alors $E(X)=$ ..... et $V(X)=$ ....

Démonstration

$G'_X(t) =$ ....

car : $\left(\dfrac{pt}{1-qt}\right)' =$ ....

$E(X) =$ ....

Il ne vous reste plus qu'à dériver G'_X pour appliquer $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left[G'_X(1)\right]^2$.

2. Les lois du tirage sans remise

i. Loi hypergéométrique

On considère l'urne précédente, on tire n boules de cette urne, sans remise, et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

On a $p \in [0\,,\,1]$ et $X(\Omega) =$ ....

Définition:

La loi de la variable aléatoire discrète X est la loi .... de paramètres N, n et p, notée ....

Propriété

La loi d'une variable aléatoire X suivant une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ est $P(X = k) = \dfrac{\dbinom{Np}{k}\dbinom{Nq}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}$.

Démonstration

L'urne contient .... boules blanches et .... boules noires. Puisque le tirage s'effectue sans remise, on peut considérer qu'un résultat du tirage est une partie de n éléments d'un ensemble de N éléments. Il y en a $\dbinom{N}{n}$ et ils sont tous ....

Pour calculer $P(X = k)$ il faut dénombrer ceux qui lui sont favorables, c-à-d les parties ayant exactement k boules blanches. Un résultat favorable s'obtient en choisissant k boules blanches parmi Np, ce qui peut se faire de $\dbinom{Np}{k}$ façons, puis dans chacun des cas il existe .... façons de choisir $n-k$ boules noires pour compléter le tirage.

Le nombre de cas favorables est donc .... d'où le résultat.

Propriété

Si $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$ alors $E(X) =$ ..... et $V(X) =$ ....

ii. Loi de Poisson

Définition:

On dit qu'un variable aléatoire X suit une .... de paramètre $\lambda > 0$ si les deux conditions suivantes sont réalisés : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$. On écrit alors : ....

Propriété

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors la fonction .... de X est $G_X(t) =$ ....

Démonstration

$G_X(t) =$ ....

Propriété

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors $E(X) =$ ..... et $V(X) =$ .....

Démonstration

$G'_X(t) =$ .... et $G''_X(t) =$ ....

$E(X) =$ ....

$V(X) =$ ....

X. Loi absolument continue

1. Loi continue

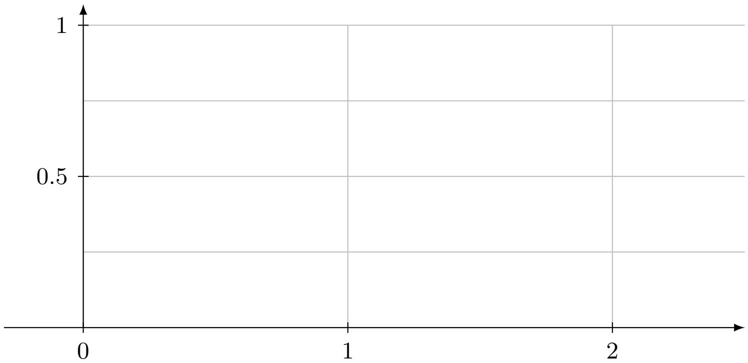
Rappel

Si f une fonction continue sur $[a, b]$ sauf peut-être en un .... alors $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est

- .... sur $[a, b]$;
- dérivable à gauche (resp. à droite) en tout point $x_0 \in [a, b]$ où f admet une limite à gauche (resp. à droite) et $F'_g(x_0) = f(x_0^-)$ $\big($resp. $F'_d(x_0) = f(x_0^+)\big)$

Ces résultats restent valables pour $a = -\infty$, sous réserve de convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Considérons le fonction de répartition d'une variable aléatoire X définie par : $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{4} \text{ si } 0 < x < 1 \\ \frac{x^2}{2} - x + 1 \text{ si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 \text{ si } 2 < x \end{cases}$



$P(X = 1) =$ ....

$=$ ....

$P(X = 2) =$ ....

Si la fonction de répartition F_X est continue en a alors $P(X = a) = \ldots$, par contre, où elle n'est pas continue $P(X = a) =$ ....

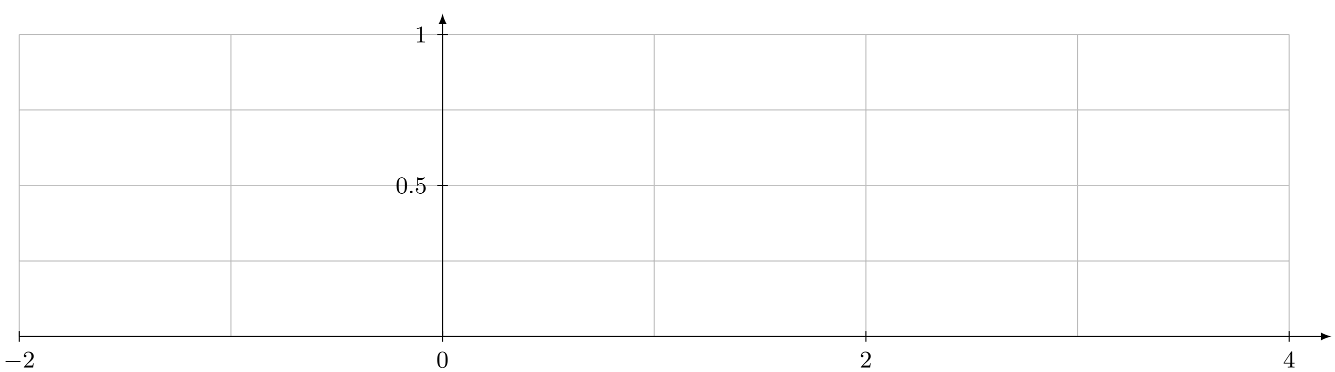
Définition:

Si la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X est

- continue sur $\mathbb{R}$, alors la loi est .... On dit aussi ....
- discontinue en un nombre fini de points, alors la loi est .... : elle a une partie continue et une partie discrète.

2. Loi absolument continue

Considérons le fonction de répartition d'une variable aléatoire X définie par : $F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+8}{16} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{4}e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$



On voit que la loi de probabilité est diffuse : .... (Elle n'a aucune composante discrète). La valeur moyenne de la probabilité d'un intervalle de longueur $h > 0$ est

$$\frac{1}{h}P(x < X \leqslant x + h) = \frac{F_X(x+h) - F_X(x)}{h}$$

Elle représente la « .... » de probabilité sur cet intervalle dans la mesure où elle est le poids de la probabilité de l'intervalle divisé par sa longueur.
Si on fait tendre cette longueur vers 0, la limite, si elle existe, représentera la probabilité d'un intervalle de longueur infiniment petite $\mathrm{d}x$. Ce sera la dérivée f de F_X :

$$\lim_{h \to 0} \frac{F_X(x+h) - F_X(x)}{h} \stackrel{\text{def}}{=} \quad \ldots\ldots\ldots$$

La fonction répartition F_X est dérivable partout sauf en $\ldots$ et peut-être en $\ldots$:

$$f(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0;2\}$ et

- $f\left(0^-\right) =$ et $f\left(0^+\right) =$
- $f\left(2^-\right) =$ et $f\left(2^+\right) =$

On constate que F_X est dérivable en $\ldots$ et on peut, par exemple considérer : $f(x) = \begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$

Définition:

On dit qu'une variable aléatoire réelle X a une densité f si sa fonction de répartition est définie par :

$F_X(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriété

Etant une densité f d'une variable aléatoire réelle X, on a :

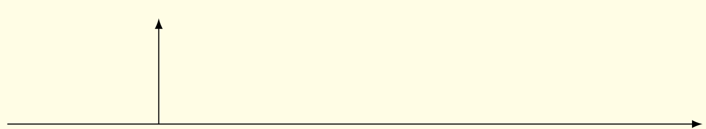
- f est une fonction ....
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \ldots$
- $P\left(a \leqslant X \leqslant b\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. La loi exponentielle.

Définition:

Une variable aléatoire réelle suit une loi .... de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité de probabilité est

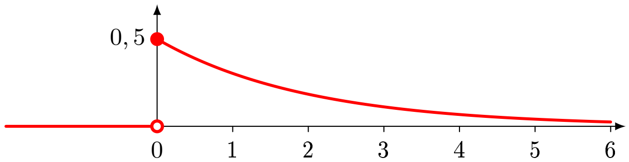
$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$



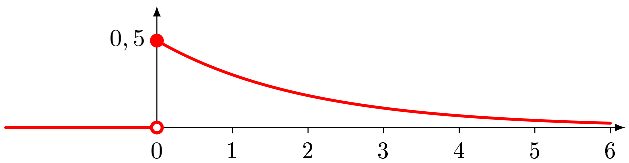
On note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

Exemple : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

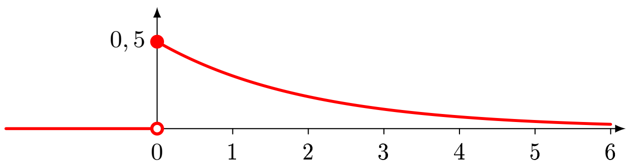
1. $P(T=2) =$ ....



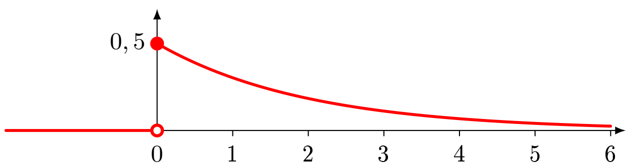
2. $P(T \leqslant 2) =$ ....



3. $P(2 \leqslant T \leqslant 4) =$ ....



4. $P(T \geqslant 2) =$ ....



On calcule l'espérance en intégrant par parties :

$$E(X) =$$

De même en intégrant par parties :

$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda}E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

D'où $V(X) =$

Propriété

Si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors :

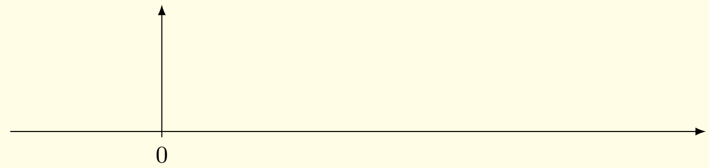
$$E(X) = \qquad \text{et} \qquad V(X) =$$

Pour $x \geqslant 0$, la fonction de répartition F est définie par : $F(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt =$

Théorème

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, est :

$$F(x) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Exemple : La variable aléatoire T suit une loi $\mathcal{E}(0,5)$.

$P(2 \leqslant T \leqslant 4) =$ ....

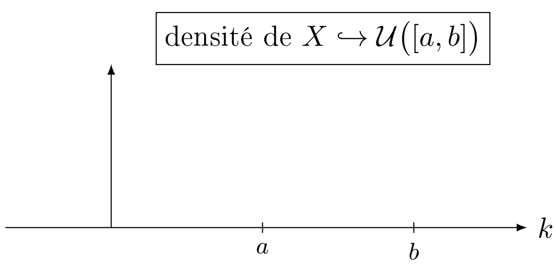
4. La loi uniforme

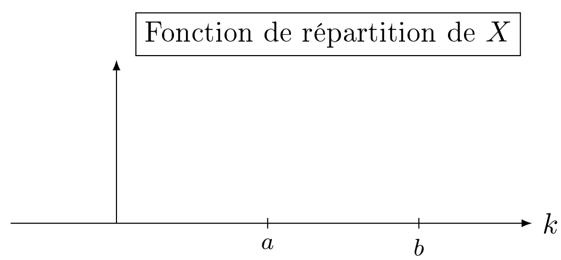
Définition:

Une variable aléatoire réelle suit une loi uniforme sur le segment $[a,b]$ si sa .... de probabilité est

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([a,b]\big)$





Propriété

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([a,b]\big)$. On a : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

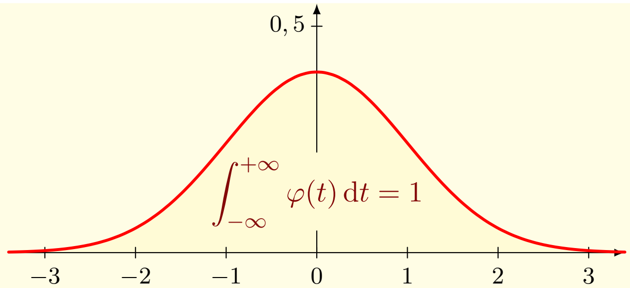
Exercice n° 19: Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([2,5]\big)$. Dessine la densité de X et démontre que $E(X) = 3,5$ et que $V(X) = 0,75$

5. Loi de Laplace-Gauss

Définition:

Une variable aléatoire réelle Z suit une loi .... si sa densité de probabilité est

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



On note $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$

Remarque :

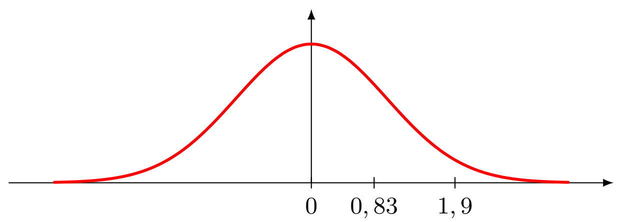
i. φ est une densité, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots$

ii. Elle est centrée donc ....

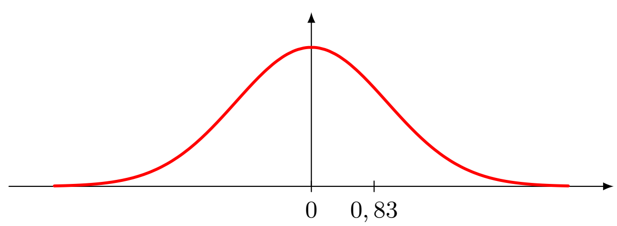
iii. Elle est réduite donc ....

iv. Pour déterminer les images de la fonction de répartition, on utilise la table donnée en annexe :

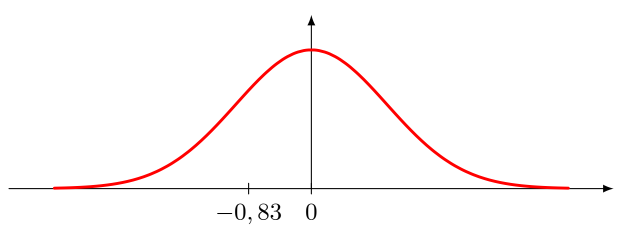
- $P(Z \leqslant 1,27) \simeq$ ....
- $P(0,83 \leqslant Z \leqslant 1,9) =$ ....



- $P(Z \geqslant 0,83) =$ ....



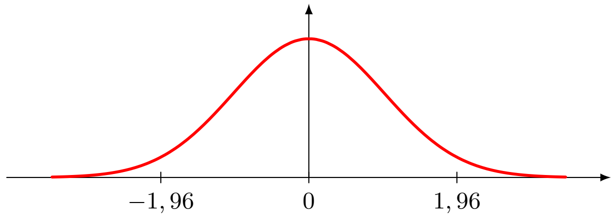
- $P(Z \leqslant -0,83) =$ ....

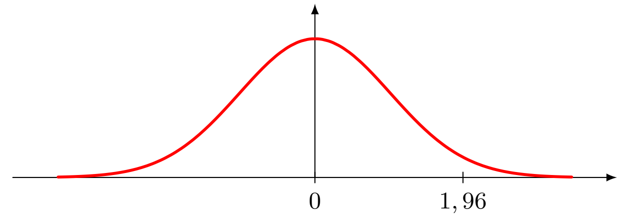


- $P(-1,96 \leqslant Z \leqslant 1,96) =$ ....

$=$ ....

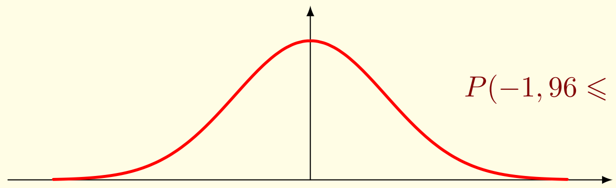
$=$ ....





Propriété

Soit Z une variable aléatoire réelle suivant un loi normale centrée réduite :



$P(-1,96 \leqslant Z \leqslant 1,96) \simeq 0,95$

L'intervalle $[-1,96; 1,96]$ est appelé l'intervalle de ....

Etant donnée la variable aléatoire $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et deux nombres réels $a > 0$ et b, définissons la variable aléatoire X par $X = aZ + b$.

- $E(X) = E(aZ+b) = aE(Z) + b = \ \dots$
- $V(X) = V(aZ+b) = V(aZ) = a^2V(Z) = \dots$ donc $\sigma(aZ+b) = \dots$
- Quelle est la densité de probabilité de X ?

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(aZ+b \leqslant x) = P\left(Z \leqslant \frac{x-b}{a}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$$

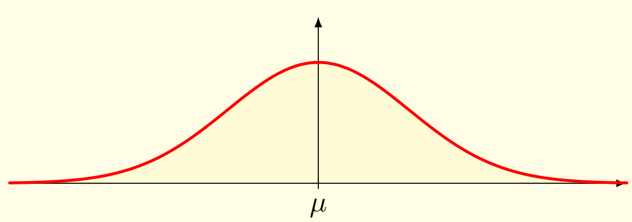
Considérons le changement de variable $u = at + b$: $\begin{cases} t = \dfrac{u-b}{a} \\ \mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}t \end{cases}$ $\begin{cases} \lim\limits_{t \to -\infty} u = \dots \\ \text{si } t = \dfrac{x-b}{a} \text{ alors } u = \dots \end{cases}$

D'où $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-b}{a}\right)^2} \frac{\mathrm{d}u}{a} = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-b}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}u$

Définition:

Une variable aléatoire réelle X suit une loi ..... d'espérance ... et d'écart-type ..... si sa densité de probabilité est

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



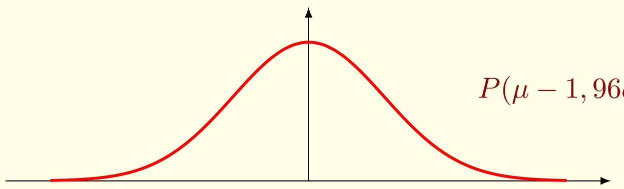
On note $X \hookrightarrow$ ....

Propriété

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi ....

Propriété

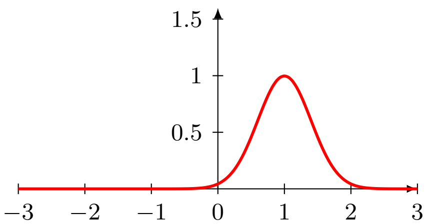
Soit X une variable aléatoire réelle suivant un loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$:



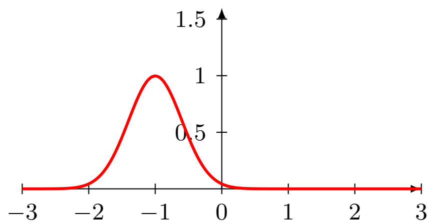
$P(\mu - 1,96\sigma \leqslant Z \leqslant \mu + 1,96\sigma) \simeq 0,95$

L'intervalle .... est appelé l'intervalle de ....

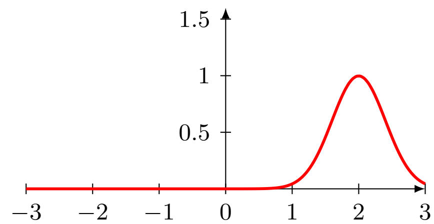
Exemple : Complète les valeurs de μ et σ sachant que $\sigma \in \{0{,}2\,;\,0{,}3\,;\,0{,}4\,;\,0{,}8\}$:



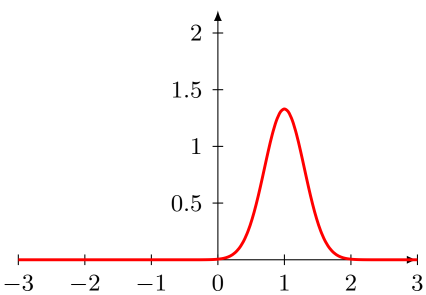
$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$



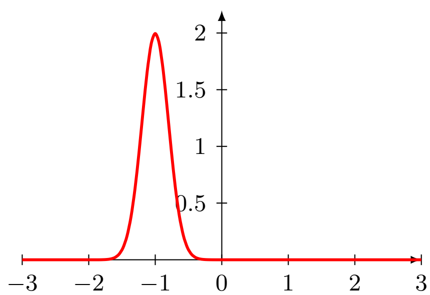
$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$



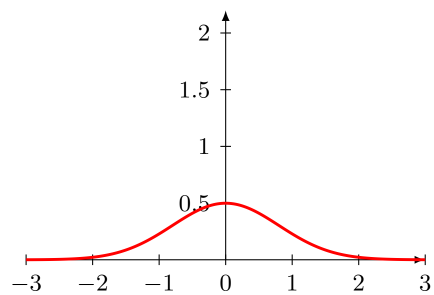
$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$



$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$



$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$



$\mu = \ldots$ et $\sigma = \ldots$

REMARQUE:

On observe que :

- la courbe admet comme .... la droite d'équation $x = \mu$,
- le maximum de la courbe est atteint en μ, espérance de la variable X (ce maximum valant $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$),
- plus σ est grand, plus la courbe « .... » autour de la moyenne, en accord avec la signification de l'écart-type.

Exemple : L'hématocrite (HTC) est une mesure de la portion du sang occupée par les cellules (globules rouges, globules blancs et plaquettes). Comme les globules rouges constituent normalement environ 98% des cellules sanguines, la mesure de l'hématocrite donne essentiellement les mêmes renseignements que ceux fournis par le décompte des globules rouges ou le taux d'hémoglobine dans l'évaluation d'une anémie ou d'une polyglobulie. Un hématocrite de 0,40 l/l (litre de cellules par litre de sang) indique que 40% du volume sanguin est constitué de cellules, le plasma constituant l'autre 60%.

Les globules rouges permettent le transport de l'oxygène. En médecine, l'intervalle de normalité de l'hématocrite est $[40, 55]$ pour les hommes, et $[35, 50]$ chez les femmes. Pour le médecin, il signifie que la majorité des femmes ont un hématocrite dans cet intervalle. Pour le statisticien, il signifie que l'hématocrite suit une loi normale dont l'intervalle de normalité est $[40, 55]$ chez les hommes.

Désignons par la variable aléatoire T l'hématocrite d'un garçon :

$\mu =$ et $1,96\sigma =$ donc, $\sigma =$

Bjarne Riis, coureur cycliste danois, surnommé l'aigle de Herning et « Monsieur 60% » (son taux d'hématocrite étant supérieur à 60%), remporte le Tour de France 1996.
La probabilité qu'un homme ait un taux d'hématocrite supérieur à 60% est ....

....

XI. Comportement asymptotique

1. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Définition:

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs positives $\big(X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+\big)$. On a l'inégalité de .... :

$$\forall \lambda \in]0, +\infty[, P\big(X \geqslant \lambda E(X)\big) \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration

Notons que le résultat est trivial si $\lambda \in]0, 1]$. Donc, on peut supposer ....

Cas n° 1 : X est discrète. Nous écrirons $X(\Omega) =$ .... , en convenant de poser dans le cas où $\mathrm{Card}X(\Omega) = n$: $P(X = x_i) = 0$ dès que $i > n$.

On rappelle que $E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i)$. Cette série étant à termes positifs :

$$E(X) \geqslant \sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} x_i P(X = x_i) \geqslant \sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} \lambda E(X) P(X = x_i) = \lambda E(X) \underbrace{\sum_{\substack{i \\ x_i \geqslant \lambda E(X)}} P(X = x_i)}_{P\left(X \geqslant \lambda E(X)\right)}$$

$$E(X) \geqslant \lambda E(X) P\big(X \geqslant \lambda E(X)\big)$$

D'où $\dfrac{1}{\lambda} \geqslant P\big(X \geqslant \lambda E(X)\big)$

Cas n° 2 : X est absolument continue.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \underset{X(\Omega)\geqslant 0}{=} \int_{0}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{\lambda E(X)}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Or si $t \geqslant \lambda E(X)$ alors $tf(t) \geqslant \lambda E(X) f(t)$

$$E(X) \geqslant \lambda E(X) \int_{\lambda E(X)}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda E(X) \underbrace{\int_{\lambda E(X)}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}_{P\left(X \geqslant \lambda E(X)\right)}$$

D'où $\dfrac{1}{\lambda} \geqslant P\big(X \geqslant \lambda E(X)\big)$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle possédant une espérance et une variance non nulle. Alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ P\Big(\big|X - E(X)\big| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Démonstration

Posons $Y = \big(X - E(X)\big)^2$. Par définition, $E(Y) = \sigma^2$. Par conséquent, d'après l'inégalité de Markov, en prenant $\lambda = \dfrac{\epsilon^2}{\sigma^2}$ on a :

$$P\big(Y \geqslant \underbrace{\epsilon^2}_{\lambda E(Y)}\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Il suffit de remarquer que $\big(Y \geqslant \epsilon^2\big) = \Big(\big(X - E(X)\big)^2 \geqslant \epsilon^2\Big) = \Big(\big|X - E(X)\big| \geqslant \epsilon\Big)$

2. Convergence en probabilité

Définition:

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité (ou encore ....) vers X si l'on a :

$$\forall \epsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} P\Big(\big|X_n - X\big| \geqslant \epsilon\Big) = 0$$

On note : ....

La loi faible des Grands Nombres

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de même loi, ayant une espérance ... et une variance ... , et qui sont deux à deux indépendantes.

Posons $\overline{X}_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ (....) Alors,

i. la suite $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ .... vers la variable aléatoire certaine égale à m ;

ii. $\forall\epsilon>0,\ P\Big(\left|\overline{X}_n - m\right| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$

Exemple : On jette indéfiniment un dé cubique. On note X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i[e] dè donne un six, 0 sinon. On pose $\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: ....

Il est clair que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{6}\right)$ donc $m = E(X_i) =$ .... et $\sigma^2(X_i) =$ ....

Le théorème affirme que :

i. $(\overline{F}_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbb{P}}$

ii. $\forall\epsilon>0,\ P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\epsilon^2} =$ ....

Pour un $\epsilon>0$ donné, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{F}_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant \epsilon\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{36n\epsilon^2} = \ldots$: la fréquence converge vers la probabilité.

Pour $\epsilon = 0,01$ et $n = 100\ 000$ on a : $P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant$ ....

Démonstration

- $E(\overline{X}_n) = \dfrac{1}{n}E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = m$
- $V(\overline{X}_n) = \dfrac{1}{n^2}V\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ car les X_i sont deux à deux indépendantes.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit $P\Big(\left|\overline{X}_n - m\right| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \dfrac{\frac{\sigma^2}{n}}{\epsilon^2} = \dfrac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$

Théorème

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle ayant toutes une espérance et une variance. Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(X)$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} V(X_n - X) = 0$, alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X.

Démonstration

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} E\big(X_n\big) = E(X)$, on peut écrire $\lim\limits_{n\to\infty} E\big(X_n - X\big) = 0$. Autrement dit, pour un réel $\epsilon > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies \Big|E\big(X_n - X\big)\Big| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$

Pour $n \geqslant n_0$ et $\omega \in \Omega$ tel que $\big|X_n(\omega) - X(\omega)\big| \geqslant \epsilon$. On peut, d'après l'inégalité triangulaire, écrire :

$$\Big|X_n(\omega) - X(\omega) - E\big(X_n(\omega) - X(\omega)\big)\Big| \geqslant \Big|X_n(\omega) - X(\omega)\Big| - \Big|E\big(X_n(\omega) - X(\omega)\big)\Big| \geqslant \frac{\epsilon}{2}$$

Ainsi, on a :

$$\Big(\big|X_n - X\big| \geqslant \epsilon\Big) \subset \Big(\big|X_n - X - E\big(X_n - X\big)\big| \geqslant \frac{\epsilon}{2}\Big)$$

Par conséquent, par croissance de la probabilité :

$$P\Big(\big|X_n - X\big| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant P\left(\big|X_n - X - E\big(X_n - X\big)\big| \geqslant \frac{\epsilon}{2}\right)$$

Et d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(\big|X_n - X - E\big(X_n - X\big)\big| \geqslant \frac{\epsilon}{2}\right) \leqslant \frac{V\big(X_n - X\big)}{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}$$

D'où

$$P\Big(\big|X_n - X\big| \geqslant \epsilon\Big) \leqslant \frac{V\big(X_n - X\big)}{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}$$

Comme par hypothèse, $\lim\limits_{n\to\infty} V\big(X_n - X\big) = 0$, la démonstration est achevée.

3. Convergence en loi

Définition:

Soit $\big(X_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. Pour chaque entier n, on note F_n la fonction de répartition de X_n. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.

On dit que la suite $\big(X_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ .... vers X si, en tout point $x \in \mathbb{R}$ où F est continue, on a :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

On note : ....

Remarque :

i. Si X_n et X sont des variables absolument continues de densités respectives f_n et f alors la convergence en loi s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

ii. On démontre facilement que la suite $\big(X_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si et seulement si, pour tout a et b réels tels que F soit continues en a et en b, on a :

$$\lim_{n\to\infty} P\big(a < X_n \leqslant b\big) = P\big(a < X \leqslant b\big)$$

Théorème

Si la suite $\big(X_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en .... vers X, alors $\big(X_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

REMARQUE:

La .... est fausse

Théorème de la limite centrale

Soit $\big(X_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, les X_i ayant toutes la même loi, une même espérance m et un même écart-type σ. Posons $\overline{X}_n$ la moyenne des n premières variables aléatoires X_i : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Si les variables aléatoires X_i sont deux à deux .... , alors

$$\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\ \mathcal{L}\ } \mathcal{N}(0,1)$$

Remarque : comme on l'a vu lors de l'étude de la loi faible des Grands Nombres :

- $E\big(\overline{X}_n\big) = \ldots$
- $V\big(\overline{X}_n\big) =$ .... donc $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ est ....

Remarque :

i. En pratique, dès que $n \geqslant 30$, on considère que $\overline{X}_n$ suit une loi normale.

ii. Puisque, par exemple $\overline{X}_n$ suit une loi normale, alors $S_n = n \times \overline{X}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ aussi.

Donc, pour un entier n assez grand, $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi .... d'espérance $E\big(S_n\big)$ et d'écart-type $\sigma\big(S_n\big)$.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent où l'on jette indéfiniment un dé cubique : On note X_i était la variable aléatoire qui est égale à 1 si le i$^{\text{e}}$ dè donne un six, 0 sinon, et $\overline{F}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$: la fréquence d'apparition des **6** sur les $\boldsymbol{n}$ premiers lancés.

On a trouvé : $m = E(X_i) = \dfrac{1}{6}$ et $\sigma^2(X_i) = \dfrac{5}{36}$.

- Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

  Pour $\epsilon = 0,01$ et $n = 100\ 000$ on avait trouvé : $P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant \dfrac{5}{360} \simeq 0,014$

- Avec le théorème de la limite centrale : $\dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\overline{F}_n - \frac{1}{6}}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

  On cherche n tel que :

$$P\left(\left|\overline{F}_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) = \frac{5}{360} \text{ donc, } P\left(\overline{\left|\overline{F}_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant 0,01}\right) = P\left(\left|\overline{F}_n - \frac{1}{6}\right| \leqslant 0,01\right) = 1 - \frac{5}{360} = \frac{355}{360}$$

$$P\left(\left|\overline{F}_n - \frac{1}{6}\right| \leqslant 0,01\right) = P\left(-0,01 \leqslant \overline{F}_n - \frac{1}{6} \leqslant 0,01\right) = P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} \leqslant \frac{\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} \leqslant Z \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right) = 2P\left(Z \leqslant \frac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right) - 1 = \frac{355}{360}$$

Ainsi, $P\left(Z \leqslant \dfrac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}}\right) = \dfrac{\dfrac{355}{360} + 1}{2} = \dfrac{143}{144} \simeq 0,9931$

En utilisant la table, on trouve $P(Z \leqslant 2,46) \simeq 0,9931$.

$$\frac{0,01}{\sqrt{\dfrac{5}{36n}}} = 2,46 \iff \sqrt{\frac{5}{36n}} = \frac{0,01}{2,46} \iff n = \left(\frac{2,46}{0,01}\right)^2 \times \frac{5}{36} = 8405$$

A partir, de 8405 lancés, la probabilité que la fréquence s'écarte d'un centième de $\dfrac{1}{6}$ est inférieure à $1,4\%$.

En Résumé :

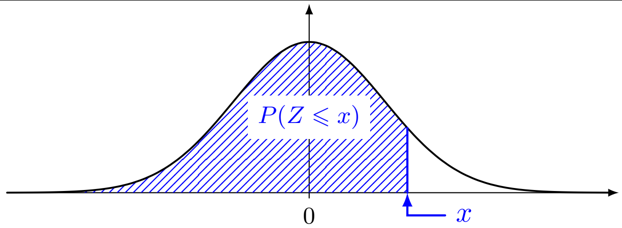
- Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

  Il faut au moins 100000 lancés de dés pour que $P\left(\left|\overline{F}_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0,01\right) \leqslant \dfrac{5}{360} \simeq 0,014$

- Avec le théorème de la limite centrale :

  A partir, de 8405 lancés, la probabilité que la fréquence s'écarte d'un centième de $\dfrac{1}{6}$ est inférieure à $1,4\%$.

Table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000